Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Eléctrica
IEE2213 - Máquinas Eléctricas
Segundo Semestre de 2021

Interrogación 01

Electromagnetismo y Transformadores

27 de Septiembre de 2021

Nombre: _____ RUN: _____

Indicaciones Generales

1. Solo podrá tener sus lápices, goma, corrector en su escritorio (o algún otro elemento de apoyo de esa índole (regla , escuadra transportador, etc)).
2. No utilice hojas adicionales para el desarrollo de su prueba. Se le proveerá de hojas suficientes para el desarrollo.
3. No utilice formularios adicionales.
4. Puede utilizar una calculadora de tipo NO PROGRAMABLE.
5. No se permite el uso del celular, ni ningún otro dispositivo electrónico durante la prueba (tablet, reloj inteligente, etc). La hora, y el tiempo restante de la prueba, serán proyectados en la sala.
6. Antes de comenzar la prueba apague su teléfono celular y déjelo en su bolso o mochila (no en el bolsillo).
7. La prueba consta de una primera parte teórica, y una segunda parte de ejercicios. Ambas partes serán podrán ser resueltas de forma libre por el estudiante durante todo el tiempo que dure la interrogación. El puntaje total es de 60 puntos.
8. Responda de forma ordenada y **solo en las hojas de desarrollo**. Las hojas de enunciado no serán corregidas.
9. La escala de evaluación es del 60 % con nota entre $1.0 - 7.0$ en función del puntaje obtenido.
10. La prueba tiene una duración de 150 minutos.

1. Sección Teórica (24 Puntos)

Argumente con la información técnica que permita validar su respuesta y su cocimiento en la temática.

1. Considere el diagrama de la figura, donde una batería tiene sus terminales cortocircuitados mediante dos espiras de cobre y está posicionado sobre un imán permanente (la batería y el imán no se tocan). Dibuje la dirección y sentido de las corrientes eléctricas, campos magnéticos y fuerzas que se generan en cada uno de los trozos de conductor eléctrico. Adicionalmente, indique si existirá un sentido de giro para el conductor que conecta la batería, qué sentido tiene y bajo que ley y/o ecuaciones podemos justificar dicho movimiento.

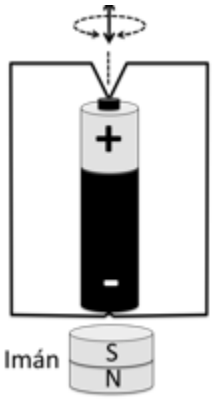


Figura 1: Circuito para pregunta 1.

2. En el siguiente circuito siguiente se tienen dos bobinas enrolladas en el mismo sentido sobre un material ferromagnético. Considere que:

   - La bobina 1 se alimenta con una tensión DC, produciendo una corriente DC en estado estacionario.
   - Se conecta un medidor de voltaje en la bobina 2.

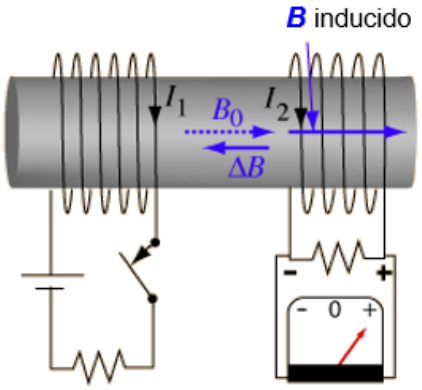


Figura 2: Circuito para pregunta 2.

Analice:

- Cuál será la tensión inducida en la bobina 2 bajo los supuestos indicados. Escriba una explicación teórica para su respuesta que esté justificada mediante ecuaciones.
- Considere que el interruptor asociado a la bobina 1 se abre repentinamente. Describa cual será la lectura que se verá en el medidor de voltaje conectado en la bobina 2. Además, grafique esquemáticamente como será la corriente por la bobina 1 y la bobina 2. Escriba una explicación teórica para su respuesta que esté justificada mediante ecuaciones.
- Considere que el interruptor de la bobina 1 se cierra. Describa cual será la lectura que se verá en el medidor de voltaje conectado en la bobina 2. Además, grafique esquemáticamente como será la corriente por la bobina 1 y la bobina 2. Escriba una explicación teórica para su respuesta que esté justificada mediante ecuaciones.

3. Considere que tiene un capacitor conectado a una fuente alterna tal com ose muestra en la figura:

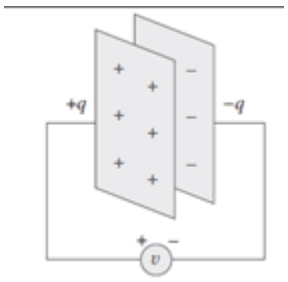


Figura 3: Circuito para pregunta 3.

Formule la ley generalizada de Ampere y explique cada uno de sus términos en base a la figura anterior. Explique claramente que significa la corriente de desplazamiento y bajo que condiciones dicho término puede ser despreciado.

4. Mediante la ley de Hopkinson, es posible definir un circuito equivalente eléctrico para cada uno de los parámetros del circuito magnético de la siguiente figura. Determine el parámetro eléctrico equivalente para:

$\Im$	*f.m.m.*	*[A-vuelta]*
B	**densidad de flujo**	**[T]**
μ	permeabilidad	[H/m]
H	**campo magnético [Av/m]**	
Φ	flujo magnético	[Wb]
U	potencial magnético	[A-vuelta]

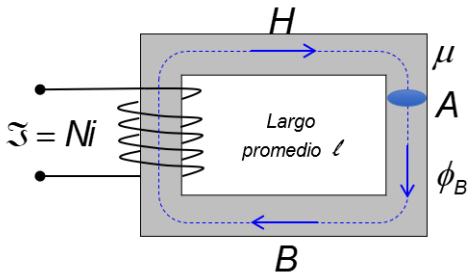


Figura 4: Circuito para pregunta 4.

5. Dibuje la curva de saturación típica de un material ferromagnético y muestre cómo esta es responsable de generar un tercer armónico cuando trabajamos con circuitos magnéticos. Adicionalmente, identifique el codo de la curva de saturación y las pérdidas por histéresis.

6. Utilizando las ecuaciones de Maxwell, demuestre que en un transformador ideal, la sección transversal requerida para el núcleo ferromagnético es inversamente proporcional a la frecuencia utilizada.

7. Dibuje el circuito equivalente completo de un transformador monofásico. Explique claramente que representa físicamente cada uno de sus parámetros. Dibuje un transformador monofásico e indique claramente los flujos asociados a las inductancias de magnetización y dispersión.

8. Utilizando el circuito equivalente aproximado de un transformador monofásico, dibuje el diagrama fasorial que permita obtener la regulación de tensión del transformador considerando que tiene una carga resistiva-capacitiva. (utilice solo parámetros).

9. Demuestre mediante ecuaciones que un autotransformador (elevador o reductor) puede manejar una potencia superior en comparación a un transformador monofásico equivalente.

10. Explique mediante gráficos y ecuaciones, qué es la corriente de inrush y cuándo y qué condición se debe cumplir para eliminar esta corriente.

11. Considere que tiene un transformador trifásico con:

    - Una conexión de tipo YY0 (sin neutro conectado a tierra), explique si existirá corrientes y/o voltajes distorsionados en alguno de sus enrollados.
    - Una conexión de tipo YtY0 (neutro del primario conectado a tierra), explique si existirá corrientes y/o voltajes distorsionados en alguno de sus enrollados.

12. Ud. desea conectar en paralelo dos transformadores trifásicos. Uno en conexión DY1 y otro en conexión YD9.

    - Dibuje el circuito de conexión que deben tener estos transformadores para poder conectarlos en paralelo (no dibuje circuitos equivalentes del transformador, solo una caja).
    - Determine la relación de vueltas N1/N2 que debe tener cada transformador para poder realizar la conexión en paralelo.

2. Sección Teórica (24 Puntos)

Argumente con la información técnica que permita validar su respuesta y su cocimiento en la temática.

1. En base a la configuración del circuito (ver Fig. 5) es posible determinar la fuerza total aplicada en el conductor, en base a la Fuerza de Lorentz, como se indica en (1).

$$\vec{F} = \int i \cdot d\vec{l} \times \vec{B} \tag{1}$$

   En consecuencia, en función del sentido de flujo de la corriente y de la orientación del campo magnético formado por el imán, el vector de fuerza en la espira derecha apunta hacia el interior del plano y en la espira izquierda hacia fuera del plano. El sentido de las espiras, al observarlo directamente desde la perspectiva superior de la figura, es antihorario (la espira izquierda irá hacia la zona frontal de la batería y la espira derecha a la zona posterior).

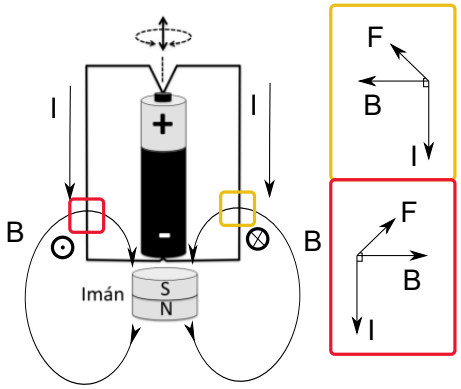


Figura 5: Respuesta para pregunta 1.

2. En la Fig. 6, se muestra el perfil de operación del circuito. En el gráfico superior se muestra la tensión y corriente en el bobinado 1, en donde se ha medido la tensión en el extremo en donde entra la corriente al bobinado. En el gráfico central se muestra

el flujo magnético (ϕ) y su derivada ($\frac{d\phi}{dt}$). En el gráfico inferior, se muestra la tensión y corriente en el bobinado 2, ambas mediciones se realizan en función del esquema. Las tensiones, corrientes y flujo se encuentran expresados en Volts, Amperes y Weber, respectivamente.

