Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Eléctrica
IEE2413 - Electrónica

Problemas Electrónica 2018 - I

Profesor: Ángel Abusleme
Ayudantes: Agustín Campeny, Juan Pablo Elorrieta, Cristóbal Ferrer, y Matías Henríquez

1. Ejercicios resueltos

1.1. Enunciados

1) Considere un amplificador de voltaje ficticio, en que el voltaje de salida v_O se relaciona con el voltaje de entrada v_I de acuerdo a la siguiente relación:

$$v_O = 1 + (v_I - 1)^2$$

Esta relación es válida únicamente para voltajes de entrada entre 0V y 5V.

   a) Empleando un software de computación científica (MATLAB, Scilab, Octave, SciPy, etc.), grafique la curva de transferencia estática v_O vs. v_I.

   b) Determine analíticamente el voltaje DC de salida para una entrada DC de 0.5V, 1V y 1.5V.

   c) Determine analíticamente el valor de la ganancia de voltaje para señales pequeñas en torno a los puntos de operación del inciso anterior.

   d) Explique qué significa que la ganancia sea negativa.

2) Diseñe un filtro pasabajos pasivo (RC) con constante de tiempo 1 μs y ganancia de 0 dB en la banda pasante.

3) Determine la función de transferencia del filtro.

4) Determine una expresión para el voltaje de salida para un escalón unitario en la entrada, con condiciones iniciales cero.

5) Realice simulaciones `.ac` y `.tran` para comprobar sus resultados.

6) Demuestre que la solución de un divisor de tensión resistivo sometido a un voltaje externo corresponde a la condición de mínima potencia.

7) Suponga que tiene un parlante de 8 Ω conectado a la salida de un amplificador de voltaje. Determine la impedancia de salida del amplificador necesaria para maximizar la potencia en el parlante.

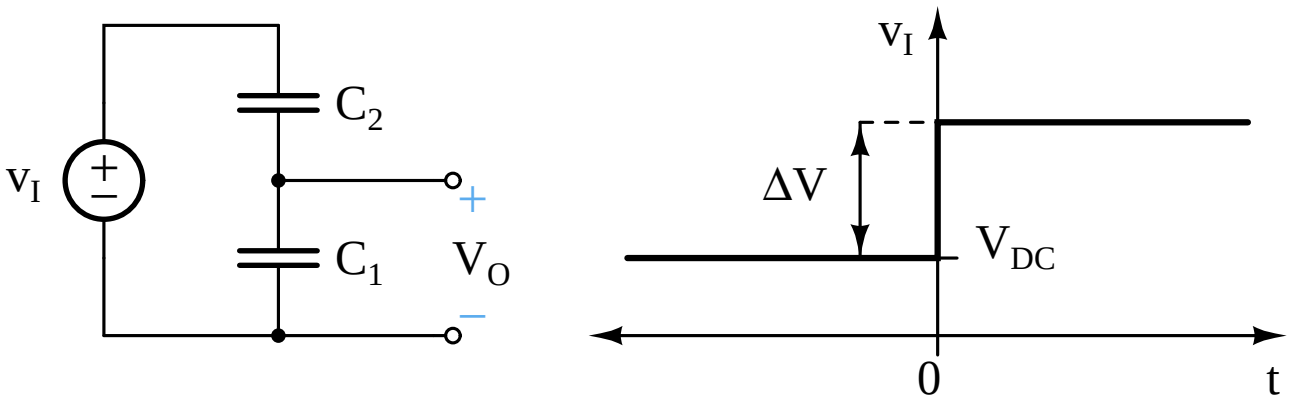


Figura 1: Esquema del problema 8).

8) En el circuito de la figura 1, $v_I = V_{DC}$ (constante) para $t < 0$, y los capacitores C_1 y C_2 están cargados con voltajes V_{C1} y V_{C2}, respectivamente. En $t = 0$ la fuente de voltaje tiene un cambio en escalón de amplitud ΔV (constante) por sobre su valor inicial. Determine el voltaje de salida V_O en función del tiempo.

9) El circuito de la figura 2 representa el modelo linealizado de un amplificador implementado con transistores. La fuente v_i proporciona la señal de entrada y es independiente. Determine la impedancia del nodo de salida v_o. En lo posible, escriba su resultado en una expresión de baja entropía.

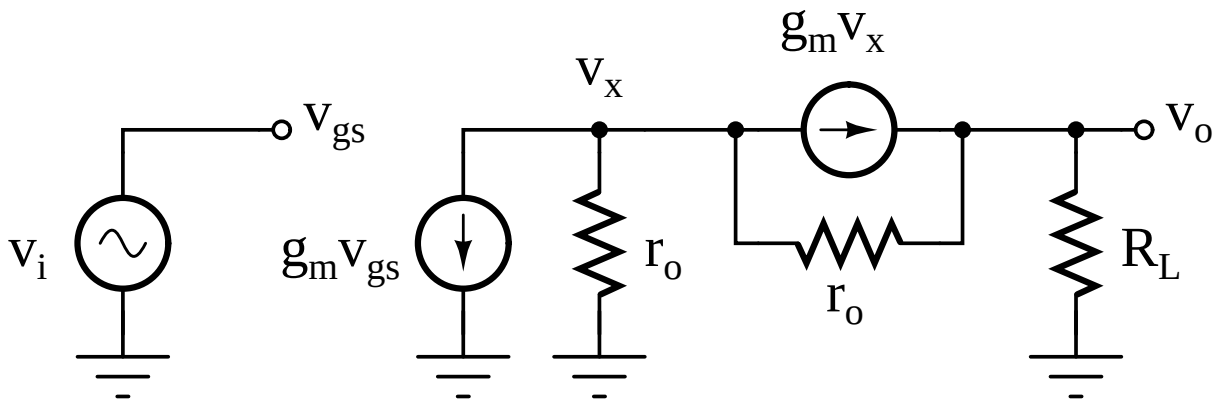


Figura 2: Esquema para el problema 9).

10) Averigüe qué es un circuito tanque paralelo. Determine su impedancia en función de la frecuencia, determine la frecuencia para la cual su impedancia es puramente real, y determine su respuesta en el tiempo ante una condición inicial no nula.

11) Considere un amplificador para un micrófono. El amplificador, que tiene ganancia 1 e impedancia de entrada infinita, debe ser alimentado con voltaje positivo y negativo (fuente simétrica o bipolar) para ser capaz de amplificar señales positivas y negativas. Esta alimentación simétrica requiere de dos baterías. El micrófono produce una salida centrada en 0 V y tiene una impedancia de 1 kΩ.

    Alan Brito Delgado, alumno de Electrónica, se da cuenta de que podría alimentar el amplificador utilizando una única batería de 9 V (alimentación unipolar) empleando algunos componentes adicio-

nales para definir un nivel DC de 4.5 V en la entrada del amplificador y acoplar capacitivamente el micrófono a la entrada del amplificador. Para establecer el nivel DC en la entrada del amplificador, Alan decide utilizar un divisor de tensión resistivo entre los 9 V de alimentación y tierra. Este divisor resistivo conectado a la entrada del amplificador evidentemente cambiará su impedancia de entrada.

a) Determine la impedancia de entrada del amplificador necesaria para que la pérdida por inserción sea menor que 3 dB.

b) Diseñe el divisor resistivo en la entrada del amplificador para cumplir con el punto anterior.

c) Agregue un capacitor de acoplamiento al circuito y determine el valor mínimo de la capacitancia para que la frecuencia de corte sea 20 Hz.

d) Determine analíticamente la función de transferencia del circuito resultante. Asegúrese de producir una expresión de baja entropía que tenga el término de ganancia y el término dependiente de la frecuencia claramente separados.

e) Realice una simulación transiente y una simulación `.ac` en SPICE para comprobar su diseño.

12) El teorema de Miller establece que, en un circuito lineal, si existe una rama con una impedancia Z conectando dos nodos con voltajes V_1 y V_2, es circuitalmente equivalente reemplazar dicha rama por dos ramas a tierra con impedancias

$$Z_1 = \frac{Z}{1-K} \quad \text{y} \quad Z_2 = \frac{Z}{1-1/K}$$

donde $K = V_2/V_1$. En la figura 3 se muestra de manera gráfica el teorema de Miller.

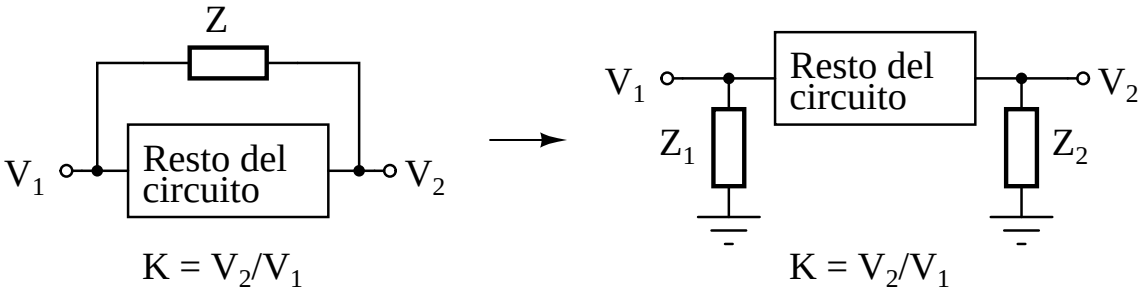


Figura 3: Esquema del problema 12). Representación gráfica del teorema de Miller.

Demuestre el Teorema de Miller.

13) Se tiene un amplificador ideal de voltaje con gran ganancia negativa. Suponga que el amplificador tiene un acoplamiento capacitivo entre su entrada y su salida. Explique intuitivamente y con ecuaciones por qué la capacitancia aparente en la entrada del amplificador es muy grande.

14) Considere el circuito del problema 9) (figura 2).

a) Determine la ganancia $A_V = v_o/v_i$.

b) Determine la transconductancia efectiva G_m. Intente llegar a una expresión de baja entropía en función de g_m, r_o y R_L.

c) Determine la resistencia de salida R_o, o copie el resultado del problema 9).

d) Compruebe que la ganancia calculada en a) es $A_V = -G_m \cdot R_o$.

15) El circuito de la figura 4 representa un modelo linealizado de un amplificador de voltaje de dos etapas. La segunda etapa corresponde a un amplificador de voltaje con impedancia de entrada infinita, ganancia negativa $-K$, y un capacitor C entre su entrada y su salida. Determine la respuesta del amplificador de dos etapas v_o ante un escalón unitario en la entrada v_i, asumiendo condiciones iniciales nulas. Pueden serle útiles resultados de problemas anteriores.

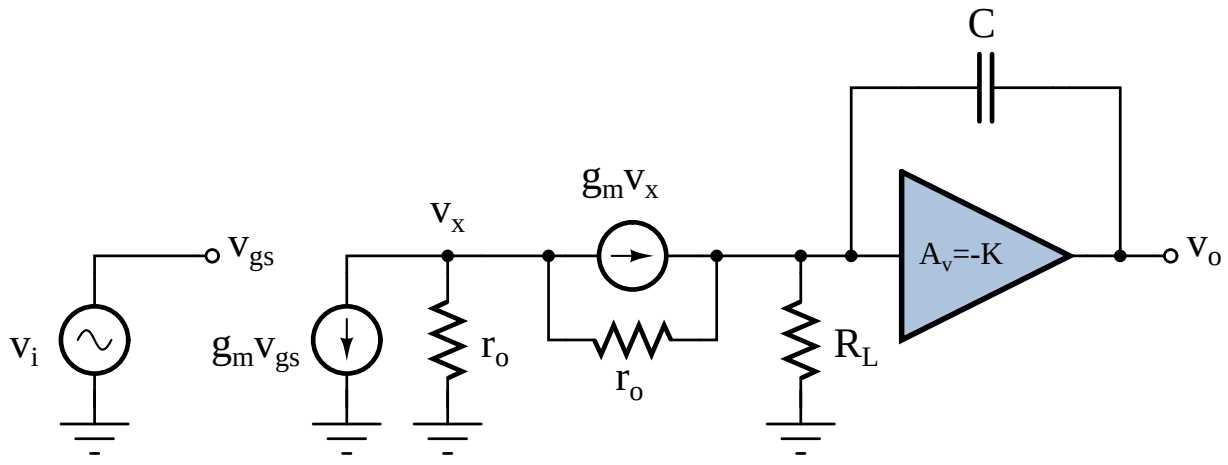


Figura 4: Esquema del problema 15).

16) Compruebe la respuesta del problema 15) usando SPICE. Haga simulaciones `.ac` y `.tran`. Utilice $g_m = 1\,\text{mS}$, $r_o = 100\,\text{k}\Omega$, $R_L = 5\,\text{M}\Omega$, $C = 100\,\text{fF}$ y $K = 5\,\text{V/V}$. Compruebe que la ganancia estática y la constante de tiempo corresponden a las respuestas del problema 15).

17) Explique con sus propias palabras el concepto de polo dominante de un sistema, y cómo influye en su respuesta en frecuencia.

18) Para la siguiente función de transferencia:

$$H(s) = A_v \left(\frac{\frac{s}{\omega_0}}{1 + \frac{s}{\omega_0}} \right)$$

confeccione su diagrama de Bode, tanto para magnitud como para fase. Indique polos, ceros y otros puntos relevantes del diagrama de Bode.

19) El circuito de la figura 5 se parece a aquéllos empleados en el flash de las cámaras fotográficas.

Suponga que el switch ha permanecido cerrado por mucho tiempo. Determine el voltaje de salida v_O al momento de abrir el switch. Compruebe su resultado mediante una simulación en SPICE.

20) El circuito de la figura 6 es un integrador con pérdidas. El circuito integra la corriente en el capacitor al mismo tiempo que va olvidando la integral de la corriente de acuerdo a la constante de tiempo RC.

a) Determine la función de transferencia $H(s) = v_O/i_I$.

b) Asumiendo que inicialmente el capacitor se encuentra descargado y que la corriente es cero para $t < 0$ y constante para $t > 0$, determine una expresión para el voltaje de salida en función del tiempo para $t > 0$.

c) Compruebe su respuesta mediante una simulación en SPICE, empleando valores arbitrarios.