El fenómeno presente en el circuito puede ser descrito mediante la Ley de Faraday-Lenz, la cual se expresa en (2) considerando un enrollado de N vueltas.

$$e = -N\frac{d\phi}{dt} \tag{2}$$

- En el primer caso, dado que el bobinado se encuentra energizado en estado estacionario la corriente en el bobinado es constante y también lo es el flujo, por lo tanto, la variación del flujo es nula y, en consecuencia, la tensión inducida en ambos devanados producto de la inducción. En la Fig. 2, se observa que siempre que el flujo alcanza un valor constante, la tensión en ambos devanados es nula.
- En el caso de desenergizar el circuito de la bobina 1, la corriente cae abruptamente y el flujo magnético varía desde su valor en estado estacionario hasta el valor cero. La variación de flujo es negativa y, por consiguiente, la tensión inducida en el segundo bobinado es positiva y tiene la misma forma que la variación de flujo (ver (2)). En el bobinado 1 se produce exactamente el mismo efecto, pero la medición de voltaje se efectúa con polaridad invertida a la bobina 2, por lo tanto no se manifiesta la inversión de signo que presenta la Ley de Faraday. Importante notar entonces, que las mediciones pueden influir en la forma en la que interpretamos la información de los fenómenos físicos y eléctricos.
- En el caso de cerrar nuevamente el interruptor, la corriente comenzará a aumentar en el bobinado 1, produciendo un aumento del flujo magnético. En consecuencia la variación del flujo es positiva y, por ende, la tensión observada en el bobinado 2 es negativa.

  La forma de onda de la corriente eléctrica presenta la respuesta de un sistema de primer orden debido a que el circuito está compuesto por un inductor y una resistencia en ambos devanados. Para el bobinado 2 se ha considerado una resistencia en la cual se efectúa la medición de tensión. En consecuencia, el flujo magnético presentará la misma forma de onda de la corriente (al no considerar efectos de saturación) y su derivada (derivada de una función exponencial) también lo es. El único instante en donde la corriente no presenta un comportamiento exponencial es cuando el interruptor, al ser abierto, fuerza un cambio abrupto en ella. Notar que a pesar de eso, el flujo sigue siendo exponencial, en dicho instante de variación, dado que responde al circuito magnético del núcleo en donde se ha considerado una resistencia magnética o reluctancia.

3. La Ley de Ampere-Maxwell, en (3), indica que el flujo magnético, expresado como densidad de flujo magnético ($\vec{B}$), además de ser producido mediante la corriente circu-

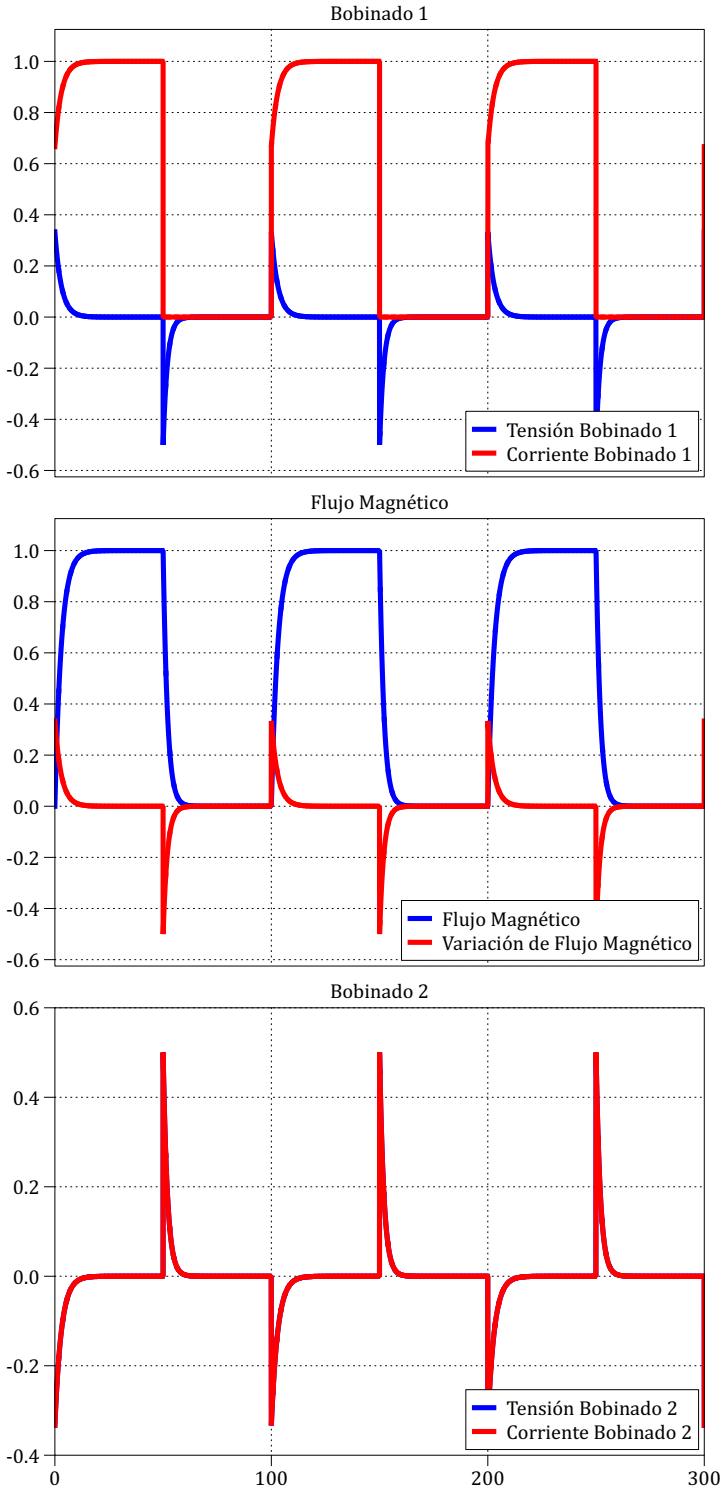


Figura 6: Respuesta para pregunta 2.

lando en un conductor, expresado como densidad de corriente ($\vec{J}$), es generado por la variación en el flujo eléctrico ($\phi_E = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$). $\varepsilon_0 = 8.854$ F/m y $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Tm/A son la permitividad y permeabilidad del vacío.

$$\int_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\delta}{\delta t} \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \tag{3}$$

El primer término de la derecha ($\int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$) corresponde a la corriente de conducción (I en la figura) y el segundo término ($\varepsilon_0 \frac{\delta}{\delta t} \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$) corresponde a la corriente de desplazamiento. Este término fue incluido por Maxwell, dado que él notó que la Ley de Ampere no se encontraba completa para todos los casos, como el presente en este ejercicio.

Para el esquema de la Fig. 7, cuando se utiliza la superficie cerrada descrita por la circunferencia de radio R, el flujo magnético solo es producido por la corriente que circula a través del conductor (I), debido a que el flujo eléctrico está reducido a la superficie del conductor eléctrico y por ende, puede ser despreciado, dado el valor de ε_0 y dado el radio reducido del conductor en relación al radio de integración. En dicho caso, (3) puede ser escrito como (4), expresión que corresponde a una consecuencia de la Ley de Ampere para el circuito de la figura.

$$\int_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \tag{4}$$

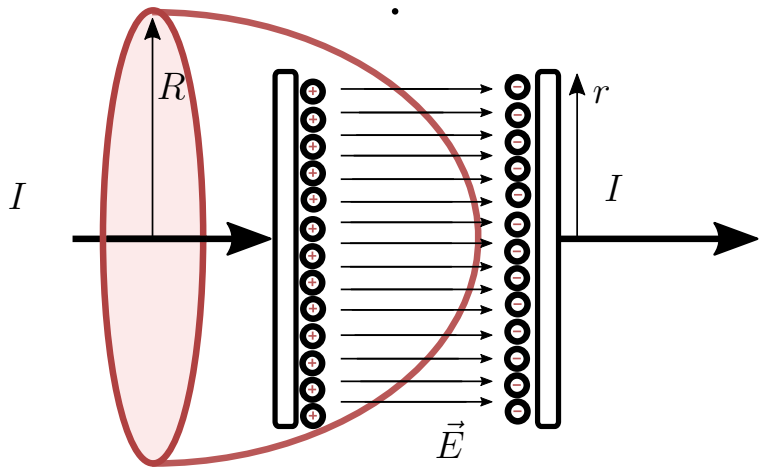


Figura 7: Respuesta para pregunta 3.

Cuando se utiliza la superficie holgada que se encuentra dentro del capacitor, no existe una corriente I, por lo tanto, en dicho caso el factor asociado al campo eléctrico ($\vec{E}$) toma importancia. Si la superficie holgada logra cubrir toda la superficie dentro de las

dos placas del capacitor, la expresión (3) puede ser reescrita como (5). El resultado es equivalente a (4), pero su origen es distinto. En el primer caso, el campo magnético fue producido por la corriente eléctrica en el conductor y en el segundo por el cambio de carga (Q) en el capacitor. Notar que, cuando el capacitor se cargue ya no existirá variación de carga y tampoco corriente en el circuito.

$$\int_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\delta}{\delta t} \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \phi_E = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \frac{Q}{\varepsilon_0} = \mu_0 I \tag{5}$$

4. Mediante la Ley de Hopkinson, es posible definir un circuito equivalente eléctrico para cada uno de los parámetros del circuito magnético como se muestra en la Fig. 8.

Circuito Eléctrico			Circuito Magnético		
e	f.e.m.	[V]	$\Im$	f.m.m.	[A-vuelta]
J	densidad de corriente	[A/m]	**B**	densidad de flujo	[T]
σ	conductividad	[S/m]	μ	permeabilidad	[H/m]
E	campo eléctrico	[V/m]	**H**	campo magnético	[Av/m]
i	corriente eléctrica	[A]	Φ	flujo magnético	[Wb]
V	potencial eléctrico	[V]	U	potencial magnético	[A-vuelta]

Figura 8: Respuesta para pregunta 4.

5. En la Fig. 9(a), se muestra una respuesta típica de un material ferromagnético, en el cual la relación entre ϕ e I no es lineal, esto como consecuencia de la no linealidad entre B y H en el material. Esta no linealidad es producida por la variación de la permeabilidad del material en función de la intensidad de flujo magnético y, en consecuencia, de la corriente que circula por el material. Además, otro factor que influye en ello es la temperatura de operación.

   En la Fig. 9, se muestra cómo se mapea la corriente en un enrollado con núcleo ferromagnético, a partir de un flujo sinusoidal, producido por una tensión sinusoidal, a través de la curva de histéresis simplificada. Cuando se considera una curva de histéresis tradicional como la presentada en la Fig. 9(b), la distorsión en la corriente ya no es simétrica como en el caso anterior.

   Se identifica el codo de saturación (línea punteada en Fig. 9(b)) el cual corresponde al punto óptimo de operación del material ferromagnético debido a que en dicho punto se aprovechan al máximo las características del material sin incurrir en la saturación y sin dejar capacidad magnética libre en la zona con más linealidad de la curva.

   Sin embargo, en Fig. 9(b), existen pérdidas por histéresis. En la figura, el área roja más el área verde representan la energía magnética que es almacenada en el material

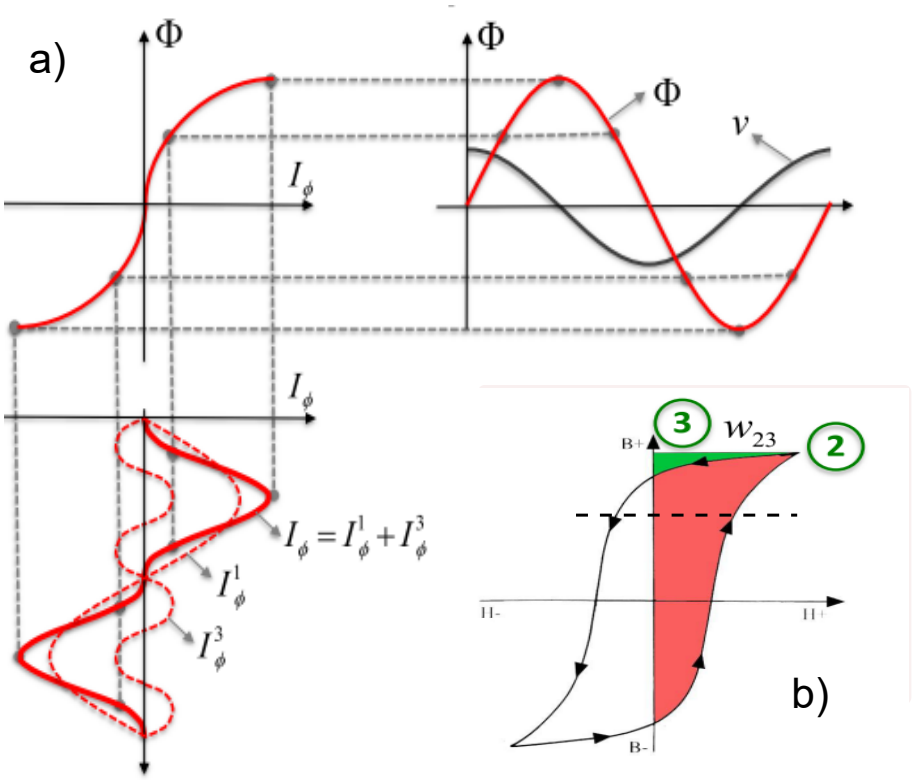


Figura 9: Respuesta para pregunta 5.

hasta llegar al punto de operación denotado por (2), mas cuando se retorna a través del ciclo de histéresis, solo el área verde es retornada al circuito eléctrico.

6. Considerando el esquema de la Fig. 10, se debe establecer la Ley de Faraday-Lenz como se indica en (6) ambos devanados.

$$\begin{aligned} e_1 &= N_1 \frac{d\phi}{dt} \\ e_2 &= N_2 \frac{d\phi}{dt} \end{aligned} \tag{6}$$

Notar que en la expresión (6), no existe signo negativo. Esto se debe a que, mediante el postulado de la Ley de Lorentz, la fuerza electromotriz (e_1) está en oposición a la tensión que fuerza el flujo en el núcleo y por lo tanto, utilizando la Ley de voltajes de Kirchhoff, $V_1 = e_1$. El signo negativo estará presente si esta fem (e_1) es referenciada con su terminal positivo en donde la corriente I_1 sale del devanado 1. Lo mismo sucede para el devanado 2.

A partir de ambas expresiones en (6), se puede obtener la relación entre las tensiones inducidas en ambos devanados como se indica en (7).

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{e_1}{e_2} = \frac{N_1}{N_2} = a \tag{7}$$

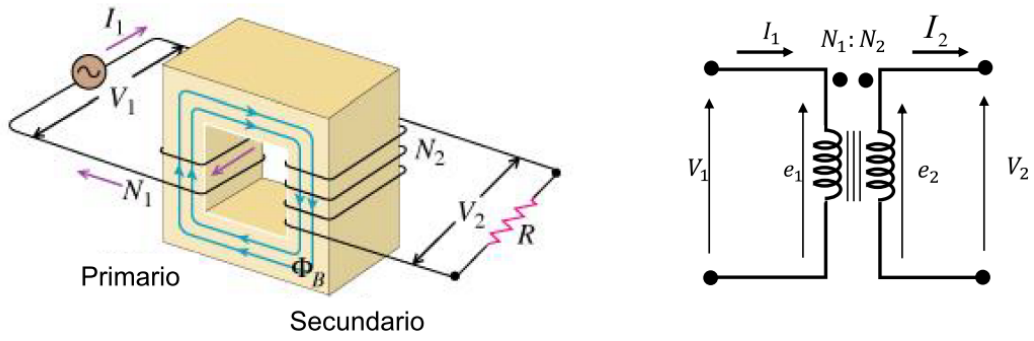


Figura 10: Respuesta para pregunta 6.

Mediante la Ley de Ampere, se establece un camino cerrado a lo largo del núcleo del transformador, esto resulta en (8). Dado que se trata de un núcleo ideal la permeabilidad del material es infinita y, por ello, la Ley de Ampere resulta en cero. Despejando (8) se obtiene (9).

$$\int_C \vec{H} d\vec{l} = N_1 i_1 - N_2 i_2 = \Re\phi = \frac{l}{\mu A}\phi = 0 \tag{8}$$

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{1}{a} \tag{9}$$

Así, si se tiene un flujo sinusoidal, como el descrito en (10), entonces es posible obtener la fem del devanado 1 y del devanado 2. Considerando el devanado 1 a modo de ejemplo, se obtiene la expresión de (11), teniendo en cuenta que $\phi = B \cdot A$, siendo A el área transversal del núcleo.

$$\phi(t) = \phi_{Max} \sin(2\pi \cdot f \cdot t) \tag{10}$$

$$E_{1,rms} = \frac{N_1 \phi_{Max} \cdot 2\pi \cdot f}{\sqrt{2}} = \frac{N_1 B_{Max} A \cdot 2\pi \cdot f}{\sqrt{2}} \tag{11}$$

De la expresión (11), se deduce que, para la obtención de la misma tensión RMS, dado un valor de densidad de flujo (B_{Max}), la sección transversal requerida es inversamente proporcional a la frecuencia. Esto se muestra en (12).

$$A = \frac{\sqrt{2} E_{1,rms}}{N_1 B_{Max} \cdot 2\pi \cdot f} \tag{12}$$

7. El circuito general de un transformador monofásico es el que se muestra en la Fig. 11. Las bobinas L_1 y L_2 son las inductancias de dispersión y representan la razón de cambio entre el flujo de fuga, el cual se cierra por caminos distintos al patrón de conducción magnética que enlaza ambos devanados, y la corriente en los devanados. Las resistencias R_1 y R_2, representan las pérdidas en el cobre de los enrollados.

   La resistencia R_p corresponde a la representación de las pérdidas en el núcleo, las cuales son producidas por el ciclo de histéresis y por las corrientes de Eddy. Al no considerar un núcleo ideal, existe una componente adicional que representa la corriente de magnetización para establecer el flujo de enlace en transformador. Esta representación se efectúa mediante la impedancia de magnetización L_m.

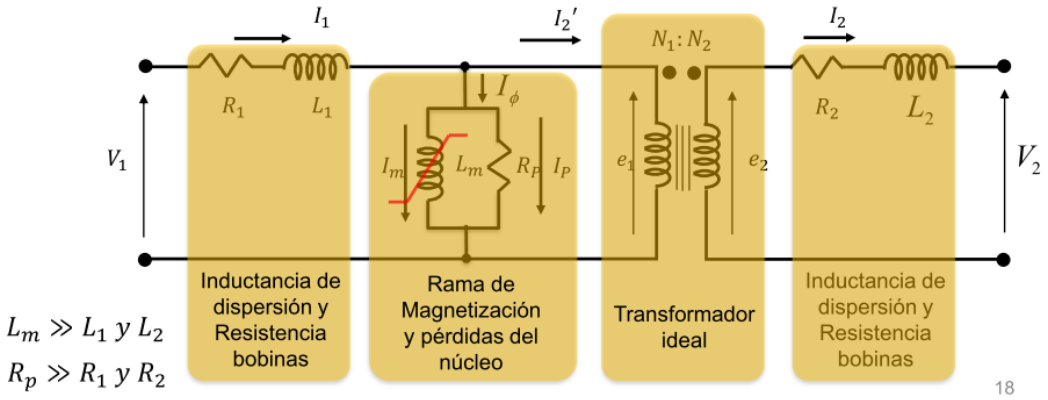


Figura 11: Respuesta para pregunta 7.