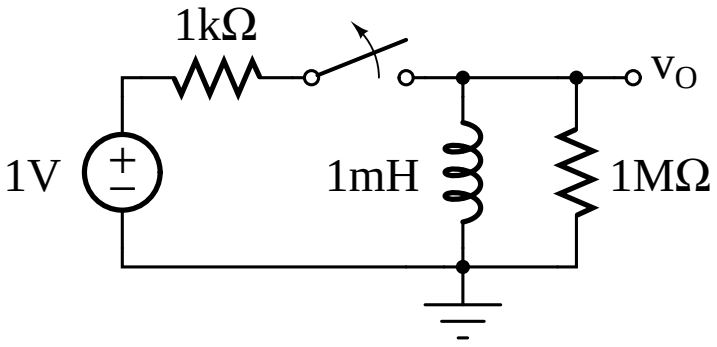


Figura 5: Esquema del problema 19).

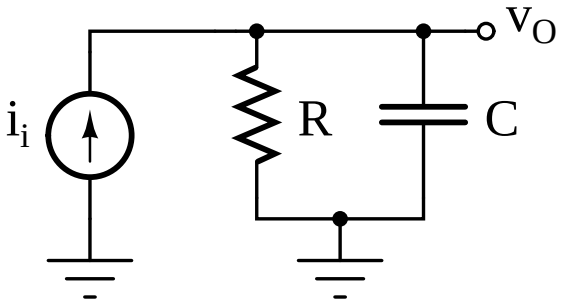


Figura 6: Esquema del problema 20).

1.2. Soluciones

1) *a*) Usando el siguiente script:

```
Vo = @(Vi) 1 + (Vi-1).^2; % Definición de función
Vi = 0:0.01:5; % Vector de variable de entrada
plot(Vi,Vo(Vi)); % Gráfico de la curva
xlabel('V_i');
ylabel('V_o');
```

se obtiene el gráfico de la figura 7 para el rango de la variable de entrada entre 0V y 5V, para el cual la relación de la curva es válida.

b) Esto se resuelve simplemente reemplazando v_I por los valores del enunciado en la ecuación que describe la función de transferencia. Cuando $v_I = 0.5\,\text{V}$ entonces $v_O = 1.25\,\text{V}$. Cuando $v_I = 1\,\text{V}$ entonces $v_O = 1\,\text{V}$. Finalmente cuando $v_I = 1.5\,\text{V}$ entonces $v_O = 1.25\,\text{V}$.

c) Aquí queremos ganancia de voltaje A_V, que es en esencia cuánto cambia el voltaje de salida debido a cambios en mi voltaje de entrada. Eso es la definición de derivada, así que tenemos que derivar la ecuación que describe la curva de transferencia:

$$A_V = \frac{dv_O}{dv_I} = 2 \cdot (v_I - 1)$$

Evaluando en los puntos de operación anteriores, obtenemos ganancias de -1V/V, 0V/V y 1V/V. Esto significa que en diferentes puntos de operación, el circuito presenta diferentes ganancias. Entonces la ganancia es una propiedad local de las curvas de transferencia estáticas.

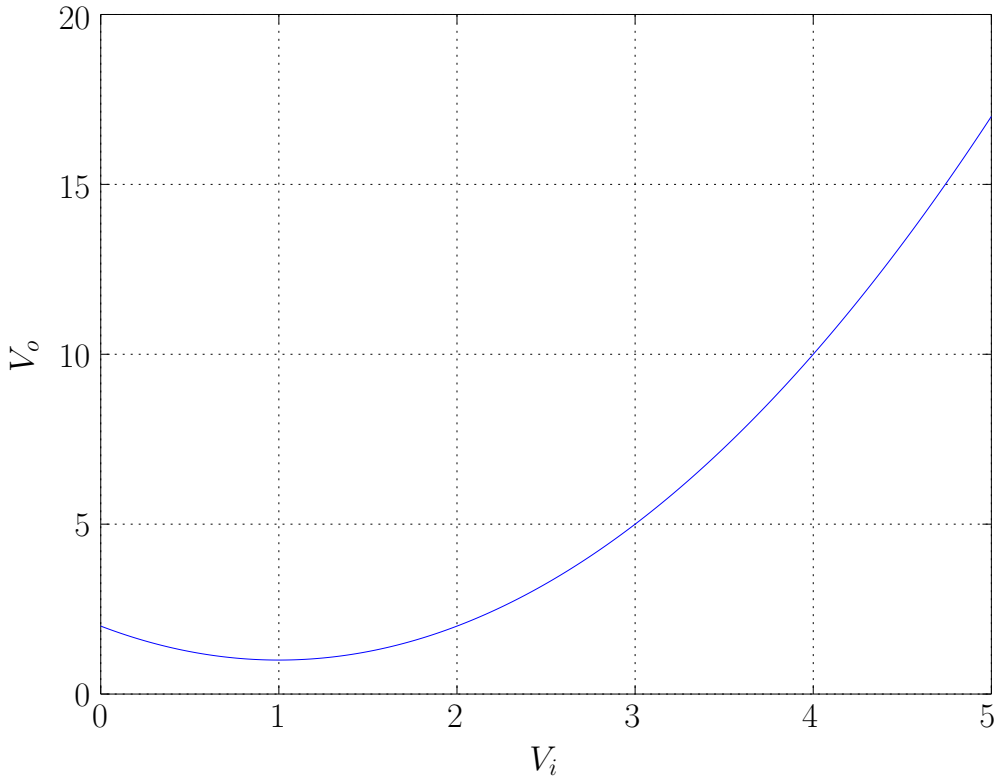


Figura 7: Curva de transferencia estática.

d) Ganancia negativa (como en el caso para voltaje de entrada de 0.5 V) significa un cambio de fase. Significa que, cuando mi señal de entrada es mayor que el punto de operación, entonces la señal de salida es menor que el punto de operación, y cuando mi señal de entrada está por debajo del punto de operación, la señal de salida excede el punto de operación. Las ganancias se miden para señales en torno al punto de operación. Es como si desplazáramos los ejes del gráfico de la curva de transferencia estática para poner el origen en el punto de operación. Así convertimos un circuito no lineal en un circuito linealizado en torno a ese punto de operación.

Ganancia negativa no implica atenuación. Puede haber ganancia que produzca señales de salida mayores que las señales de entrada en amplitud (todas medidas en torno al punto de operación), pero desfasadas en 180°, lo que corresponde una ganancia negativa de magnitud mayor a 1. Puede haber también ganancia que produzca señales de salida que se encuentren en fase y sean de menor amplitud que las señales de entrada, lo que corresponde a una ganancia positiva menor a 1, por lo que se produce atenuación.

2) Consideremos el filtro pasabajos pasivo de primer orden de la figura 8. Este circuito es apropiado dado que no tiene ganancia de voltaje en la banda pasante, es decir $A_v = 1\,\mathrm{V/V}$ o lo que es lo mismo, $A_{dB} = 0\,\mathrm{dB}$. La constante de tiempo de este circuito es $\tau = RC$.

   Si fijamos de manera arbitraria que $R = 1\,\mathrm{k\Omega}$, se despeja que $C = 1\,\mathrm{nF}$.

3) Fijemos nuestra atención nuevamente en el circuito de la figura 8. Notamos que se forma un divisor de tensión entre la entrada y la salida. Podemos escribir entonces la relación entre los dos voltajes

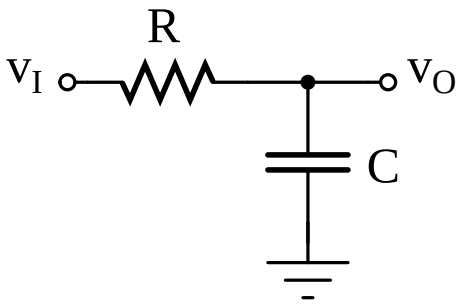


Figura 8: Filtro pasabajos pasivo RC de primer orden.

como sigue

$$\begin{aligned} v_O &= \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} \cdot v_I \\ &= \frac{1}{1 + sRC} \cdot v_I \end{aligned}$$

Por lo tanto, la función de transferencia del filtro es

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{v_O}{v_I} \\ &= \frac{1}{1 + sRC} \end{aligned}$$

Es posible observar de este último resultado que el circuito seleccionado en efecto es de primer orden, dado que tiene un único polo.

4) Dado que conocemos la función de transferencia en el dominio de Laplace, resolveremos la ecuación diferencial por este medio. Sabemos que la transformada de Laplace de un escalón unitario $u(t)$ es $U(s) = 1/s$. Luego, partiendo del resultado del inciso anterior, tenemos que

$$v_O(s) = \frac{1}{s(1 + sRC)}$$

Realizamos una descomposición en fracciones parciales a partir del último resultado

$$v_O(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{1 + sRC}$$

Lo que se reduce a resolver

$$1 = A(1 + sRC) + Bs \longrightarrow 1 = A + (A \cdot RC + B)s$$

donde claramente $A = 1$ y $B = -RC$, por lo tanto

$$v_O(s) = \frac{1}{s} - \frac{RC}{1 + sRC} \longrightarrow v_O(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{\frac{1}{RC} + s}$$

En este punto vale la pena recordar la siguiente transformada de Laplace

$$e^{-\alpha t}u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s + \alpha}$$

Finalmente, obtenemos que

$$v_O(t) = \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) \cdot u(t)$$

5) Se simuló el siguiente netlist en SPICE

```
vi Vi 0 PULSE(0 1 1u 1f)
R Vo Vi 1k
C Vo 0 1n
.tran 10u
;ac dec 20 1 10Meg
.backanno
.end
```

En la figura 9 se muestra el resultado de la simulación transiente, mientras que en la figura 10 se observa la respuesta en frecuencia del filtro.

A partir del resultado del inciso anterior sabemos que el voltaje de salida pasada una constante de tiempo (1 μs) desde que el escalón sube es de

$$v_O(\tau) = 1 - e^{-1} = 0.6321\,\text{V}$$

El resultado de la simulación transiente es consistente con lo esperado, dado que en $t = 2\,\mu$s (1 μs después de que el escalón sube) el voltaje de salida está alrededor de los 0.63 V.

Dado que sabemos la constante de tiempo, conocemos también el ancho de banda del circuito, cuyo valor es $f_{-3\text{dB}} = \dfrac{1}{2\pi\tau} \approx 159\,\text{kHz}$. Este resultado se confirma con el diagrama de Bode de la figura 10.

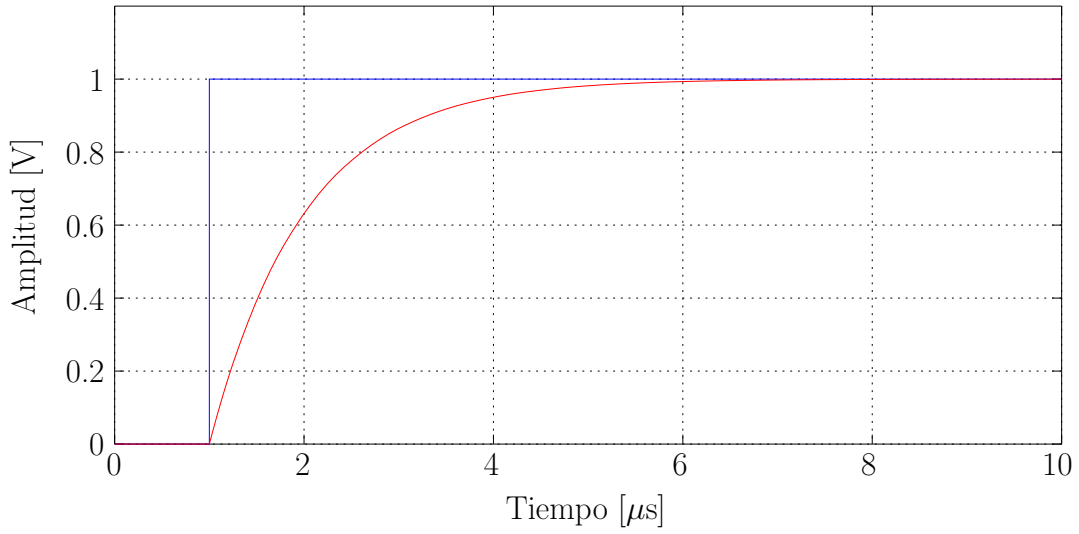


Figura 9: Simulación `.tran`. La señal azul corresponde a la señal de entrada V_i mientras que la señal roja corresponde a la señal de salida V_o.

6) Consideremos el divisor de tensión con voltaje externo V_I de la figura 11.