Los flujos asociados a inductancia de magnetización (L_m) corresponde al flujo mutuo (ϕ) y el flujo correspondiente a las inductancias de dispersión L_1 y L_2 corresponde al flujo de fuga ϕ_{L1} y ϕ_{L2}, respectivamente, en la Fig. 12.

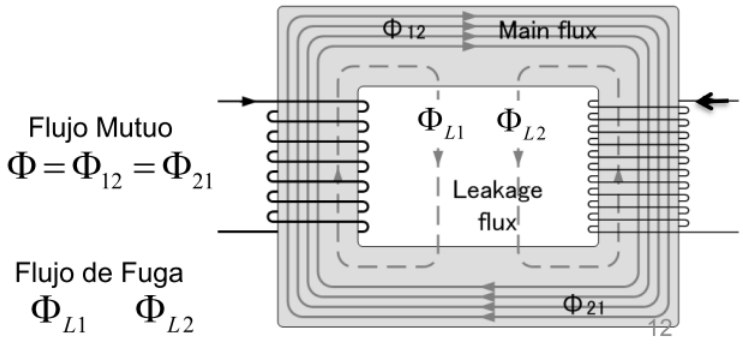


Figura 12: Respuesta para pregunta 7.

8. Para este caso, se procede a dibujar el diagrama fasorial referido al primario como se indica en la Fig. (13). Se ha despreciado la rama de magnetización dado que no es requerida para la obtención de la regulación de tensión. En la Fig. (13)(a) se muestra el diagrama para una carga con factor de potencia capacitivo y en la Fig. (13)(b) se realiza para un factor de potencia inductivo. En general, para el primer caso, la tensión del secundario referida al primario presenta una magnitud de tensión mayor, mientras que en el segundo esta es menor.

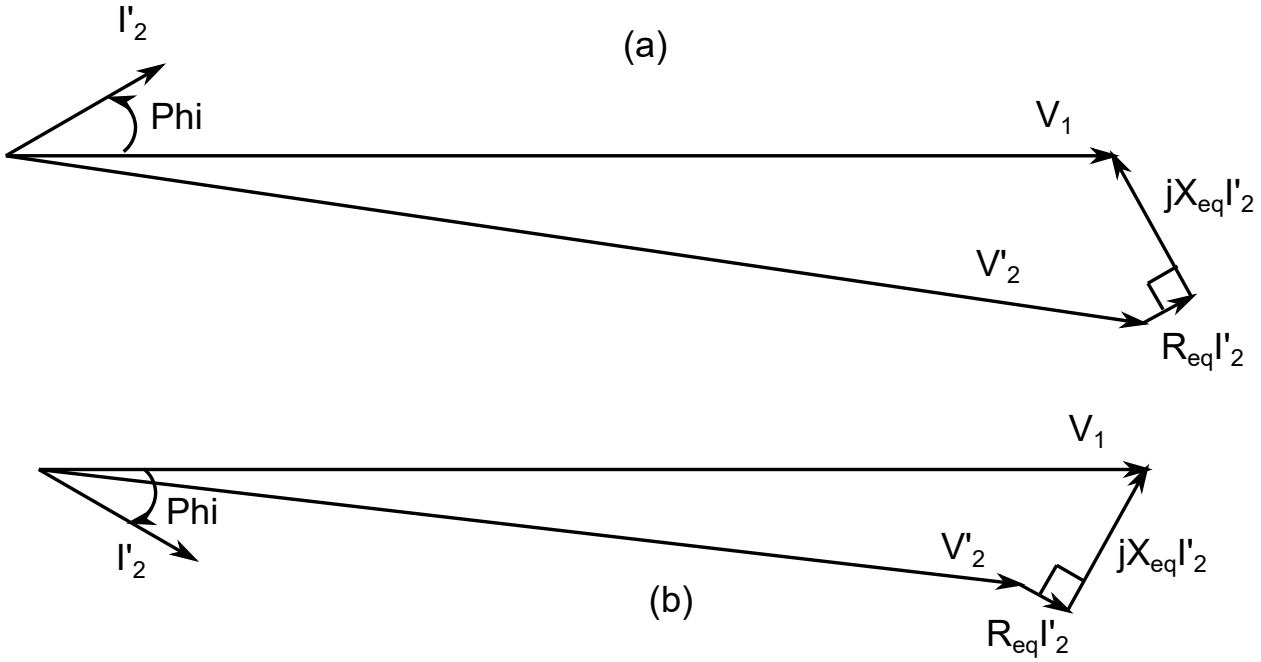


Figura 13: Respuesta para pregunta 8.

9. En base a la Fig. 14, es posible determinar la potencia del autotransformador, del transformador y su razón como se indica en (13), siendo $a' = a + 1$.

$$\begin{aligned} S_{Auto} &= (V_1 + V_2)I_1 = V_2(I_1 + I_2) \\ S_{Trafo} &= V_1 I_1 = V_2 I_2 \\ \frac{S_{Auto}}{S_{Trafo}} &= \frac{(V_1 + V_2)I_1}{V_1 I_1} = \frac{(V_1 + V_2)}{V_1} = 1 + \frac{1}{a} = 1 + \frac{1}{a' - 1} \end{aligned} \tag{13}$$

Si $0 < a' < 1$, entonces la potencia del autotransformador es menor, si $a' > 1$ entonces la potencia del autoransformador es mayor. Si $a' >>> 1$, las potencias son iguales. El caso $a' = 1$ no tiene significado dado que implica $a = 0$.

10. El flujo producido en el momento de la conexión de un transformador a la red eléctrica depende del valor inicial que presenta la tensión en el instante de conexión, esto se

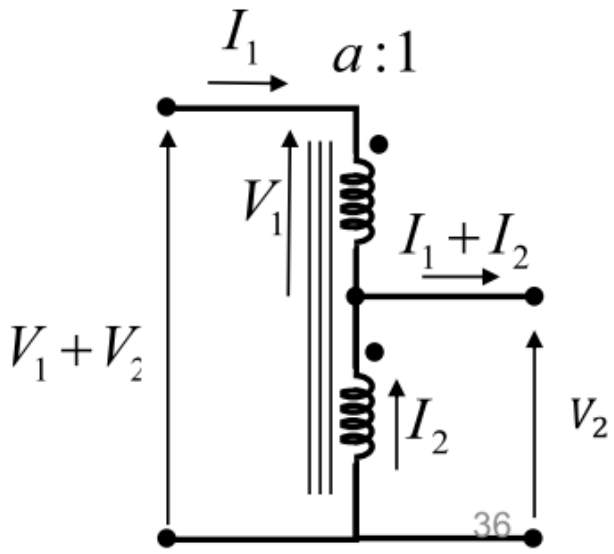


Figura 14: Respuesta para pregunta 9.

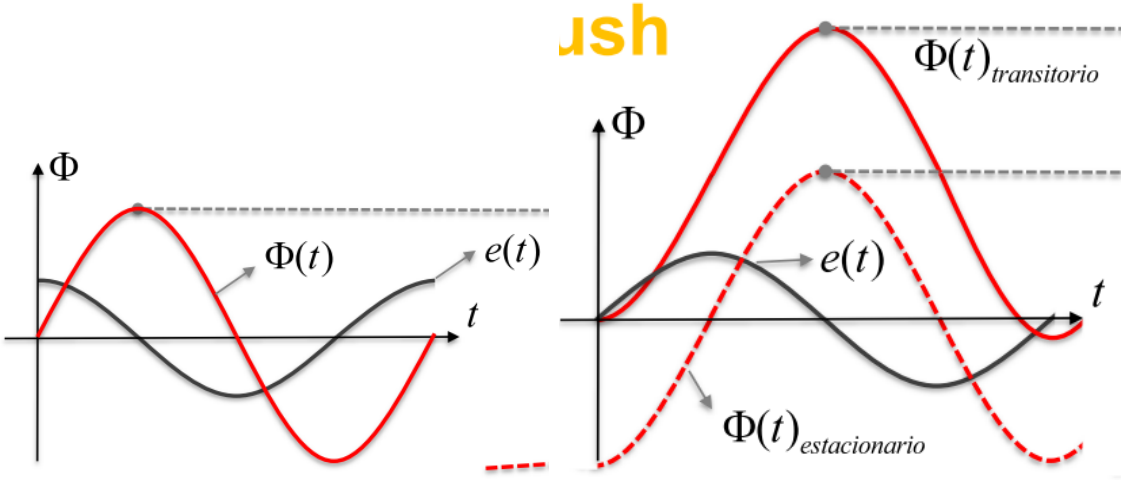


Figura 15: Respuesta para pregunta 10.

retrata en la Fig. 15 gráficamente y en (14) de forma matemática, teniendo en cuenta que $\lambda(0) = 0$.

$$\begin{aligned} \lambda = N\phi = \lambda_0 + \int V_1(t)dt \\ \lambda_{Ideal} = \lambda_0 + \frac{V_m}{\omega}\sin(\omega t) = \lambda_m \sin(\omega t) \iff V_1(t) = V_m \cos(\omega t) \\ \lambda_{Critico} = \lambda_0 - \frac{V_m}{\omega}\cos(\omega t) = \lambda_m[1-\cos(\omega t)] \iff V_1(t) = V_m \sin(\omega t) \end{aligned} \tag{14}$$

Como se logra observar, cuando el voltaje aplicado está en su máximo, el flujo parte desde cero describiendo una función seno y la corriente es mapeada desde el flujo de forma normal a través de la curva de histéresis. Cuando el voltaje aplicado está en cero en el instante inicial, el flujo alcanza un valor máximo de $2\lambda_m$ durante el instante inicial para luego decaer. Dado que el flujo presenta un valor mayor, al momento de se mapeadas las corrientes en función del flujo, estas alcanza un valor mayor a la corriente nominal, la cual puede ser perjudicial para la unidad.