La potencia disipada por todo el circuito corresponde a la suma de lo disipado por ambas resistencias.

$$P_{disipada} = P_{R_1} + P_{R_2} = \frac{(V_I - V_O)^2}{R_1} + \frac{V_O^2}{R_2}$$

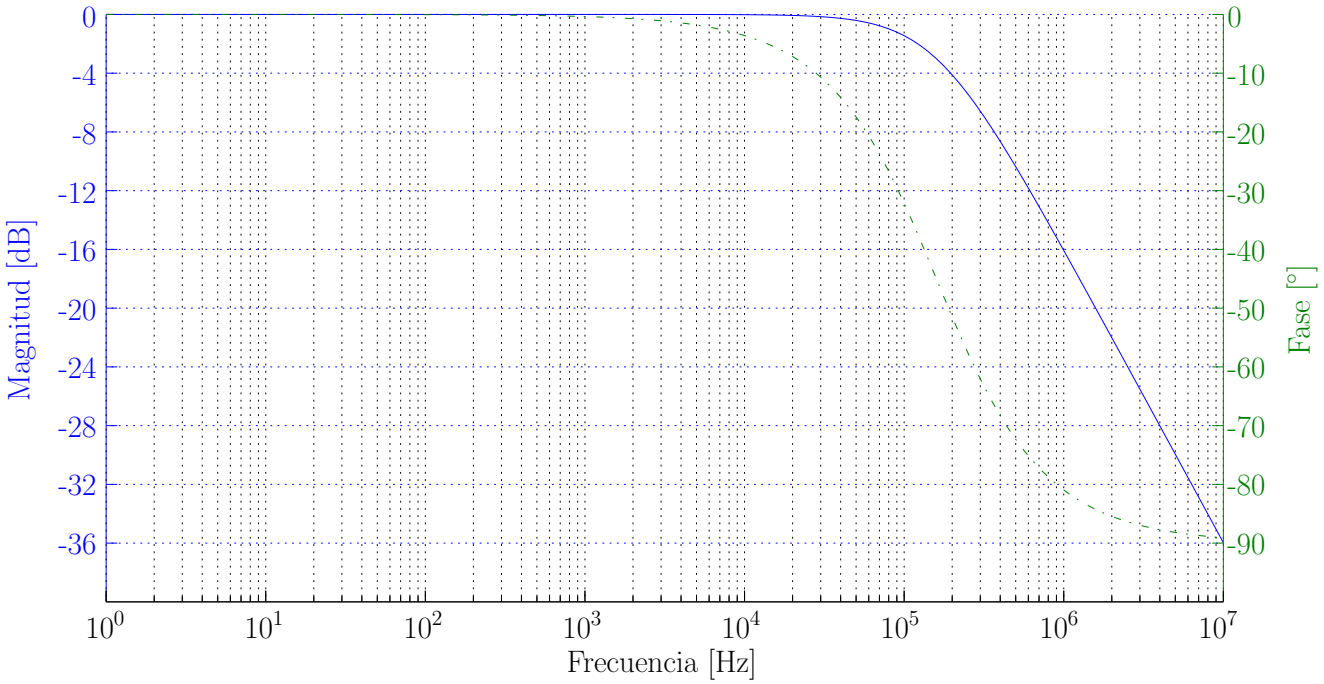


Figura 10: Simulación `.ac`.

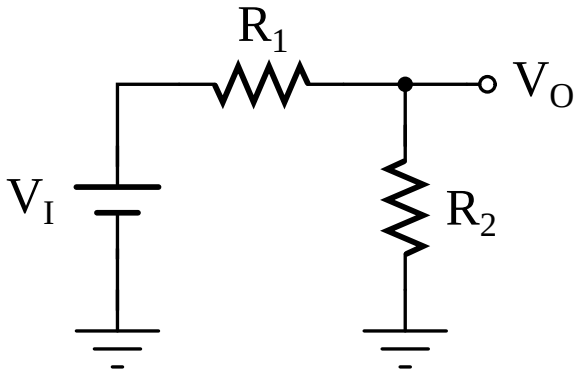


Figura 11: Divisor de tensión.

Para encontrar la condición de mínima potencia se debe derivar la potencia con respecto al voltaje del divisor e igualar a cero el resultado.

$$\frac{\delta P_{disipada}}{\delta V_O} = -\frac{2(V_I - V_O)}{R_1} + \frac{2V_O}{R_2} = 0$$

Despejando V_O de la expresión anterior se obtiene:

$$V_O = V_I \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

Que es justamente la expresión del divisor de tensión resistivo. Para comprobar que esto es efectivamente la situación de mínima potencia basta con analizar la segunda derivada:

$$\frac{\delta^2 P_{disipada}}{\delta V_O^2} = \frac{2}{R_1} + \frac{2}{R_2} > 0$$

Como la segunda derivada es mayor a cero siempre, entonces queda demostrado que el divisor resistivo es la condición de mínima potencia.

7) Esta pregunta, si bien es sencilla, puede conducir a error si no se lee el enunciado con atención. El sistema de amplificador y parlante se reduce al esquema de la figura 12, donde el amplificador se encuentra modelado mediante su equivalente de Thévenin.

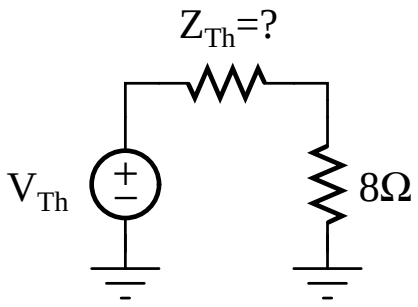


Figura 12: Circuito equivalente para el amplificador y parlante.

Lo que se está pidiendo encontrar es la impedancia de salida (no la de carga) que maximice la potencia en la carga. El resultado es bastante lógico: si se busca mayor disipación en el parlante entonces basta con minimizar la potencia perdida en la impedancia de salida. Luego, $Z_{Th} = 0\,\Omega$.

8) El esquemático de la figura 1 es un divisor de tensión capacitivo. Los divisores de tensión capacitivos funcionan bien a frecuencias altas y también en DC, con una sola consideración: en DC, pueden tener condiciones iniciales, lo cual implica que la respuesta final es la respuesta de la condición inicial superpuesta con la respuesta debida al cambio. Esto sale de la ecuación diferencial que indica que un cambio en el voltaje de entrada produce un cambio en el voltaje de salida, sin hacer mención respecto de las condiciones iniciales, que pueden ser arbitrarias.

En el circuito, inicialmente $v_O(t < 0) = V_{C1}$. Esto implica que $V_{DC} = V_{C1} + V_{C2}$; en caso contrario, estaríamos incurriendo en una contradicción de una malla. Pero eso no tiene relevancia para la solución de este problema.

En $t = 0$ hay un escalón ΔV en la entrada, que a través del divisor capacitivo resulta en un escalón en la salida, de amplitud

$$\Delta v_O = \Delta V \frac{C_2}{C_1 + C_2}$$

Aquí hay que darse cuenta de que la distribución de voltajes en cada capacitor de un divisor de tensión capacitivo es proporcional a la capacitancia del otro capacitor. Esto resulta de aplicar la fórmula del divisor de tensión a la impedancia capacitiva.

Finalmente el voltaje de salida queda como

$$\begin{aligned} v_O &= V_{C1} + \Delta v_O u(t) \\ &= V_{C1} + \Delta V \frac{C_2}{C_1 + C_2} u(t) \end{aligned}$$

donde $u(t)$ es la función escalón unitario. El gráfico correspondiente aparece en la figura 13.

9) Para determinar la impedancia de nodo primero es necesario apagar las fuentes independientes. La única fuente independiente en el circuito es v_i. Al apagarla, $v_{gs} = 0$ por lo que la fuente controlada de la izquierda también desaparece. El circuito resultante se muestra en la figura 14.

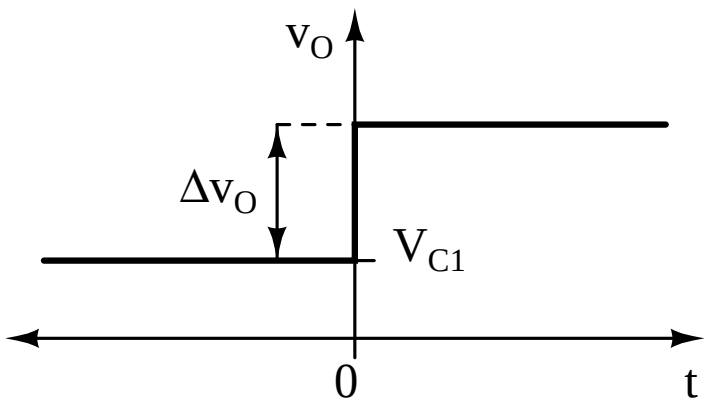


Figura 13: Salida del divisor capacitivo.

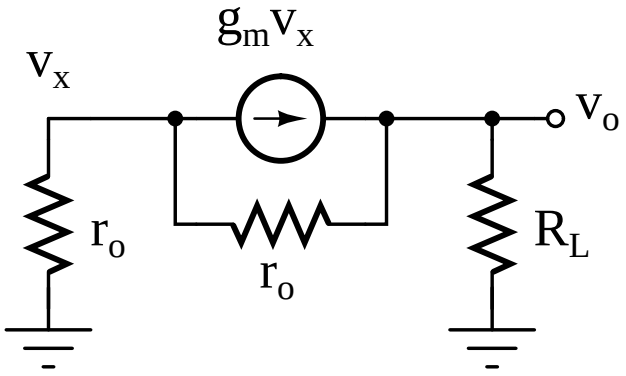


Figura 14: Circuito al apagar fuentes independientes.

La impedancia del nodo v_o, que llamaremos R_o, es el paralelo entre R_L y lo que está a su izquierda. A esa impedancia le llamaremos R_x, como se observa en la figura 15.

Entonces tenemos que

$$R_o = R_L \parallel R_x \tag{1.0.1}$$

Ahora calculemos R_x. Para ello ponemos una fuente de prueba V_T y medimos I_T. Entonces para calcular R_x hacemos $R_x = V_T/I_T$. El circuito resultante es el de la figura 16.

La corriente I_T es la suma de las corrientes de la fuente dependiente y la resistencia r_o de la derecha:

$$I_T = \frac{V_T - v_x}{r_o} - g_m v_x \tag{1.0.2}$$

La corriente I_T también es la corriente que fluye a través de la resistencia r_o de la izquierda:

$$I_T = \frac{v_x}{r_o} \tag{1.0.3}$$

Igualando (1.0.2) y (1.0.3) obtenemos lo siguiente:

$$\frac{V_T - v_x}{r_o} - g_m v_x = \frac{v_x}{r_o}$$

Despejamos v_x:

$$v_x = \frac{V_T}{2 + g_m r_o}$$

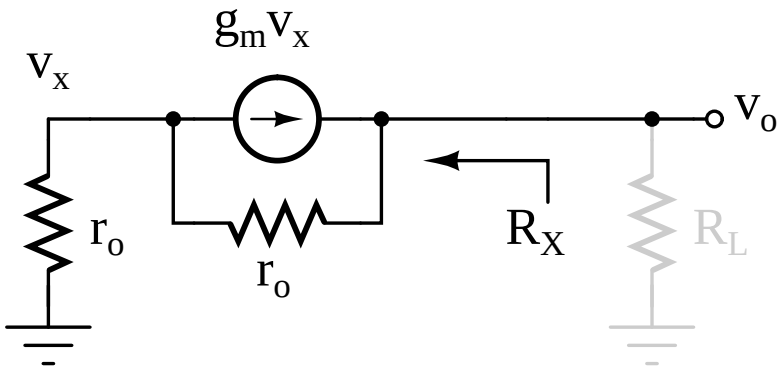


Figura 15: Impedancias vistas desde el nodo v_o.

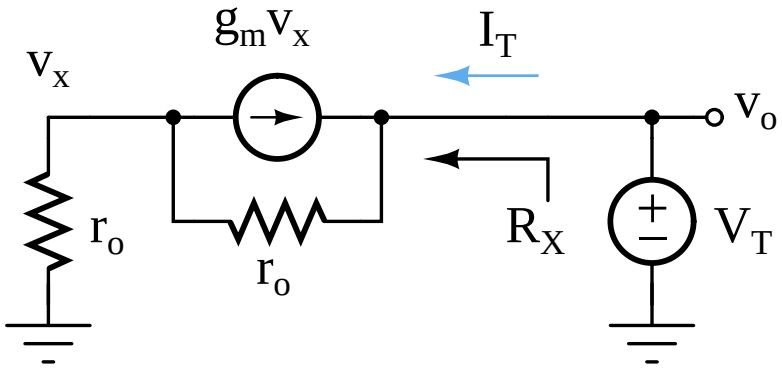


Figura 16: Circuito equivalente con fuente de prueba.

Luego reemplazamos en (1.0.3) para obtener lo siguiente:

$$I_T = \frac{V_T}{r_o\left(2 + g_m r_o\right)}$$

De esta última ecuación podemos despejar R_x:

$$R_x \equiv \frac{V_T}{I_T} = r_o\left(2 + g_m r_o\right)$$

Finalmente reemplazamos en (1.0.1) para obtener el resultado final:

$$R_o = R_L \parallel R_x = R_L \parallel \left(r_o\left(2 + g_m r_o\right)\right)$$

Lo interesante de esta expresión de baja entropía es que nos indica inmediatamente, por ejemplo, que si R_L es muy pequeño, da lo mismo cuánto valga R_x, ya que $R_o \approx R_L$. Lo otro interesante es que r_o va acompañada de un factor adimensional $2 + g_m r_o$ mayor que 1.

10) Un circuito tanque paralelo es una red RLC en paralelo. Calculando el paralelo de los tres elementos se obtiene la impedancia total del circuito:

$$\begin{aligned} Z_{eq} &= \frac{1}{\frac{1}{R} + j\omega C + \frac{1}{j\omega L}} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)} \end{aligned}$$

A partir de la última expresión es claro que para obtener una impedancia puramente real ($Z_{eq} = R$) se debe cumplir la condición:

$$\omega C - \frac{1}{\omega L} = 0$$

La frecuencia para la cual se cumple esta condición es la frecuencia de resonancia del circuito:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Si la condición inicial del circuito no es nula, el inductor absorberá la energía liberada por el capacitor para que luego este vuelva a cargarse con la energía proveniente del inductor. Para un circuito LC ideal, *i.e.* sin una resistencia R parásita o explícita en paralelo, la energía permanece almacenada entre el capacitor y el inductor oscilando perpetuamente a la frecuencia de resonancia calculada.

En la práctica, siempre existe una resistencia finita acompañando a los componentes reactivos que genera que las oscilaciones se atenúen. En la figura 17 se muestra la respuesta temporal de un circuito RLC de valores arbitrarios, donde se observa que el circuito oscila a la frecuencia de resonancia, pero estas oscilaciones se ven rápidamente atenuadas.

Como respuesta a esta pregunta también es válido considerar el caso particular para el cual $R = \infty$, es decir, un circuito tanque ideal (solo red LC). Para obtener la respuesta en el tiempo de este circuito consideremos el esquema de la figura 18.

De la manera en que está planteado el esquema, es clara que la relación de corrientes viene dada por

$$i(t) = i_L(t) = -i_C(t)$$

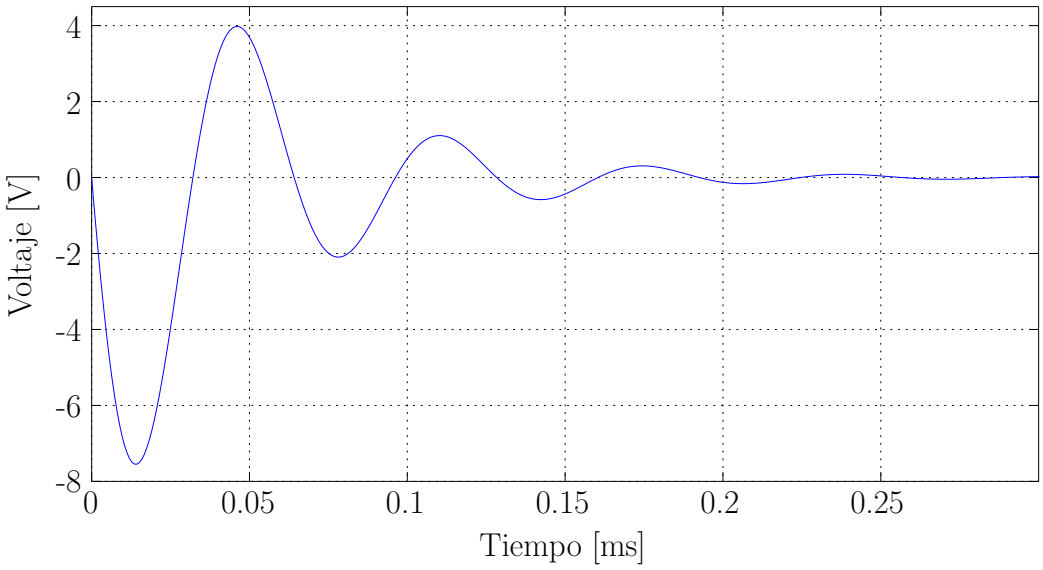


Figura 17: Respuesta de un circuito RLC.

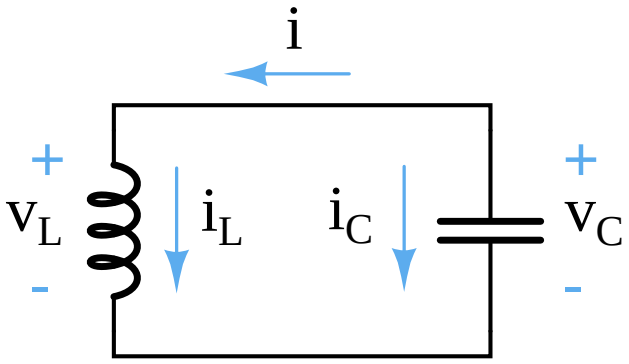


Figura 18: Circuito tanque LC.

Recordando que $i_C(t) = C\dfrac{dv_C(t)}{dt}$, podemos escribir

$$i_L(t) + C\frac{dv_C(t)}{dt} = 0$$

Por otro lado, del esquema es posible observar que el inductor y el capacitor tienen el mismo voltaje $v_L(t) = v_C(t)$. Sabemos que $v_L(t) = L\dfrac{di_L(t)}{dt}$, por lo que podemos escribir

$$v_C(t) = L\frac{di_L(t)}{dt}$$

Luego, la ecuación diferencial que caracteriza al circuito es:

$$\frac{d^2i(t)}{dt^2} + \frac{1}{LC}i(t) = 0$$

La solución general de esta ecuación diferencial para la corriente del circuito viene dada por

$$i(t) = K_1e^{j\omega_0 t} + K_2e^{-j\omega_0 t}$$

donde ω_0 es la frecuencia de resonancia. Para hallar las constantes de la ecuación es necesario conocer las condiciones iniciales de voltaje y corriente del circuito.

11) (a) Consideremos el circuito equivalente de la figura 19.

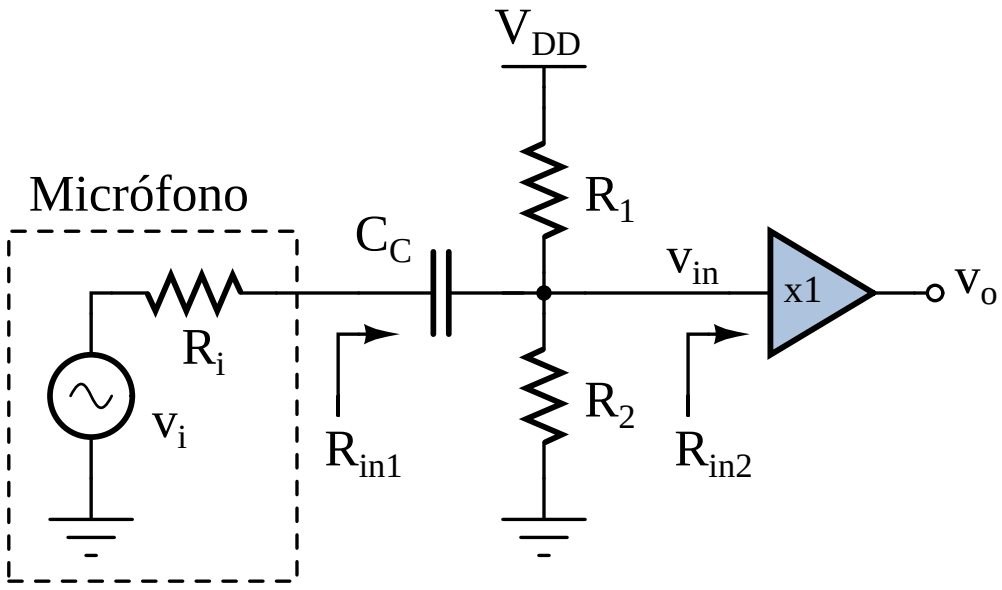


Figura 19: Circuito equivalente considerando polarización.

Este circuito considera, de izquierda a derecha

- El micrófono modelado por su equivalente de Thévenin. La impedancia de la fuente tiene valor $R_i = 1\,\text{k}\Omega$, como se indica en el enunciado. La fuente de voltaje v_i modela las señales entregadas por el micrófono, que son señales de baja amplitud centradas en tierra, oscilando entre valores positivos y negativos.
- Un capacitor de acoplamiento, del que se hablará más adelante.
- Un divisor de voltaje para fijar el nivel DC a la entrada del amplificador. Vale la pena recordar que se está utilizando una única fuente de alimentación de $V_{DD} = 9V$, y se desea definir un nivel DC de $4.5V$ a la entrada. Consecuentemente, el divisor de tensión debe ser tal que $R_1 = R_2$. Definiremos el valor de estas resistencias en $R_1 = R_2 = R$.
- El amplificador de ganancia unitaria (un *buffer*). Este tiene una impedancia de entrada de $R_{in2} = \infty$.

El micrófono, que oscila con baja amplitud, ve a su derecha el circuito equivalente en pequeña señal de la figura 20.

Vale la pena mencionar que se consideró para este inciso que la señal se encuentra en la pasabanda del filtro RC que se forma entre el capacitor de acoplamiento y los resistores de polarización, por lo que el capacitor se ve como un cortocircuito.

Tanto la resistencia R_1 como R_2 se encuentran conectadas a un nivel DC (V_{DD} y tierra, respectivamente) lo que corresponde a tierra de señal en pequeña señal. Por lo tanto, ambas resistencias se encuentran en paralelo, y su valor equivalente es de $R \| R = R/2$. La impedancia de entrada del amplificador R_{in2} es infinita, por lo que hacia el amplificador se ve un circuito abierto.

A estas alturas es claramente aparente que la señal que efectivamente entra al amplificador v_{in} es producida por un divisor de voltaje entre R_i y $R/2$, por lo que hay pérdidas por inserción. La relación entre el voltaje del micrófono y el voltaje que entra al amplificador está dada por

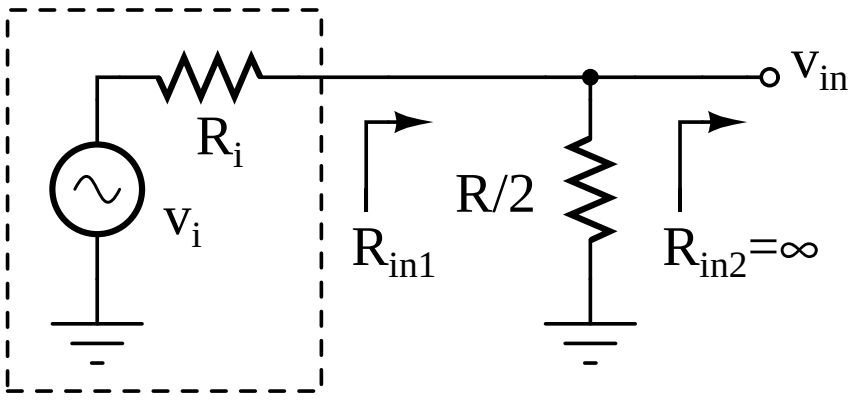


Figura 20: Circuito en pequeña señal.

$$v_{in} = \left(\frac{R/2}{R/2 + R_i}\right) v_i$$

Queremos que las pérdidas por inserción sean menor que 3 dB, que es lo mismo que decir que el factor de atenuación sea mayor que -3 dB. Recordamos que, para voltaje

$$20 \cdot \log_{10}(X) = -3\,\text{dB} \quad \longleftrightarrow \quad X = 10^{-3/20} = 0.708$$

Por lo tanto

$$\frac{R}{R + 2R_i} \geq 0.708 \quad \longrightarrow \quad R \geq 4.85 \cdot R_i$$

Vemos entonces que el mínimo valor aceptable para los resistores de polarización es de $R = 4.85\,\text{k}\Omega$, y consecuentemente una impedancia de entrada del amplificador de $R_{in1} = 2.425\,\text{k}\Omega$. Cualquier valor superior hará que las pérdidas por inserción sean menores que 3 dB.

(b) Como se indicó anteriormente, cualquier valor de R superior a $4.85\,\text{k}\Omega$ nos permite cumplir con la especificación solicitada. Sin embargo, nos pondremos en el peor caso para ver los efectos de las pérdidas de inserción sobre el desempeño del circuito. Utilizaremos entonces $R = 4.85\,\text{k}\Omega$.

(c) Consideremos nuevamente el circuito de la figura 19, pero esta vez nos enfocaremos en el efecto del capacitor de acoplamiento. Lo que este capacitor hace es separar el nivel DC entre etapas, en particular el micrófono, que tiene un nivel DC de 0 V, y el amplificador, que tiene un nivel DC de 4.5 V a su entrada.

También es claro que el capacitor se encuentra en el camino de la señal, por lo que forma un filtro **pasa-altos** RC en conjunto con los resistores de polarización y la resistencia de fuente. Para obtener la frecuencia de corte debe hallarse la ubicación del polo introducido por el capacitor C_C.

La constante de tiempo del circuito es el producto del valor del capacitor C_C y la resistencia equivalente vista desde los bornes del capacitor. Esta resistencia equivalente es

$$\begin{aligned} R_{eq} &= R_i + R_{in1} \\ &= R_i + \frac{R}{2} \end{aligned}$$

Para que el lector se convenza, puede hacer el ejercicio de encontrar la resistencia equivalente desconectando el capacitor, apagando las fuentes independientes y conectando una fuente de prueba entre los bornes del capacitor.

La frecuencia de corte del filtro pasa-altos viene dada por

$$f_{-3\text{dB}} = \frac{1}{2\pi \left(R_i + \frac{R}{2}\right) C_C}$$

Para un valor dado de R el valor de C_C para obtener dicha frecuencia de corte es único. Queremos que la frecuencia de corte sea de 20 Hz, por lo tanto

$$C_C = \frac{1}{2\pi \cdot \left(1\text{k}\Omega + \frac{4.85\text{k}\Omega}{2}\right) \cdot 20\text{Hz}} = 2.32\,\mu\text{F}$$

(d) La función de transferencia del amplificador en circuito abierto es $\frac{v_o}{v_i}$ (para la notación véase la figura 19). Sin embargo, dado que el voltaje que entra al amplificador v_{in} es igual al que sale (ganancia unitaria), calculamos entonces $\frac{v_{in}}{v_i}$.

Entre v_i y v_{in} se forma un divisor de voltaje entre la impedancia equivalente $R_i + 1/sC_C$ y $R/2$. Por lo tanto, podemos escribir

$$\begin{aligned} v_{in} &= \frac{\frac{R}{2}}{R_i + \frac{1}{sC_C} + \frac{R}{2}} v_i \\ &= \frac{s\left(\frac{R}{2} \cdot C_C\right)}{s\left(R_i + \frac{R}{2}\right) C_C + 1} v_i \\ &= \left[\frac{\frac{R}{2}}{R_i + \frac{R}{2}}\right] \left[\frac{s\left(R_i + \frac{R}{2}\right) C_C}{s\left(R_i + \frac{R}{2}\right) C_C + 1}\right] v_i \end{aligned}$$

Consecuentemente, la función de transferencia es

$$H(s) = \left[\frac{\frac{R}{2}}{R_i + \frac{R}{2}}\right] \left[\frac{s\left(R_i + \frac{R}{2}\right) C_C}{s\left(R_i + \frac{R}{2}\right) C_C + 1}\right]$$

El término de la derecha en la función de transferencia es la forma clásica de un filtro pasa-altos de primer orden. Por su lado, el término de la izquierda es un término de ganancia. En este caso, la ganancia es en efecto una atenuación (magnitud de la ganancia menor a 1) debido a un divisor resistivo que se forma entre R_i y R_{in1}.