11. Para cada caso se tendrá:

    - Debido a que no existe camino de libre circulación para la corriente del tercer armónico esta no puede existir y, en consecuencia, las tensiones inducidas en el secundario y el flujo son distorsionados en compensación.
    - Dado que existe un camino para la circulación de la corriente de tercer armónico, está estará presente en las corrientes de línea del primario, mas las tensiones del secundario y el flujo son sinusoidales.

12. Para efectuar la conexión se debe cumplir que:

    - El terminal x_1, x_2 y x_3 del transformador Dy_1 debe ser conectado al terminal x_2, x_3 y x_1 del transformador Yd_9, respectivamente.
    - Además, ambos transformadores deben presentar la misma razón de transformación trifásica a. En el transformador Dy_1 se cumple que $a = \frac{N_1}{\sqrt{3}N_2}$, mientras que en el transformador Yd_9 se tiene $a = \frac{\sqrt{3}N_1}{N_2}$.

3. Problema 1 (12 puntos)

El circuito magnético de la Fig. 16 está compuesto por un núcleo de permeabilidad infinita y cuenta con tres entrehierros cuyas reluctancias son identificadas como $\Re_1$, $\Re_2$ y $\Re_3$.

En cada una de las piernas laterales del núcleo existe un enrollado. En el sector izquierdo de la Fig. 16 se encuentra el devanado 1, cuyo número de vueltas corresponde a N_1 y cuya corriente asociada se identifica como $i_1(t)$. Así mismo, el enrollado de la pierna derecha es designado como devanado 2 contando con N_2 vueltas y una corriente asociada $i_2(t)$.

1. (4 puntos) Encuentre la expresión para las inductancias propias e inductancias mutuas de cada devanado. Considere las definiciones de (15) para las inductancias propias y mutuas, respectivamente.

$$\begin{aligned} L_{jj} &= N_j \frac{d\phi_{jj}}{di_j} \\ L_{jk} &= N_j \frac{d\phi_{jk}}{di_k} \iff j \neq k \end{aligned} \tag{15}$$

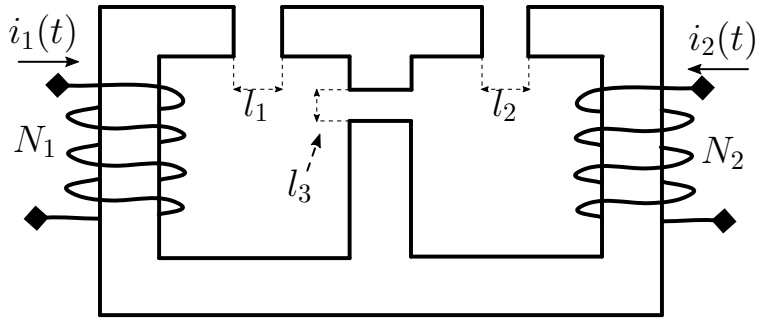


Figura 16: Circuito magnético.

Exprese sus resultados en función de las reluctancias del circuito magnético $\Re_1$, $\Re_2$ y $\Re_3$.

2. (4 puntos) Encuentre el coeficiente de acoplamiento k ($k = \sqrt{k_1 k_2}$) a partir del cual es posible definir la inductancia mutua $M(k, L_{11}, L_{22})$. Considere las definiciones de (16).

$$\begin{aligned} \phi_{21} &= k_1 \phi_{11} \\ \phi_{12} &= k_2 \phi_{22} \end{aligned} \tag{16}$$

3. (4 puntos) Los entrehierros l_1, l_2 y l_3 poseen un largo de 0.001, 0.002 y 0.003 [m], respectivamente. La sección transversal equivalente (A) a lo largo de todo el núcleo es de 25 [cm^2]. El número de vueltas de cada enrollado es $N_1 = 50$ y $N_2 = 150$. Encuentre numéricamente los valores para las inductancias propias y mutuas. Verifique que $L_{21} = L_{12} = M$.

4. Problema 1 - Solución

1. Dado que el núcleo presenta una permeabilidad infinita, este no es susceptible a la saturación y por ende, la expresión (15) puede ser simplificada como se indica en (17).

$$\begin{aligned} L_{jj} &= N_j \frac{\phi_{jj}}{i_j} \\ L_{jk} &= N_j \frac{\phi_{jk}}{i_k} \iff j \neq k \end{aligned} \tag{17}$$

A partir de la definición del sentido de las corrientes, se procede a construir los circuitos magnéticos equivalentes mediante el principio de superposición considerando la contribución de cada una de las fuerzas magnetomotrices al circuito.

En la Fig. 17 se muestra el circuito equivalente debido a la presencia de la corriente $i_1(t)$, escrita simplemente como i_1, mientras que en la Fig. 18 se retrata el circuito equivalente debido a la contribución de la corriente $i_2(t)$, escrita como i_2.

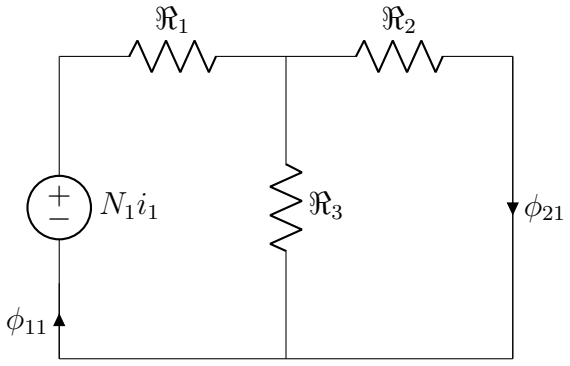


Figura 17: Circuito magnético equivalente debido a la corriente en el bobinado 1.

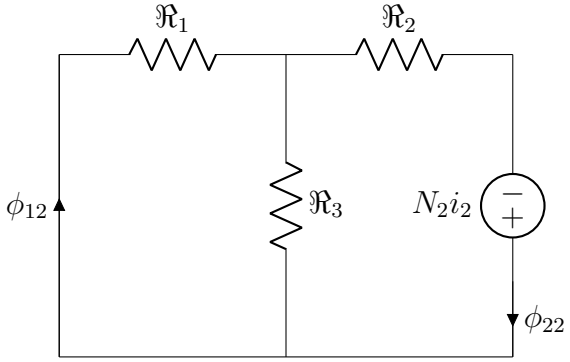


Figura 18: Circuito magnético equivalente debido a la corriente en el bobinado 2.

En ambos casos, las reluctancias $\Re_1$, $\Re_2$ y $\Re_3$ se encuentran asociadas a los entrehierros de longitud l_1, l_2 y l_3, respectivamente. Tal como se refleja en (18), en donde A corresponde a la sección transversal equivalente a lo largo del núcleo.

$$\begin{aligned} \Re_1 &= \frac{l_1}{\mu_0 A} \\ \Re_2 &= \frac{l_2}{\mu_0 A} \\ \Re_3 &= \frac{l_3}{\mu_0 A} \end{aligned} \tag{18}$$

De esta forma, se definen los flujos magnéticos en cada circuito equivalente como se indica en (19).

$$
\begin{aligned}
\phi_{11} &= \frac{N_1 i_1}{\Re_1 + \frac{\Re_2 \Re_3}{\Re_2 + \Re_3}} \\
\phi_{22} &= \frac{N_2 i_2}{\Re_2 + \frac{\Re_1 \Re_3}{\Re_1 + \Re_3}} \\
\phi_{21} &= \frac{N_1 i_1}{\Re_1 + \frac{\Re_2 \Re_3}{\Re_2 + \Re_3}} \frac{\Re_3}{\Re_2 + \Re_3} \\
\phi_{12} &= \frac{N_2 i_2}{\Re_2 + \frac{\Re_1 \Re_3}{\Re_1 + \Re_3}} \frac{\Re_3}{\Re_1 + \Re_3}
\end{aligned}
\tag{19}
$$

Utilizando la definición simplificada de (17), se procede a calcular las inductancias propias y mutuas a partir de lo obtenido en (19) tal como se muestra en (20).

$$
\begin{aligned}
L_{11} &= \frac{N_1^2}{\Re_1 + \frac{\Re_2 \Re_3}{\Re_2 + \Re_3}} \\
L_{22} &= \frac{N_2^2}{\Re_2 + \frac{\Re_1 \Re_3}{\Re_1 + \Re_3}} \\
L_{21} &= \frac{N_1 N_2}{\Re_1 + \frac{\Re_2 \Re_3}{\Re_2 + \Re_3}} \frac{\Re_3}{\Re_2 + \Re_3} \\
L_{12} &= \frac{N_1 N_2}{\Re_2 + \frac{\Re_1 \Re_3}{\Re_1 + \Re_3}} \frac{\Re_3}{\Re_1 + \Re_3}
\end{aligned}
\tag{20}
$$

2. El coeficiente de acoplamiento del devanado 1 y del devanado 2 se calcula a partir de (16) utilizando los resultados de (20) como se indica en (21).

$$
\begin{aligned}
k_1 &= \frac{\phi_{21}}{\phi_{11}} = \frac{\Re_3}{\Re_2 + \Re_3} \\
k_2 &= \frac{\phi_{12}}{\phi_{22}} = \frac{\Re_3}{\Re_1 + \Re_3}
\end{aligned}
\tag{21}
$$

El coeficiente de acoplamiento k entre ambos devanados se calcula como se indica en (22).

$$
k = \sqrt{k_1 k_2} = \sqrt{\frac{\Re_3^2}{(\Re_1 + \Re_3)(\Re_2 + \Re_3)}} \tag{22}
$$

Notar que la expresión de M en (23), después de ser simplificada, es idéntica a la expresión para L_{21} y para L_{12} en (20). Es decir, $L_{21} = L_{12} = M$.

$$M = k\sqrt{L_{11}L_{22}} = \sqrt{\frac{\Re_3^2}{(\Re_1+\Re_3)(\Re_2+\Re_3)}}\sqrt{\frac{N_1^2N_2^2}{\left(\Re_2+\frac{\Re_1\Re_3}{\Re_1+\Re_3}\right)\left(\Re_1+\frac{\Re_2\Re_3}{\Re_2+\Re_3}\right)}} \tag{23}$$

3. El cálculo de las magnitudes de las reluctancias del núcleo se efectúa mediante la definición previamente expuesta en (18). El área de la sección transversal del núcleo (A) está dada por (24) mientras que la permeabilidad del vacío es definida como $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$. Teniendo en cuenta las magnitudes de cada entrehierro, (18) se convierte en (25).

$$A = 25[cm^2] = 0.0025[m^2] \tag{24}$$

$$\begin{aligned}\Re_1 &= \frac{l_1}{A\mu_0} = 318310[v^2H^{-1}]\\ \Re_2 &= \frac{l_2}{A\mu_0} = 636620[v^2H^{-1}]\\ \Re_3 &= \frac{l_3}{A\mu_0} = 954930[v^2H^{-1}]\end{aligned} \tag{25}$$

De esta manera se evalúan las expresiones para las inductancias definidas en (20) y (23) obteniéndose los resultados de (17).

$$\begin{aligned}L_{11} &= 0.00356999[H]\\ L_{22} &= 0.0257039[H]\\ M = L_{21} &= L_{12} = 0.00642598[H]\end{aligned} \tag{26}$$

5. Problema 2 (12 Puntos)

Se ha diseñado un transformador monofásico experimental de 500 [kVA] y de tensiones nominales 15000/3000 [V] que opera a 50 [Hz]. Se han realizado las pruebas de circuito abierto y cortocircuito obteniendo los resultados de la Tabla 1. Las pruebas han sido efectuadas en el lado de alta tensión.

Tabla 1: Pruebas de transformador monofásico.

Prueba	Vacío	Cortocircuito
Tensión Primario	Nominal	499.5 V
Corriente Primario	1.67 [A]	Nominal
Potencia Activa Primario	4 [kW]	7056 [W]

1. (4 puntos) Obtenga los parámetros de la rama serie y de la rama de magnetización del circuito equivalente simplificado del transformador mostrado en la Fig. 19.

2. (4 puntos) Calcule el rendimiento del sistema y la regulación de tensión cuando el transformador alimenta una carga de 360 [kW] con factor de potencia 0,8 inductivo. Considere que bajo esas condiciones, el secundario del transformador tiene una tensión de 2910 [V] en el secundario del transformador. Dibuje el diagrama fasorial del sistema.

3. (4 puntos) Calcule la magnitud de la corriente que debe circular por el devanado de baja tensión, referida al primario, para que el transformador alcance el punto de operación con máxima eficiencia. Para ello, considere la tensión del primario obtenida en el punto (2) de este problema.

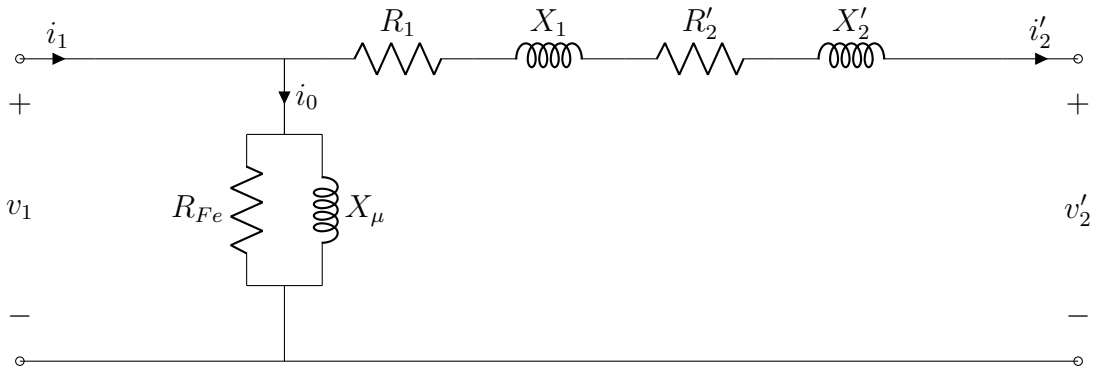


Figura 19: Circuito equivalente simplificado por fase de transformador referido al primario.

6. Problema 2 - Solución

1. Primero se efectúa el cálculo de las corrientes nominales del sistema como se indica en (27).

$$\begin{aligned} I_{1,Nom} &= \frac{S_{Nom}}{V_{1,Nom}} = \frac{500 \cdot 10^3}{15 \cdot 10^3} = 33.3[A] \\ I_{2,Nom} &= \frac{S_{Nom}}{V_{2,Nom}} = \frac{500 \cdot 10^3}{3 \cdot 10^3} = 166.7[A] \end{aligned} \tag{27}$$

   A partir de la prueba de circuito abierto (CA) es posible obtener los parámetros de la rama paralelo de magnetización tal como se indica en (28) y .

$$
\begin{aligned}
I_{Fe} &= \frac{P_{CA}}{V_{1,CA}} = \frac{4000}{15000} = 0.267[A] \\
I_{\mu} &= \sqrt{I_{CA}^2 - I_{Fe}^2} = \sqrt{1.67^2 - 0.267^2} = 1.6485[A]
\end{aligned}
\tag{28}
$$

$$
\begin{aligned}
R_{Fe} &= \frac{V_{1,CA}}{I_{Fe}} = \frac{15000}{0.267} = 56.12[k\Omega] \\
X_{\mu} &= \frac{V_{1,CA}}{I_{\mu}} = \frac{15000}{1.6485} = 9.1[k\Omega]
\end{aligned}
\tag{29}
$$

Los parámetros de la rama serie son obtenidos mediante los datos de la prueba de cortocircuito. Para ello

$$
\begin{aligned}
Z_{eq} &= Z_1 + Z_2' = \frac{V_{1,CC}}{I_{1,CC}} = \frac{499.5}{33.3} = 15[\Omega] \\
R_{eq} &= R_1 + R_2' = \frac{P_{CC}}{I_{1,CC}^2} = \frac{7056}{33.3^2} = 6.363[\Omega] \\
X_{eq} &= X_1 + X_2' = \sqrt{Z_{eq}^2 - R_{eq}^2} = \sqrt{15^2 - 6.363^2} = 13.584[\Omega]
\end{aligned}
\tag{30}
$$

2. En primera instancia, considerando el circuito equivalente de la Fig. 19, se procede a obtener la corriente del secundario referida al primario ($\dot{I}_2'$) y la tensión en el primario del transformador ($\dot{V}_1$). Esto se efectúa como se presenta en (31) tomando como referencia angular la tensión del secundario.

$$
\begin{aligned}
|\dot{V}_2'| &= |a\dot{V}_2| = \frac{V_{1,Nom}}{V_{2,Nom}}|\dot{V}_2| = \frac{15000}{3000} \cdot 2910 = 14550[V] \\
\dot{I}_2' &= \left[\frac{\dot{S}_{out}}{\dot{V}_2'}\right]^* = \left[\frac{\frac{P_{out}}{FP}\angle(+\arccos(FP))}{\dot{V}_2'}\right]^* = \frac{\frac{360000}{0.8}}{14550}\angle - \arccos(0.8) = 30.928\angle - 36.87°[A] \\
\dot{V}_1 &= \dot{V}_2' + \dot{I}_2' \cdot Z_{eq} = 14550\angle 0° + (30.928\angle - 36.87°) \cdot (6.363 + j13.584) = 14961.1\angle 0.835°[V]
\end{aligned}
\tag{31}
$$

La eficiencia del transformador se obtiene mediante la obtención de las pérdidas en el núcleo (P_{Fe}) y en el cobre (P_{Cu}) en conjunto con la potencia activa de salida (P_{out}) de la máquina. La metodología se refleja en (32).

$$
\begin{aligned}
P_{out} &= 360[kW] \\
P_{Fe} &= \frac{|\dot{V}_1|^2}{R_{Fe}} = \frac{14961.1^2}{56120} = 3988[W] \\
P_{Cu} &= |\dot{I}_2'|^2 \cdot R_{eq} = 6086[W] \\
\eta &= 100 \cdot \frac{P_{out}}{P_{in}} = 100 \cdot \frac{P_{out}}{P_{out} + P_{Fe} + P_{Cu}} = 100 \cdot \frac{360000}{360000 + 3988 + 6086} = 97.28\,\%
\end{aligned}
\tag{32}
$$

La regulación de tensión es calculada como se indica en (33).

$$
\%Reg = 100 \cdot \frac{|\dot{V}_1| - |\dot{V}_2'|}{|\dot{V}_2'|} = 100 \cdot \frac{14961.1 - 14550}{14550} = 2.8254\,\% \tag{33}
$$

El diagrama fasorial se muestra en la Fig. 20. Notar que la caída de tensión en la rama serie presenta una escala 10 veces mayor dado que de lo contrario dichas magnitudes no son perceptibles en comparación a las tensiones del sistema. Como referencia de lo esperado, se puede tomar en cuenta el diagrama genérico de la Fig. 13(b).