Un resultado interesante es observar que ocurre cuando $R \gg R_i$. En dicho caso, las resistencias de polarización son tanto más grandes que la resistencia de fuente que $R_i + \dfrac{R}{2} \approx \dfrac{R}{2}$, y se obtiene

$$H(s) = \frac{s\frac{R}{2}C_C}{s\frac{R}{2}C_C + 1}$$

Por lo que, en el esquema inicial, sería lo mismo que considerar que la resistencia de fuente es un cortocircuito, y desde la fuente de voltaje lo que se ve hacia la derecha es un simple filtro pasa-altos.

(e) Para realizar la simulación `.tran` se utilizó el siguiente netlist de SPICE

```
vi Vi 0 SINE(0 100m 10k)
Ri N001 Vi 1k
Cc Vo N001 2.32u
R1 Vdd Vo 4.85k
R2 Vo 0 4.85k
Vdd Vdd 0 9
.tran 5m
.backanno
.end
```

En la figura 21 se muestra el resultado de una simulación transiente. Se observa claramente el desplazamiento del nivel DC de la señal del micrófono, y también es posible observar una atenuación en la amplitud de la señal.

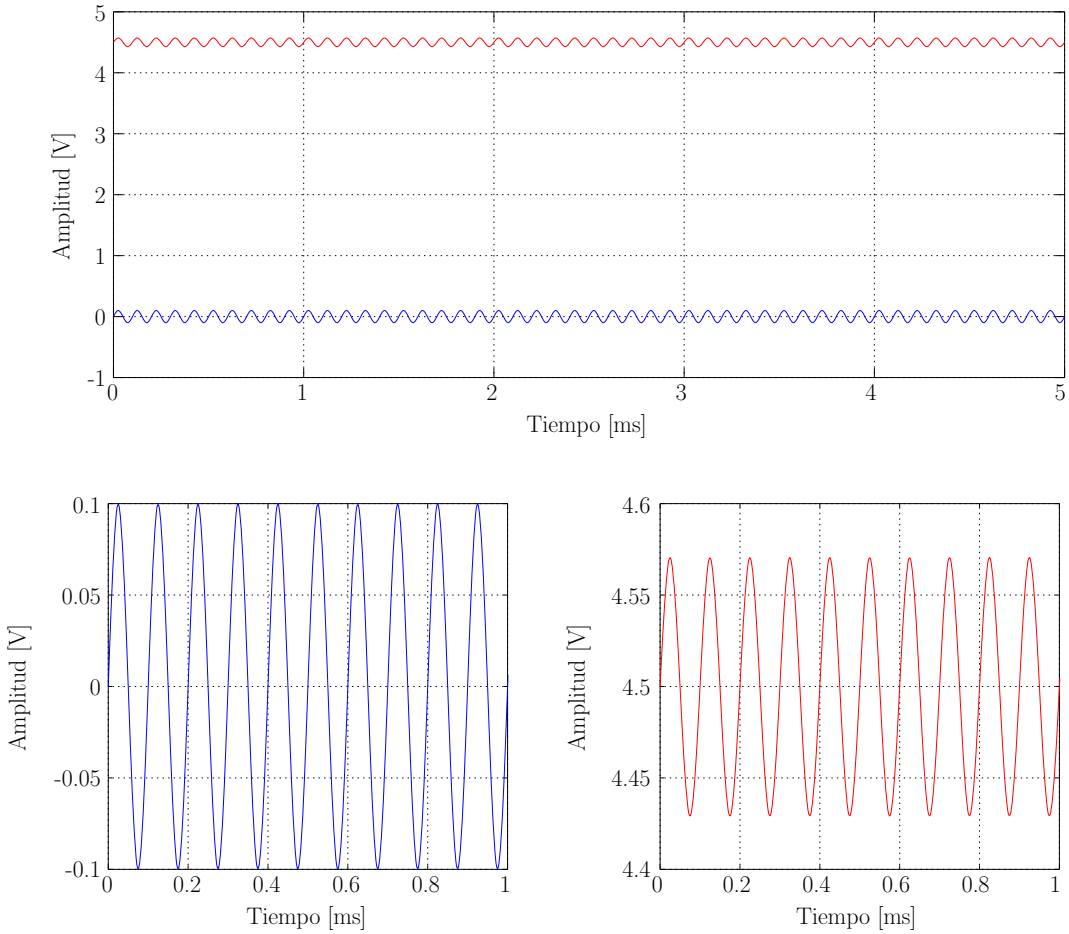


Figura 21: Simulación `.tran`. La señal azul corresponde a la señal de entrada v_i mientras que la señal roja corresponde a la señal de salida v_o.

Por otro lado, en la figura 22 se muestra el resultado de la simulación `.ac`. Se observa claramente que en la pasabanda se tiene una ganancia de -3 dB, lo que era de esperar por los valores de resistores escogidos. También se observa (¡clavado!) como la frecuencia de -3 dB es a los 20 Hz, que era lo deseado. Ojo que la frecuencia de corte se ubica a -3 dB respecto al valor en la pasabanda, por lo que se observa en -6 dB.

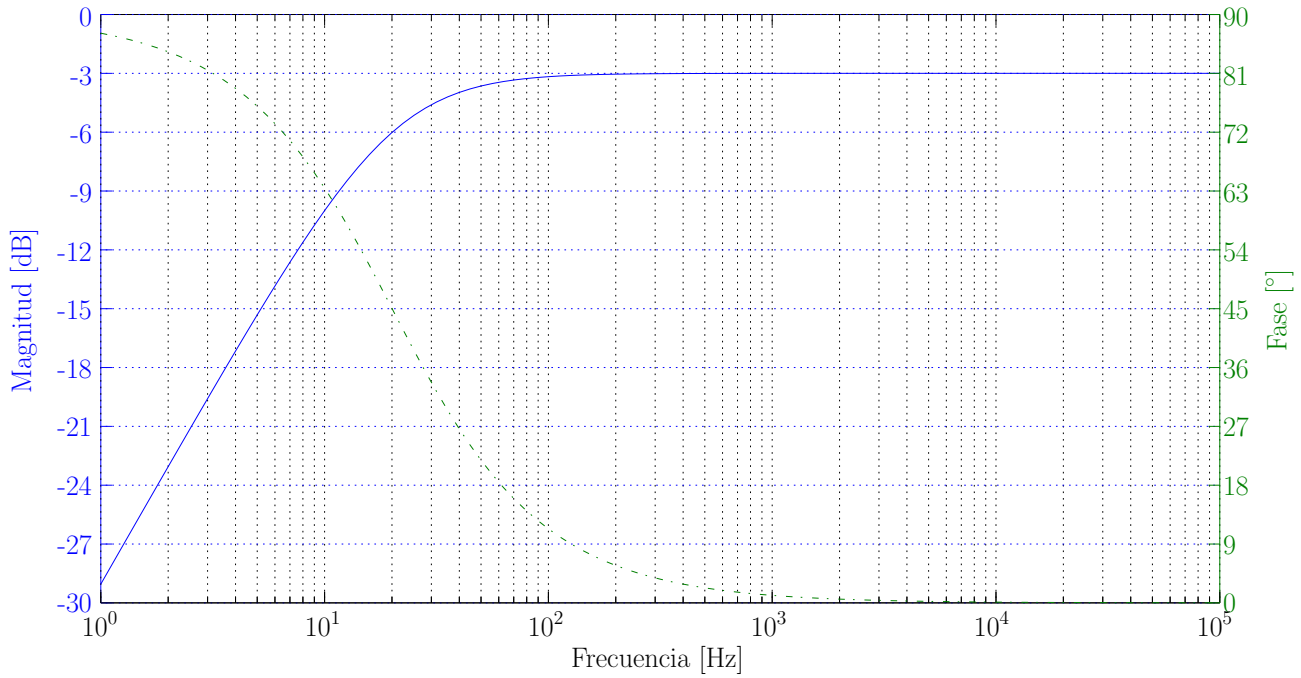


Figura 22: Simulación `.ac`.

12) Consideremos el esquema de la figura 23, donde se denomina Z_1 a la impedancia vista desde el nodo V_1 hacia Z.

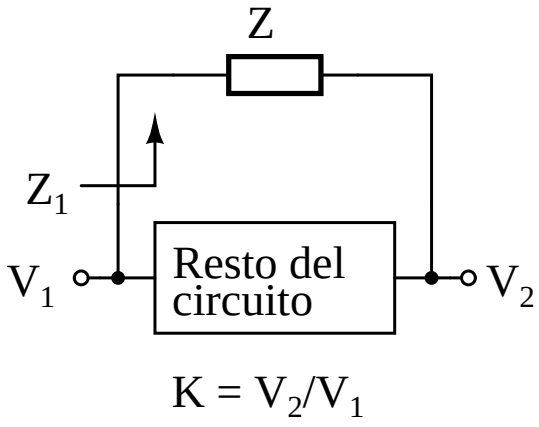


Figura 23: Impedancia vista desde el nodo V_1 hacia Z.

Para obtener el valor de dicha impedancia aparente debemos hallar el cociente

$$Z_1 = \frac{V_1}{I_i} \tag{1.0.4}$$

donde I_i es la corriente que circula por la impedancia Z. El valor de dicha corriente viene dada por

$$I_i = \frac{V_1 - KV_1}{Z} \tag{1.0.5}$$

donde implícitamente reemplazamos $V_2 = KV_1$ en la ecuación de la corriente. Reemplazando (1.0.5) en (1.0.4) obtenemos que:

$$Z_1 = \frac{Z}{1-K}$$

De esta manera queda demostrado que es circuitalmente equivalente reemplazar Z por la impedancia a tierra Z_1 para el nodo V_1. Esto es lo mismo que decir que desde el nodo V_1 hacia la impedancia Z se ve una impedancia de Z_1.

Con un procedimiento totalmente análogo para el nodo V_2, para el cual se cumple la relación $K' = 1/K = V_1/V_2$, obtenemos que:

$$Z_2 = \frac{Z}{1-1/K}$$

De esta manera queda demostrado que es circuitalmente equivalente reemplazar Z por la impedancia a tierra Z_2 para el nodo V_2. Con ambos resultados queda demostrado el teorema de Miller.

13) Consideremos el esquema de la figura 24 donde se muestra un amplificador ideal con ganancia negativa realimentado mediante un capacitor C. Dado que el amplificador es ideal, tiene una impedancia de entrada infinita, por lo que la impedancia vista desde el nodo de entrada v_i corresponde únicamente a la impedancia equivalente vista hacia el capacitor.

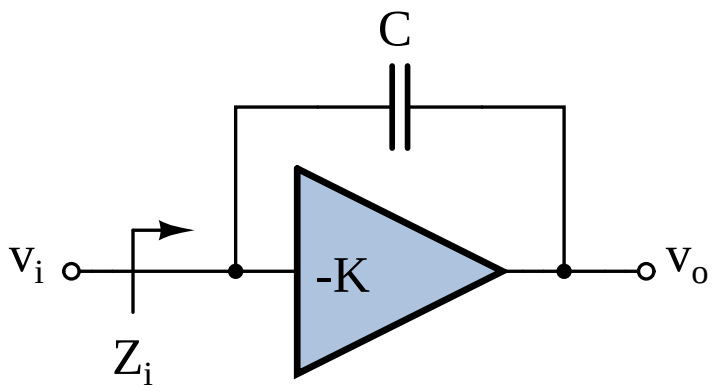


Figura 24: Amplificador ideal realimentado.

Sabiendo que el capacitor corresponde a una impedancia de valor $Z_C = 1/sC$, podemos aplicar directamente el teorema de Miller para obtener la impedancia equivalente vista desde el nodo de entrada. El valor de esta impedancia es

$$\begin{aligned} Z_i &= \frac{Z_C}{1+K} \\ &= \frac{1}{sC(1+K)} \end{aligned}$$

donde la ganancia negativa hace que el denominador quede $1 + K$. De este último resultado se hace evidente que desde el nodo de entrada se ve una capacitancia amplificada

$$C_i = C(1+K)$$

Luego, la ganancia del amplificador aumenta la capacitancia aparente vista desde el nodo de entrada. Valores de K grandes van a hacer que se vea una capacitancia enorme.

Este efecto se puede explicar de forma intuitiva analizando cualitativamente como se mueven los voltajes de los nodos. Para una ganancia negativa grande, cuando el voltaje v_i sube, el voltaje v_o baja mucho más, lo que aumenta la diferencia de potencial entre los bornes del capacitor y esto hace que se necesite más corriente para cargarlo, lo que equivale a una gran capacitancia de entrada. En el caso de una resistencia es al revés, ya que el aumento en la diferencia de potencial aumenta la corriente que circula por R, lo que equivale a una baja resistencia de entrada.

14) (a) Se pide la ganancia $A_V = v_o/v_i$, que define cuánto crece la salida cuando la entrada aumenta en una unidad. La forma más directa para determinarla es calculando v_o en función de v_i para luego obtener $A_V = v_o/v_i$. De la figura 25 podemos ver que v_o es el resultado de la corriente de salida en R_L.

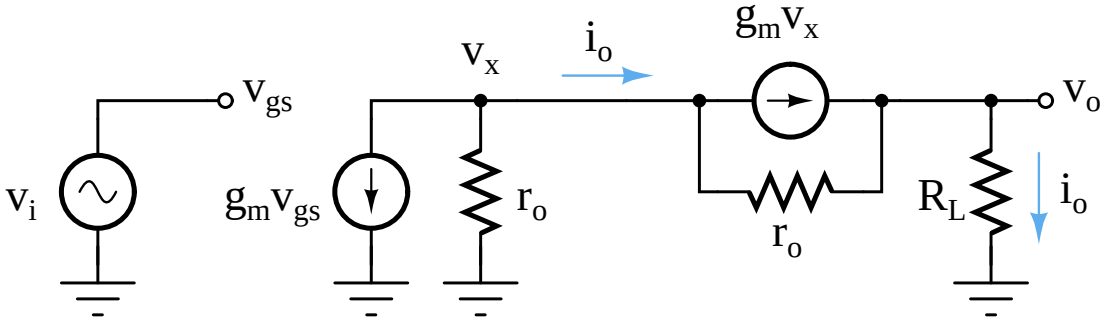


Figura 25: Esquema para el análisis. Corriente de salida y nodos intermedios.

Ahora planteemos ecuaciones. Para el nodo de salida tenemos que:

$$v_o = i_o R_L \tag{1.0.6}$$

Sabemos que la corriente i_o es la misma que pasa entre el nodo v_x y el nodo v_o:

$$i_o = g_m v_x + \frac{v_x - v_o}{r_o} \tag{1.0.7}$$

También sabemos que i_o es la corriente que va entre tierra y el nodo v_x:

$$i_o = -\frac{v_x}{r_o} - g_m v_i \tag{1.0.8}$$

donde utilizamos $v_{gs} = v_i$. El voltaje v_x no nos sirve en la solución, así es que lo usaremos como paso intermedio. De (1.0.7) despejamos v_x:

$$v_x = \frac{v_o + i_o r_o}{1 + g_m r_o} \tag{1.0.9}$$

Luego de (1.0.8) también despejamos v_x:

$$v_x = -g_m r_o v_i - i_o r_o \tag{1.0.10}$$

Ahora igualamos (1.0.9) y (1.0.10) y despejamos i_o:

$$i_o = -\frac{v_o + v_i g_m r_o (1 + g_m r_o)}{r_o (2 + g_m r_o)} \tag{1.0.11}$$

Entonces reemplazamos (1.0.11) en (1.0.6) para llegar a la solución:

$$A_V \equiv \frac{v_o}{v_i} = -\frac{g_m r_o(1+g_m r_o)R_L}{r_o(2+g_m r_o)+R_L} \tag{1.0.12}$$

(b) La transconductancia efectiva G_m es la razón entre la corriente de salida de cortocircuito i_o y el voltaje de entrada v_i, es decir, $G_m = i_o/v_i$. Al cortocircuitar la salida a tierra se obtiene el esquema de la figura 26. La resistencia de carga R_L queda cortocircuitada y no aparecerá en la solución.

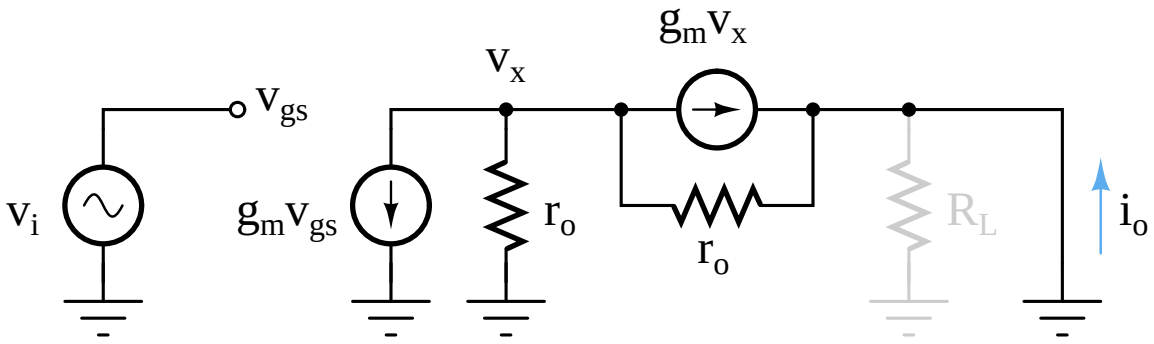


Figura 26: Esquema para el análisis. Corriente de cortocircuito.

Mirando el circuito notamos que i_o circula por la rama del transconductor y resistor r_o de la derecha, y también por la rama del transconductor y resistor r_o de la izquierda. Vemos también que si r_o de la izquierda fuera infinito, entonces i_o sería $g_m v_i$, por lo que G_m sería igual a g_m. Pero no es el caso, así que no podemos resolver el circuito por inspección.

Podemos expresar i_o en función de otras corrientes:

$$i_o = -g_m v_x - \frac{v_x}{r_o} \tag{1.0.13}$$

También podemos hacer lo mismo con la corriente entre v_x y tierra por las ramas de la izquierda:

$$i_o = g_m v_i + \frac{v_x}{r_o} \tag{1.0.14}$$

Igualando (1.0.13) y (1.0.14) y despejando v_x:

$$v_x = -\frac{g_m r_o v_i}{2+g_m r_o} \tag{1.0.15}$$

Luego reemplazamos (1.0.15) en (1.0.14):

$$i_o = g_m v_i \frac{1+g_m r_o}{1+g_m r_o} \tag{1.0.16}$$

Finalmente calculamos la transconductancia efectiva:

$$G_m \equiv \frac{i_o}{v_i} = g_m \frac{1+g_m r_o}{2+g_m r_o} \tag{1.0.17}$$

Aquí podemos confirmar que si r_o fuera infinito, entonces tendríamos $G_m = g_m$.

(c) El resultado del problema 9) es

$$R_o = R_L \parallel R_x = R_L \parallel (r_o\,(2 + g_m r_o)) \tag{1.0.18}$$

(d) De acuerdo a lo visto en el capítulo, en cualquier amplificador lineal se tiene que $A_V = -G_m \cdot R_o$. Reemplazando los resultados de las partes b) y c) (ecuaciones (1.0.17) y (1.0.18)) llegamos a lo siguiente:

$$A_v \equiv \frac{v_o}{v_i} = -g_m \frac{1 + g_m r_o}{2 + g_m r_o} \cdot [R_L \parallel (r_o\,(2 + g_m r_o))] \tag{1.0.19}$$

Desarrollando la operación paralelo, es fácil comprobar que este resultado es idéntico a (1.0.12). Lo interesante de obtener la ganancia como producto entre G_m y R_o es que se obtiene una expresión de menor entropía, más útil al momento de diseñar, porque desacopla de mejor manera efectos de diferentes parámetros en el resultado final. Además que resulta en un cálculo más rápido, porque aunque consta de dos partes (G_m y R_o), generalmente es más fácil obtener cada una de ellas por separado que la ganancia. Finalmente, es conveniente tener G_m y R_o por separado porque suelen ser muy útiles para el cálculo de otras cifras de desempeño.

15) Hay dos o más formas de resolver este problema. La forma más obvia, pero más difícil en términos de álgebra y que menos aporta en términos de entendimiento del problema, consiste en calcular la función de transferencia $V_O(s)/V_I(s)$ y luego resolver la ecuación diferencial para un escalón en la entrada.

Una forma más intuitiva de resolver el problema es mediante ciertos análisis que apuntan a entender cómo funciona el amplificador. De partida vemos que tiene sólo un elemento que almacena energía, y por lo tanto tiene un solo polo. Si aplicamos un escalón en la entrada y esperamos suficiente tiempo, aparecerá un voltaje constante en la salida. Por lo tanto el circuito deja pasar las bajas frecuencias. Si aplicamos en cambio una entrada de muy alta frecuencia, esa señal aparecerá en la entrada de la segunda etapa. El capacitor se comportará como un cortocircuito para esas frecuencias, haciendo que la entrada y la salida de la segunda etapa sean iguales. La única solución para que la salida, siendo $-K$ veces la entrada, sea también igual a la entrada, es que ambas sean cero. Por lo tanto, el circuito atenúa las altas frecuencias. Entonces el amplificador tiene una respuesta tipo pasabajos.

Cuando la condición inicial es nula, la única posibilidad de una respuesta pasabajos de un solo polo ante una entrada en escalón es:

$$v_o = V_F \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \tag{1.0.20}$$

donde V_F es el valor final, proporcional al escalón de entrada, y τ es la constante de tiempo. Si τ es grande, la respuesta es lenta. Encontrando V_F y τ tendremos la respuesta a este problema.

El voltaje final V_F es a lo que tiende la salida cuando el capacitor C ya está cargado (después de mucho tiempo). Por lo tanto, eliminamos el capacitor y vemos que la salida es el producto de la entrada y las ganancias de la primera y la segunda etapa. La ganancia de la primera etapa es $-G_m R_o$ (problema 14)), con

$$G_m = g_m \frac{1 + g_m r_o}{2 + g_m r_o}$$

y

$$R_o = R_L \parallel (r_o\,(2 + g_m r_o))$$

mientras que la ganancia de la segunda etapa es $-K$. Por lo tanto, para un escalón en la entrada igual a v_i, el valor final de la salida será

$$V_F = G_m R_o K v_i$$

Ahora sólo necesitamos τ. Sabemos que τ es una constante de tiempo formada por alguna capacitancia y alguna resistencia que ve esa capacitancia. Claramente por teorema de Miller, la segunda etapa ofrece una carga capacitiva a la primera etapa, con capacitancia $C_{eq} = C(1 + K)$, mientras que la salida de la primera etapa tiene una resistencia equivalente $R_{eq} = R_o$, tal como se aprecia de la figura 27.

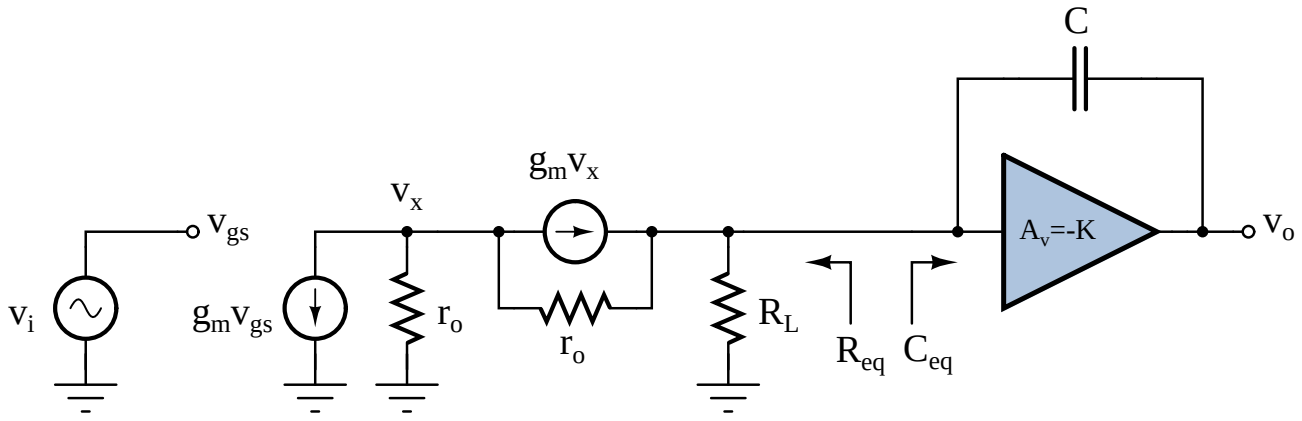


Figura 27: La constante de tiempo del circuito puede calcularse como la resistencia equivalente y la capacitancia equivalente vistas en el nodo de salida de la primera etapa.

Es posible visualizar el circuito anterior como el circuito equivalente de la figura 28.

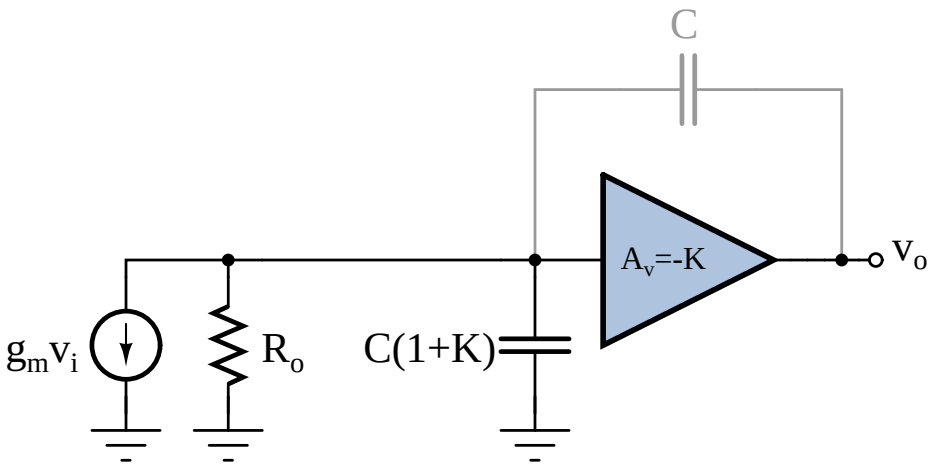


Figura 28: Circuito equivalente visto desde el nodo de salida de la primera etapa, donde se hace énfasis en la capacitancia amplificada por el efecto Miller.

Por inspección, la constante de tiempo es

$$\tau = R_o C(1 + K)$$

Reemplazando τ, G_m y R_o en (1.0.20), la respuesta al escalón del circuito es:

$$v_o = v_i \cdot \left[g_m \frac{1 + g_m r_o}{2 + g_m r_o} \right] \cdot \left[R_L \parallel (r_o (2 + g_m r_o)) \right] \cdot K \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{C(1+K) \cdot R_L \parallel (r_o(2+g_m r_o))}} \right)$$

16) A partir de los resultados del problema anterior, si evaluamos las expresiones en los valores numéricos entregados se obtiene:

$$A_{DC} = G_m R_o K = 16.612\,\text{kV/V}$$
$$\tau = R_o C(1+K) = 2.013\,\mu\text{s}$$

Existen muchas formas de comprobar estos valores con simulaciones en SPICE. Una forma de corroborar la ganancia del amplificador es realizar una simulación `.ac` y medir la ganancia a baja frecuencia. Existen diversas maneras de representar el circuito equivalente del amplificador en SPICE. Para realizar la simulación se utilizó el siguiente netlist:

```
Vi Vgs 0 PULSE(0 1m 0 1f) AC 1
G1 Vx 0 Vgs 0 'gm'; Fuente de corriente controlada
ro Vx 0 'ro'
ro2 N001 Vx 'ro'
G2 Vx N001 Vx 0 'gm'; Fuente de corriente controlada
RL N001 0 'RL'
E1 Vo 0 N001 0 '-K'; Fuente de voltaje controlada
C1 Vo N001 'C'
.param gm = 1m
.param ro = 100k
.param RL = 5Meg
.param C = 100f
.param K = 5

* Comandos para simulacion .ac
.ac dec 100 1e0 1e9
.MEAS AC Adc MAX mag(V(Vo)); Determina Adc
.MEAS AC BW WHEN mag(V(Vo))=Adc/sqrt(2); Determina BW

* Comandos para simulacion .tran
;tran 40u
;MEAS TRAN VF MAX V(Vo); Determina VF
;MEAS TRAN tau WHEN V(Vo)=0.632*VF; Determina tau

.backanno
.end
```

En la figura 29 se muestra un gráfico de la simulación `.ac`.