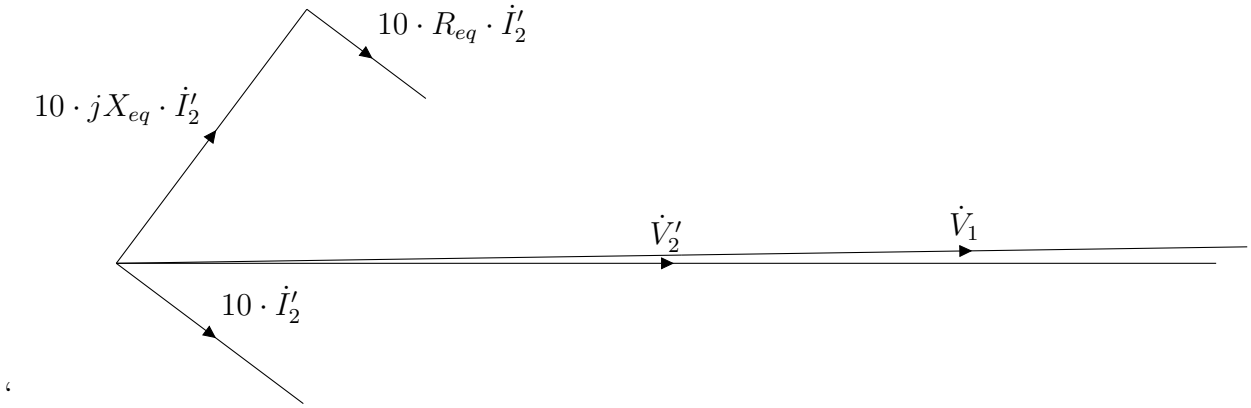


Figura 20: Diagrama fasorial de tensiones y corrientes de transformador monofásico.

3. La condición de máxima eficiencia se obtiene cuando las pérdidas en la rama de magnetización (P_{Fe}) son idénticas a las pérdidas en la rama serie (P_{Cu}). El procedimiento para obtener dicho punto de operación se refleja en (34).

$$
\begin{aligned}
\eta_{Opt} \iff R_{Fe}I_{Fe}^2 &= R_{eq}I_2'^2 \\
I_2'^2 &= \frac{R_{Fe}I_{Fe}^2}{R_{eq}} \\
R_{Fe}I_{Fe}^2 &= \frac{V_1^2}{R_{Fe}} \\
I_2'^2 &= \frac{\frac{V_1^2}{R_{Fe}}}{R_{eq}} = \frac{V_1^2}{R_{Fe}R_{eq}} \\
I_2'^2 &= \frac{14961.1^2}{56120 \cdot 6.363} \\
I_2' &= \sqrt{\frac{14961.1^2}{56120 \cdot 6.363}} = 25.04[A]
\end{aligned}
\tag{34}
$$

7. Problema 3: Transformadores Trifásicos (12 Puntos)

(4.1) (6 Puntos) Dibuje el diagrama fasorial y el esquema de conexiones en la bornera de la configuración Yd_3 y de la conexión Dy_5. Determine si es posible efectuar la conexión en paralelo de ambas unidades trifásicas.
En caso que no sea posible realizar la conexión, identifique una modificación de polaridad o permutación cíclica en alguno de los transformadores, para que si sea factible. Obtenga la razón de transformación trifásica de cada unidad en función del número de vueltas en el primario (N_P) y secundario (N_S) para realizar dicha conexión.

(4.2) (6 Puntos) Dibuje el diagrama fasorial y el esquema de conexiones para la configuración Yz_{11}. Obtenga la razón de transformación trifásica de la unidad en función del número de vueltas en el primario (N_H) y secundario (N_S).
Nota: Considere que los devanados secundarios de N_S vueltas son divididos en dos enrollados de $0.5N_S$ vueltas cada uno.

.

8. Problema 3 - Solución

(a) En la Fig. 21 se muestra el esquema de conexión de la configuración Yd_3.

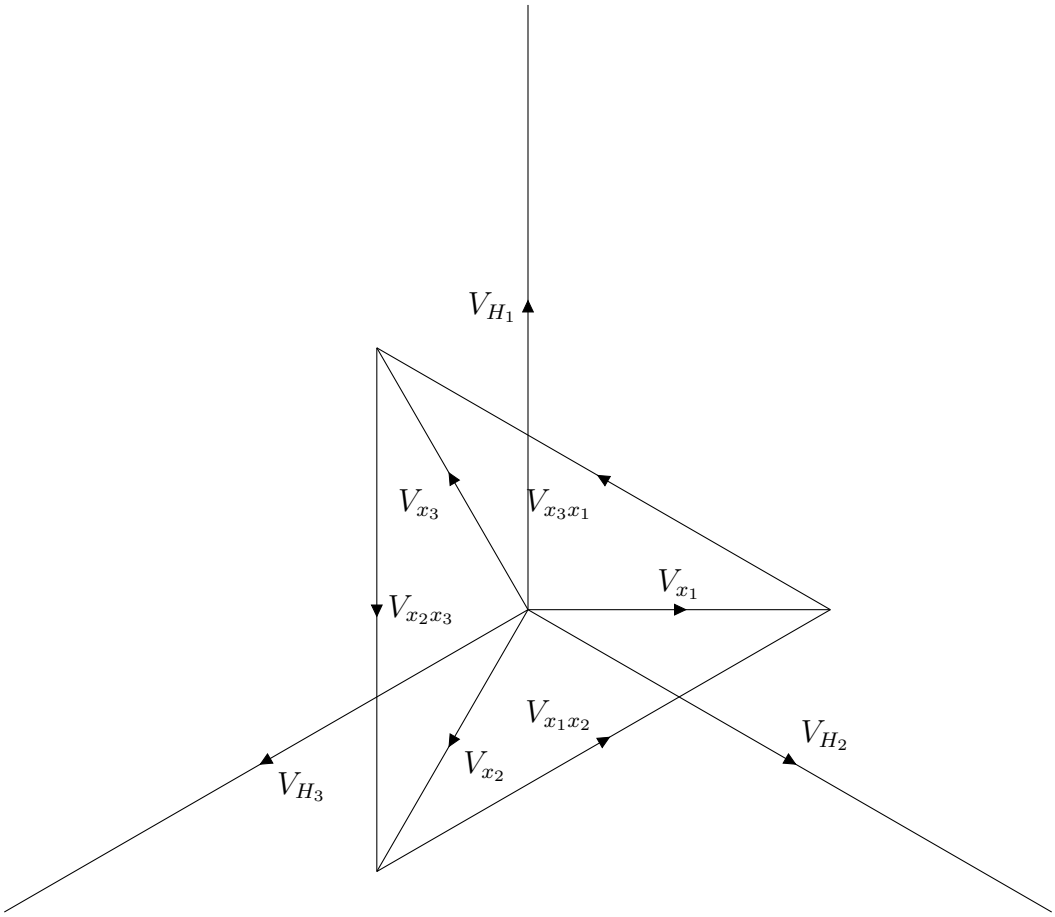
En la Fig. 22 se muestra el esquema de conexión de la configuración Dy_5.

Como se observa de ambos esquemas, no existe compatibilidad. Sin embargo, es posible efectuar una inversión de polaridad en una de las dos configuraciones. Esto solo es posible si los seis terminales del secundario, en el transformador que se desea modificar, se encuentran accesibles. Con ello, se cumple el criterio de desfase para la conexión en paralelo. Así, la tensión V_{x_1}, V_{x_2} y V_{x_3} del diagrama de la Fig. 21 es compatible con la tensión V_{x_2}, V_{x_3} y V_{x_1} del esquema de la Fig. 22, respectivamente.

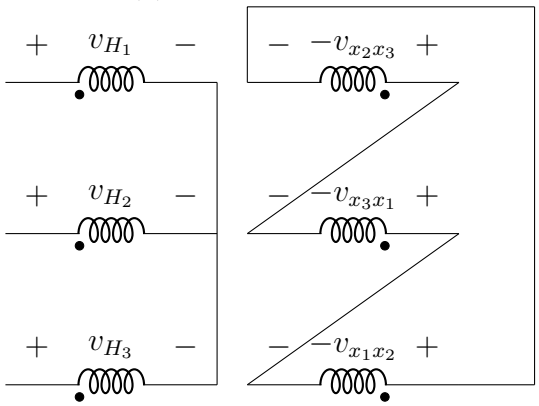
Además, se deben presentar idénticas razones de transformación trifásicas en los transformadores. Para ello se debe cumplir lo expresado en (35) teniendo en cuenta que el número de vueltas del primario y secundario en la conexión Yd_3 es N_{P_1} y N_{S_1}, y en la conexión Dy_5 es N_{P_2} y N_{S_2}, respectivamente.

$$\begin{aligned} a_1 &= \sqrt{3}\frac{N_{P_1}}{N_{S_1}} \\ a_2 &= \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{N_{P_2}}{N_{S_2}} \\ a_1 &= a_2 \end{aligned} \tag{35}$$

Finalmente, las impedancias equivalentes de los transformadores deben ser tal que la corriente se distribuya de manera proporcional a la potencia nominal de cada unidad.