A partir de la simulación se obtiene que:

$$\begin{aligned} A_{DC} &= 84.4084\,\text{dB} \\ &= 16.612\,\text{kV/V} \end{aligned}$$

Esto coincide exactamente con el cálculo a mano. Además, tal como se esperaba a partir del análisis del problema 15), el diagrama de Bode del amplificador muestra que existe un solo polo introducido por el capacitor. Luego, es posible obtener la constante de tiempo midiendo la frecuencia de corte (caída de 3 dB respecto al valor de la pasabanda) en la simulación:

$$f_{-3\text{dB}} = 79.059\,\text{kHz}$$

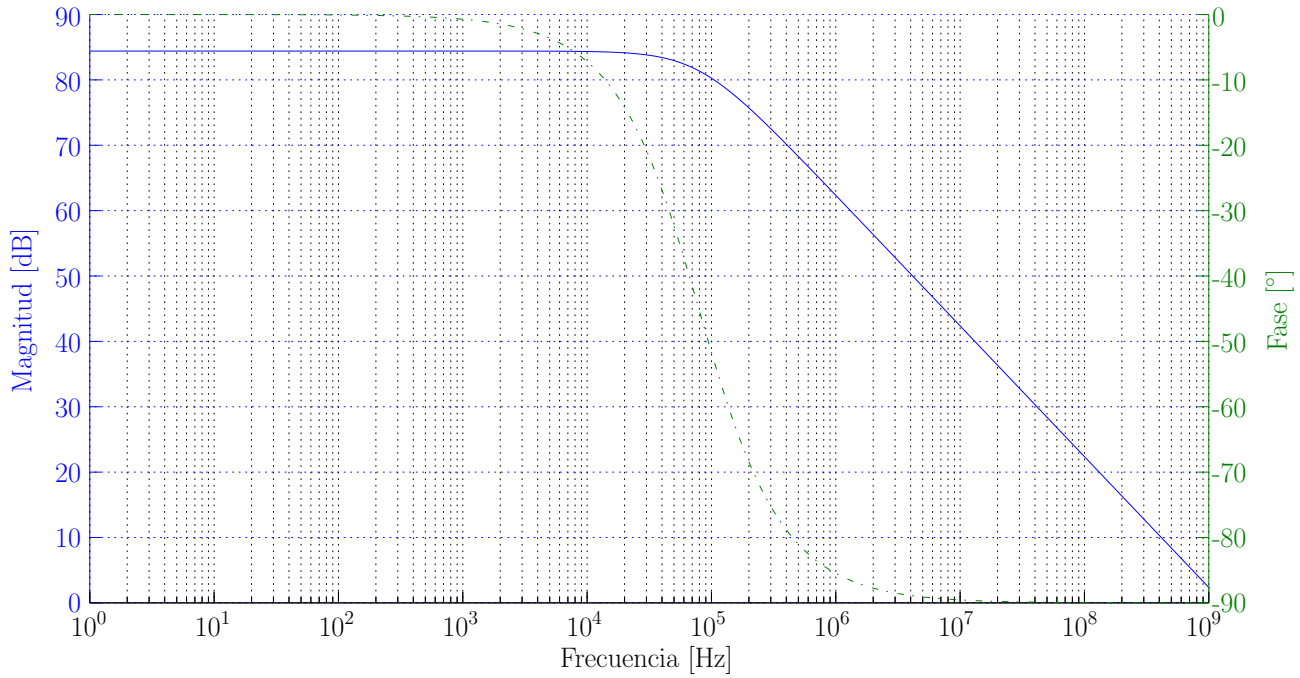


Figura 29: Simulación `.ac` para el amplificador de dos etapas.

$$\tau = \frac{1}{2\pi f_{-3\text{dB}}} = 2.013\,\mu\text{s}$$

Este resultado es exactamente igual al cálculo del problema 15), con lo que se comprueban los resultados obtenidos de manera analítica.

Otra forma de comprobar ambos valores es mediante una simulación `.tran`. Si se considera un escalón de $v_i = 1\,\text{mV}$ en la entrada entonces el valor final de v_o debe ser:

$$V_F = G_m R_o\, K\, v_i = 16.612\,\text{V}$$

Utilizamos el mismo netlist para simular, pero esta vez ejecutamos la simulación `.tran`. De la simulación se obtiene la respuesta al escalón de la figura 30

De la simulación transiente para $40\,\mu\text{s}$, tiempo tras el cual han transcurrido numerosas constantes de tiempo, se obtiene que el valor máximo de amplitud de salida, que diremos que corresponde a V_F, es $V_F = 16.621\,\text{V}$. Con este valor obtenemos que la ganancia es de $A_{DC} = 16.621\,\text{kV/V}$, muy cercano al valor calculado a mano.

Por otro lado, en la simulación se midió el tiempo para el cual el voltaje de salida corresponde a $v_o(\tau) = 0.632 \cdot V_F$, que es nuestra estimación de τ. Se obtuvo $\tau = 2.022\,\mu\text{s}$, muy cercano al valor obtenido de manera analítica. De esta manera, mediante dos simulaciones distintas, corroboramos los resultados obtenidos en el problema 15).

17) En sistemas de uno o más polos, si los polos se encuentran lo suficientemente separados unos de otros, se dice que el polo más cercano al origen domina y se le denomina **polo dominante**. En efecto, en aquellos sistemas que presentan un polo dominante, dicho polo define el ancho de banda y la velocidad (constante de tiempo) del sistema.

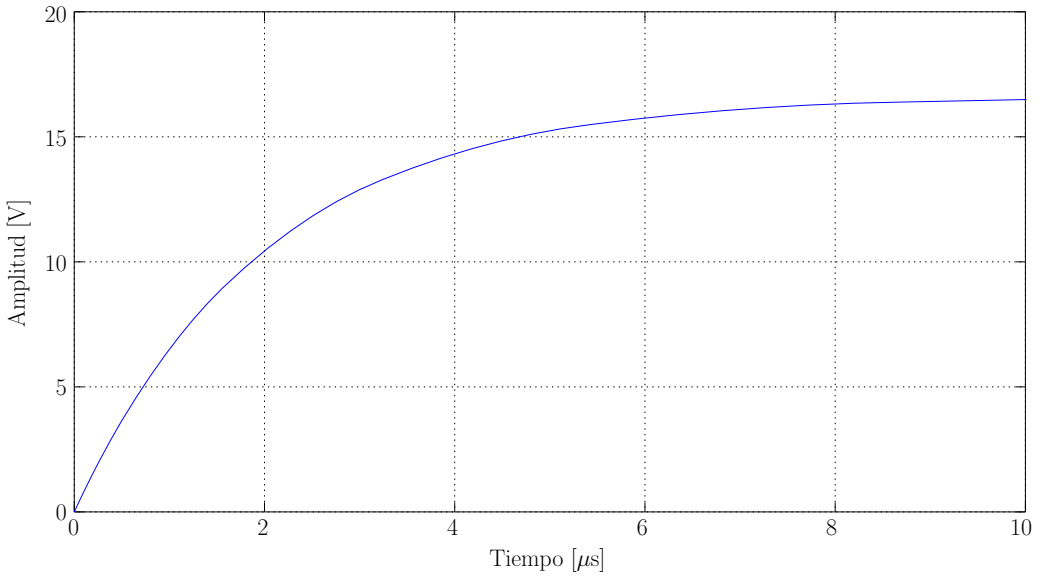


Figura 30: Simulación `.tran`. Respuesta al escalón del amplificador de dos etapas.

No siempre es válido decir que un sistema tiene un polo dominante. Por ejemplo, cuando existen múltiples polos en el mismo punto o son muy cercanos, la frecuencia de corte de $-3\,\text{dB}$ se desplaza y no es válido aproximar el ancho de banda del sistema como la frecuencia del polo más cercana al origen.

18) La función de transferencia con la que trabajaremos es:

$$H(j\omega) = A_v \left[\frac{j\frac{\omega}{\omega_0}}{j\frac{\omega}{\omega_0} + 1} \right]$$

Es posible agrupar los términos de la función de transferencia en tres grupos

$$H(j\omega) = \underbrace{\frac{A_v}{\omega_0}}_{\text{Constante}} \cdot \underbrace{j\omega}_{\text{Cero en el origen}} \cdot \underbrace{\frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}}_{\text{Polo simple en } \omega_0}$$

Los efectos de cada uno de estos factores se puede graficar de manera independiente, para luego sumarlos en un gráfico resultante. Tanto la fase como la magnitud (en escala logarítmica) son aditivas. En las figuras 31, 32 y 33 se muestran las asíntotas introducidas por cada factor de la función de transferencia.

El diagrama de Bode resultante corresponde a la adición de las curvas dibujadas. En la figura 34 se muestra el diagrama de Bode resultante de la función de transferencia.

Este diagrama de Bode representa una respuesta pasa-altos de primer orden genérica, con ganancia A_v en la pasabanda y frecuencia de corte ω_0. En esta respuesta se hizo el trabajo de separar la función de transferencia en partes más simples graficar cada factor por separado, sin embargo, para funciones de transferencia sencillas como esta es posible graficar directamente el diagrama de Bode.

19) Como el switch ha permanecido cerrado por mucho tiempo, el inductor se ha cargado y se encuentra actuando como cortocircuito. Por lo tanto, el voltaje de salida en estas condiciones es de $v_O = 0\,\text{V}$, mientras que la corriente que circula por el inductor es de $i_L = 1\,\text{mA}$, definida por el resistor de $1\,\text{k}\Omega$.

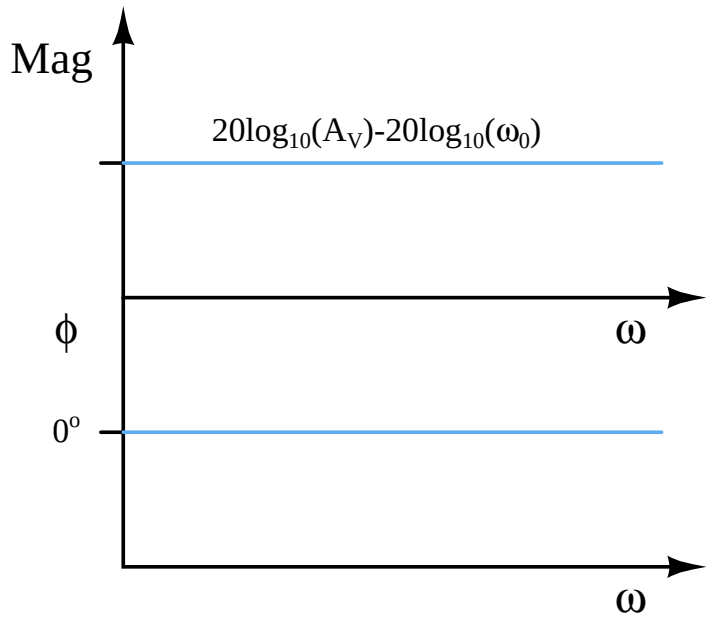


Figura 31: Asíntota definida por la constante en la función de transferencia.

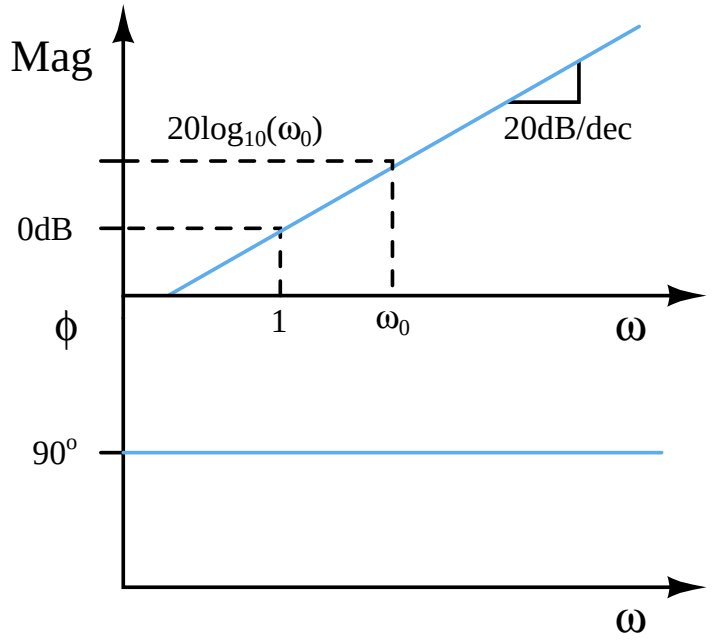


Figura 32: Asíntota definida por el cero en el origen en la función de transferencia.

Posterior a abrir el switch, el circuito resultante queda como el circuito de la figura 35.