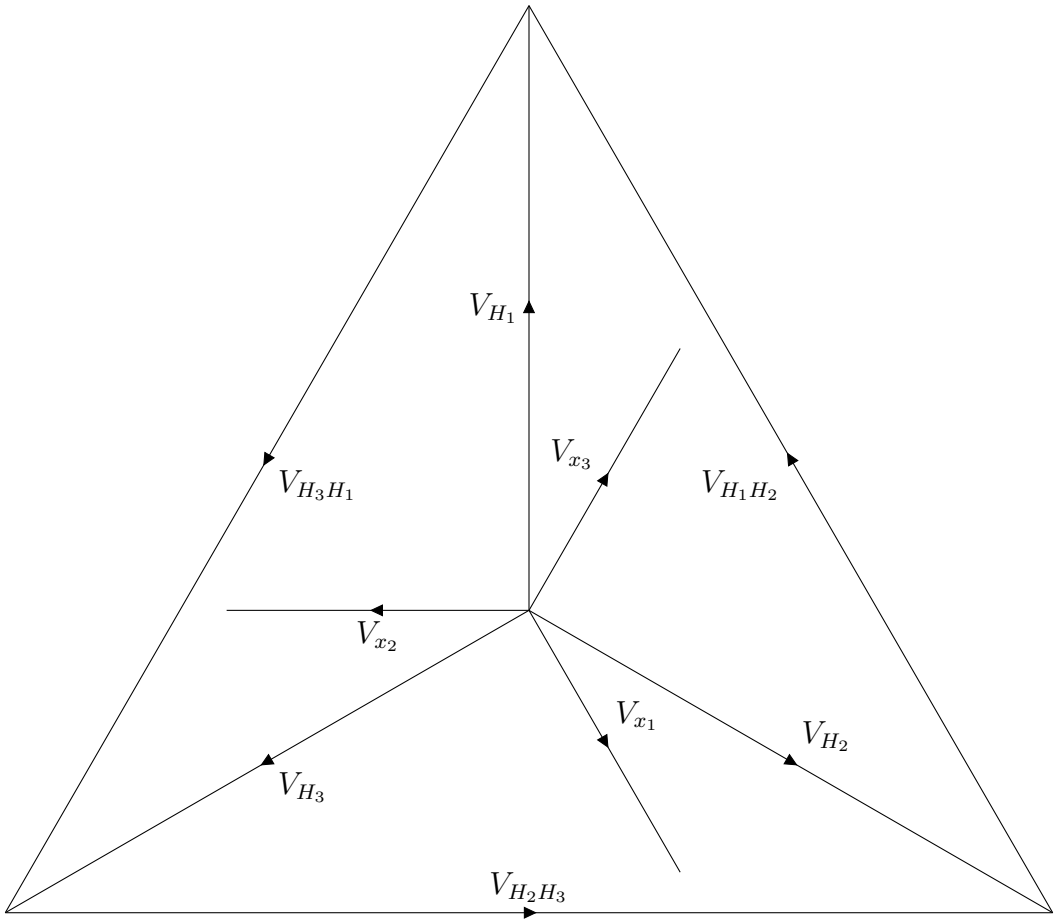


(a) Diagrama fasorial.

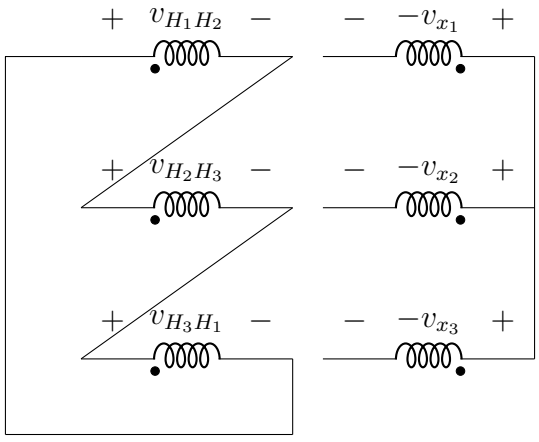


(b) Esquema de conexión.

Figura 21: Conexión Yd_3.



(a) Diagrama fasorial.

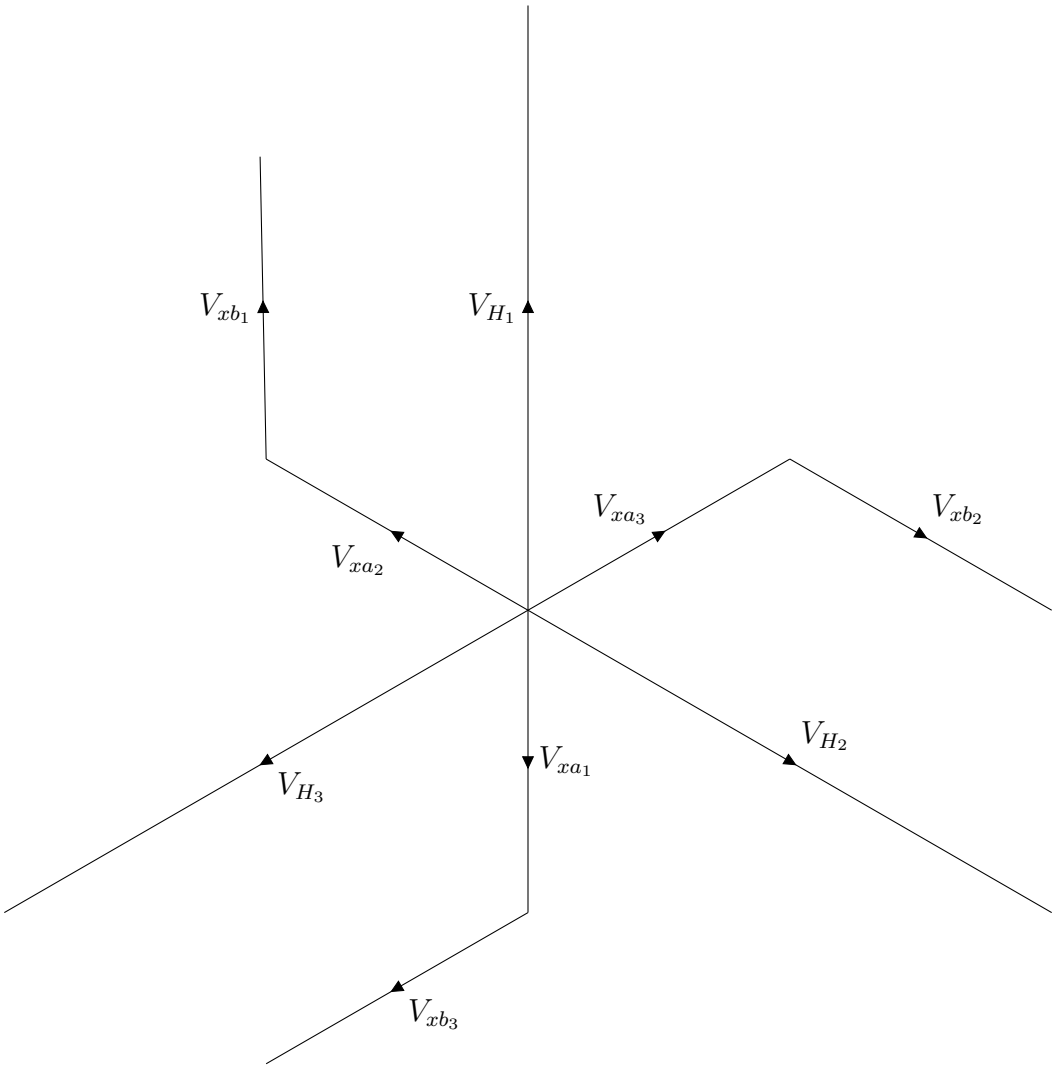


(b) Esquema de conexión.

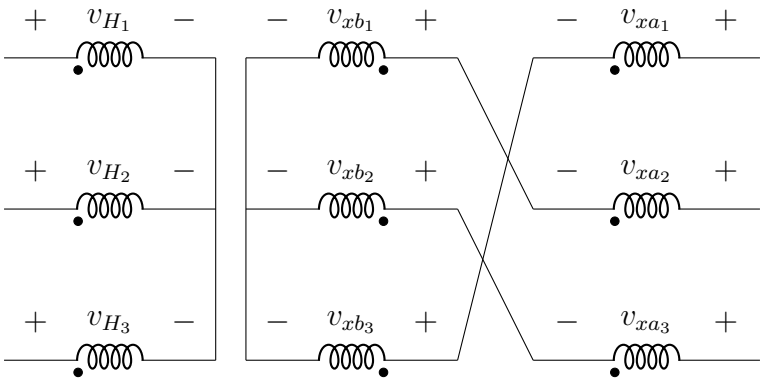
Figura 22: Conexión Dy_5.

(b) En la Fig. 23 se muestra el esquema de conexión de la configuración Yz_{11}.
Para obtener la razón de transformación se debe seguir el procedimiento de (36).

$$
\begin{aligned}
\dot{V}_{x1} &= \dot{V}_{xb_1} + \dot{V}_{xa_2} = V_{xb}\angle 0^o + V_{xa}\angle 60^o \\
V_{xb} &= V_H \frac{N_{Sb}}{N_H} \\
V_{xa} &= V_H \frac{N_{Sa}}{N_H} \\
\dot{V}_{x1} &= V_H \frac{N_{Sb}}{N_H}\angle 0^o + V_H \frac{N_{Sa}}{N_H}\angle 60^o \\
N_{Sa} &= N_{Sb} = 0.5 N_S \\
\dot{V}_{x1} &= \sqrt{3} V_H \frac{N_S}{2N_H}\angle 30^o \\
\frac{V_H}{V_x} &= \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{N_H}{N_S} = a
\end{aligned}
\tag{36}
$$



(a) Diagrama fasorial.



(b) Esquema de conexión.

Figura 23: Conexión Yz_{11}.