Las condiciones iniciales del circuito son $v_O(0^-) = 0$ V e $i_L(0^-) = 1$ mA. El inductor se opone a cambios bruscos de corriente, por lo que, por continuidad, $i_L(0^+) = i_L(0^-)$ y entonces $i_L(0^+) = 1\,\text{mA}$. En estas condiciones, justo después de que se abre el switch, la corriente que circula hacia tierra por el inductor, circula desde tierra por el resistor de 1 MΩ. Como $v_O = -R \cdot i_L$, entonces

$$v_O(0^+) = -1000\,\text{V}$$

Para simular, se utilizó el siguiente netlist de SPICE

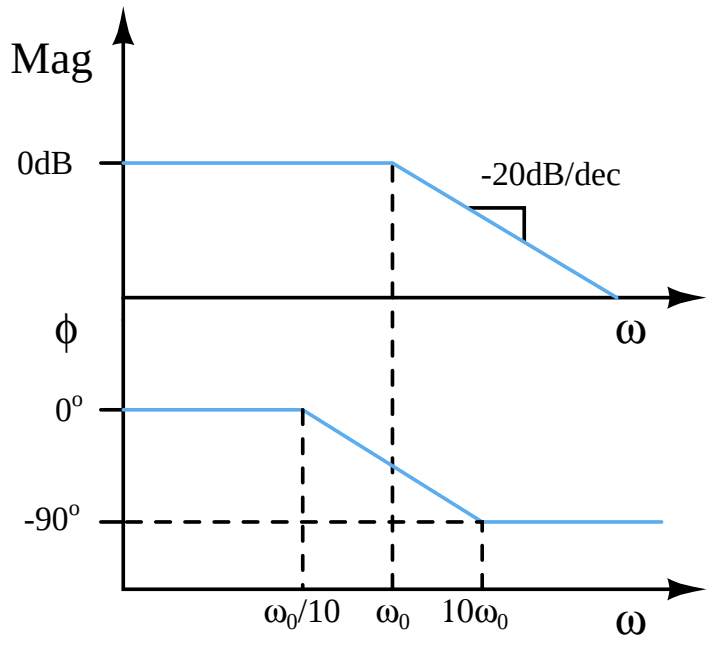


Figura 33: Asíntota definida por el polo en la función de transferencia.

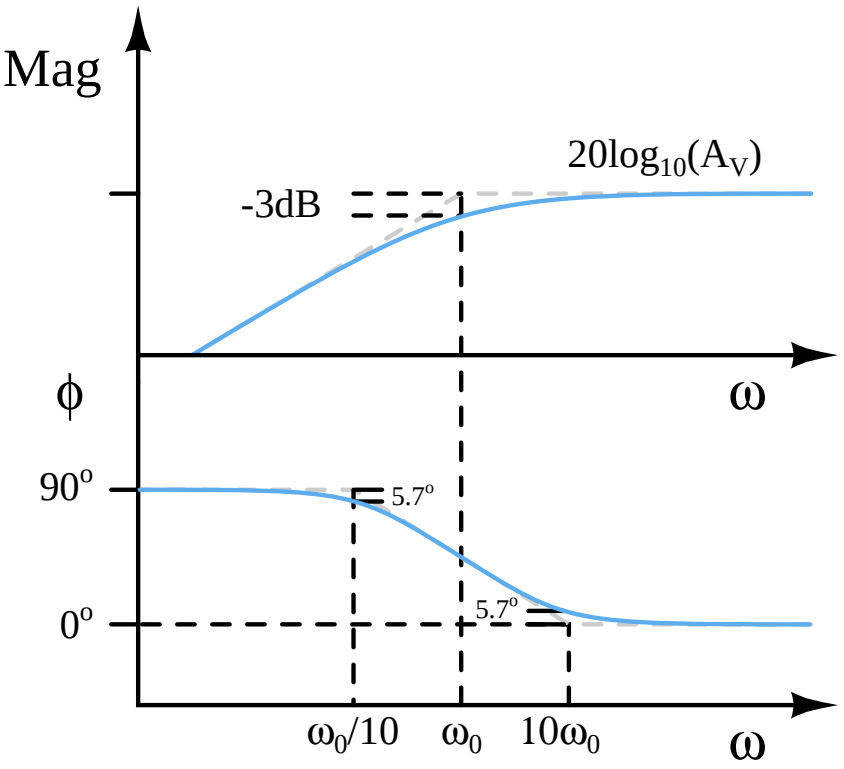


Figura 34: Diagrama de Bode de $H(j\omega)$.

```
* Circuito principal
Vin vi 0 1
R3 N001 vi 1k
XX1 clk N001 vo switch
```

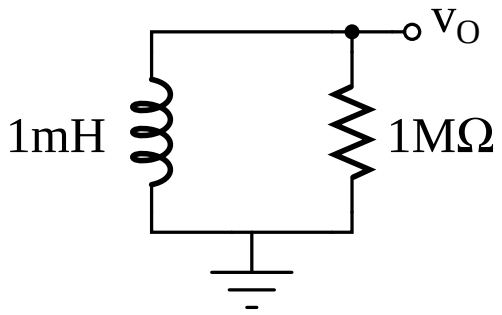


Figura 35: Circuito luego de que se abre el *switch*.

```
L1 vo 0 1mH
R1 0 vo 1Meg
Vclk clk 0 PULSE(1 -1 50n 1f 1f); Pulso que abre el switch

* Subcircuito: Switch
.subckt switch F A B
S1 A B F 0 MySwitch
.model MySwitch SW(Ron=.1 Roff=100Meg Vt=0)
.ends switch

.tran 0 100n 0 0.1n
.backanno
.end
```

El netlist muestra que se hizo una simulación transiente de 100 ns, con un switch inicialmente cerrado que se abre a los 50 ns. En la figura 36 se muestra el resultado de la simulación. Se observa que el valor peak (negativo) del voltaje de salida ocurre en los 50 ns, cuando el switch se abre. Este valor se encuentra muy cercano a los -1000 V, con lo que se confirman los resultados obtenidos de manera analítica.

20) (a) Es claro que el voltaje en el nodo de salida viene dado por

$$v_O = i_I \cdot Z_{eq}$$

Donde $Z_{eq} = R \| Z_C$, por lo tanto $H(s) = v_O/i_I = Z_{eq}$. Para obtener la función de transferencia debemos desarrollar el operador paralelo

$$\begin{aligned} Z_{eq} &= R \| Z_C \\ &= \frac{1}{\frac{1}{R} + sC} \\ &= \frac{R}{1 + sRC} \end{aligned}$$

Entonces, la función de transferencia del circuito viene dada por

$$H(s) = R \cdot \frac{1}{1 + sRC}$$

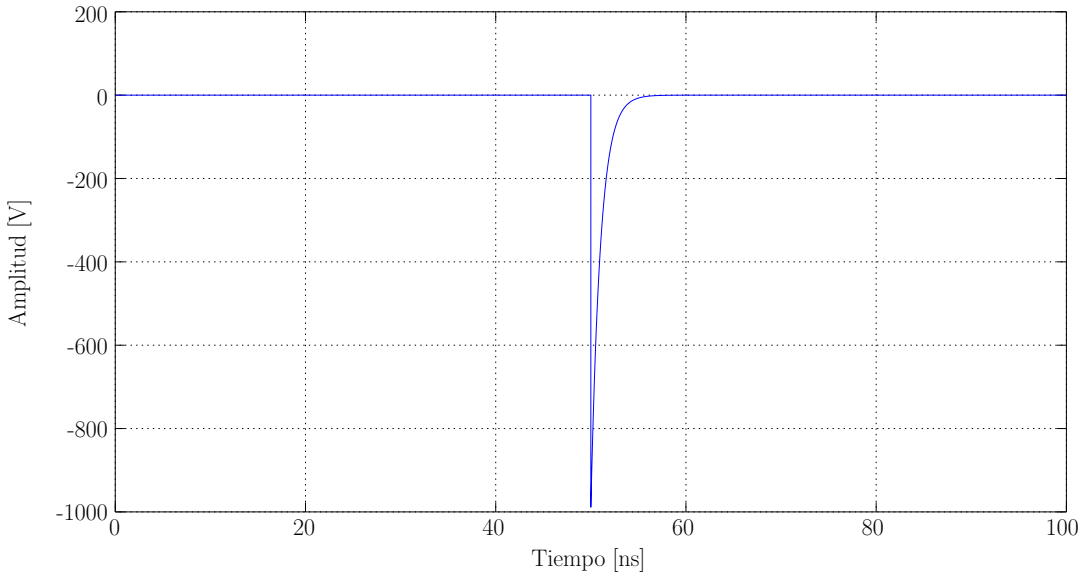


Figura 36: Simulación `.tran` para el circuito cuando ocurre conmutación.

(b) Para el régimen transitorio sabemos que la corriente en un capacitor viene dada por

$$i_C = C\frac{dv_C}{dt} \tag{1.0.21}$$

En el caso de nuestro circuito $v_C = v_O$. La corriente que circula por el capacitor es la diferencia entre la corriente de entrada y la corriente que circula por el resistor

$$i_C = i_I - \frac{v_O}{R} \tag{1.0.22}$$

Reemplazamos ahora i_C de (1.0.21) en (1.0.22) y planteamos la ecuación diferencial que define la salida del sistema:

$$\frac{dv_O}{dt} + \frac{v_O}{RC} - \frac{i_I}{C} = 0$$

Resolviendo la ecuación diferencial se obtiene:

$$v_O(t) = i_I \cdot R + K \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

Como en $t < 0$ la corriente es $i_I = 0$ y el capacitor se encuentra inicialmente descargado, la condición inicial va a ser $v_O(0) = 0$. A partir de esta condición inicial se despeja el valor de la constante K para obtener la solución:

$$v_O = i_I R\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) \tag{1.0.23}$$

(c) Para simular en SPICE se consideraron los valores de componentes $R = 10\,\text{k}\Omega$, $C = 10\,\mu\text{F}$ y una corriente de $i_i = 1\,\text{mA}$. El netlist utilizado para simular es el siguiente:

```
Ii 0 Vo 1m
R Vo 0 10k
C Vo 0 10u
.tran 1
.ic V(Vo)=0; Condición inicial
.backanno
.end
```

Ojo que para hacer la simulación transiente en SPICE, es necesario especificar la condición inicial del nodo de salida. En la figura 37 se muestran los resultados de la simulación, y se contrasta con el resultado de la ecuación (1.0.23).

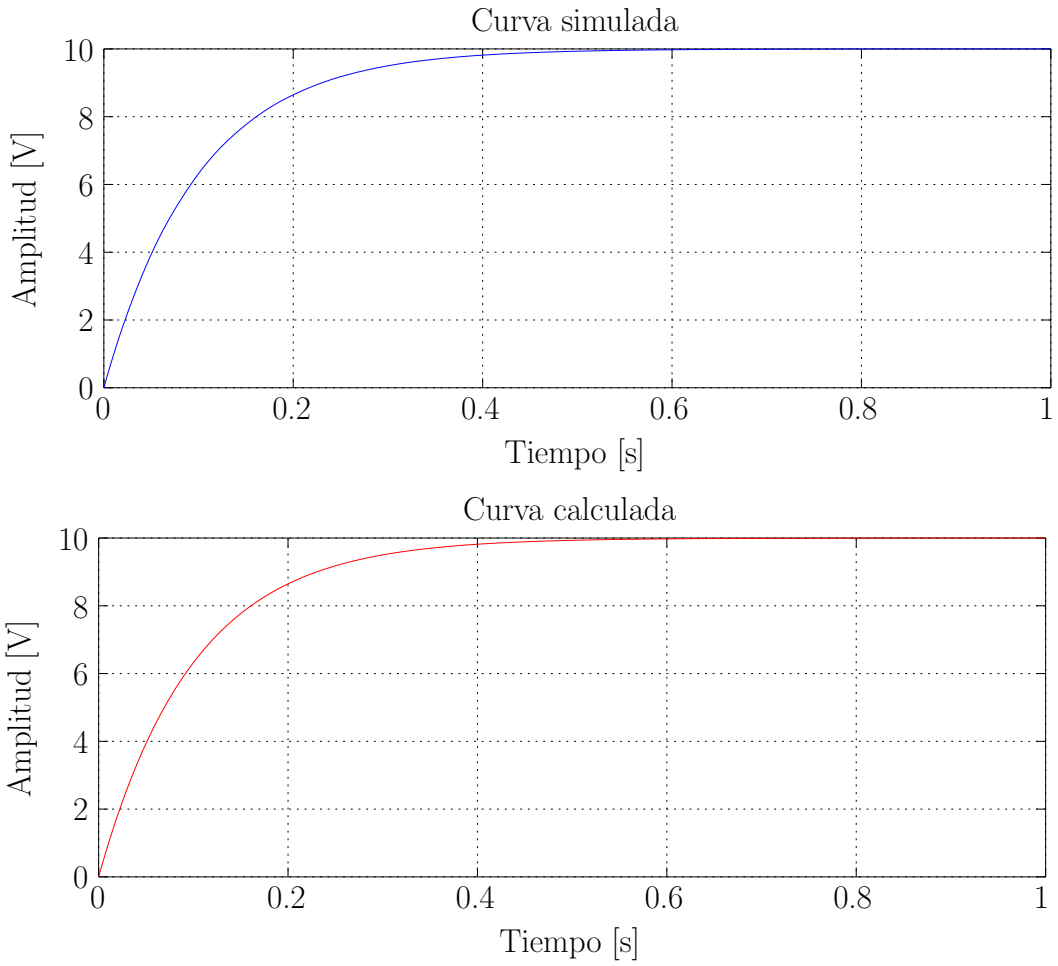


Figura 37: Comparación de resultado analítico vs. simulación para el integrador con pérdidas.

De los gráficos se observa que el voltaje de salida sube a medida que el capacitor integra la corriente de entrada, pero eventualmente satura en un valor definido por el resistor, razón por la que el circuito se denomina integrador con pérdidas. Si es que no existiera dicho resistor, el capacitor integraría corriente indiscriminadamente y el voltaje de salida subiría con pendiente constante a medida que pasa el tiempo.