Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Eléctrica
IEE2213 - Máquinas Eléctricas
Primer Semestre de 2022

Interrogación 01

Electromagnetismo y Transformadores

13 de Abril de 2022

Nombre: _____ RUN: _____

Indicaciones Generales

1. Solo podrá tener sus lápices, goma, corrector en su escritorio (o algún otro elemento de apoyo de esa índole (regla, escuadra transportador, etc)).
2. No utilice hojas adicionales para el desarrollo de su prueba. Se le proveerá de hojas suficientes para el desarrollo.
3. No utilice formularios adicionales.
4. Puede utilizar una calculadora de tipo NO PROGRAMABLE.
5. No se permite el uso del celular, ni ningún otro dispositivo electrónico durante la prueba (tablet, reloj inteligente, etc). La hora, y el tiempo restante de la prueba, serán proyectados en la sala.
6. Antes de comenzar la prueba apague su teléfono celular y déjelo en su bolso o mochila (no en el bolsillo).
7. La prueba consta de una primera parte teórica, y una segunda parte de ejercicios. Ambas partes serán podrán ser resueltas de forma libre por el estudiante durante todo el tiempo que dure la interrogación. El puntaje total es de 60 puntos.
8. Responda de forma ordenada y **solo en las hojas de desarrollo**. Las hojas de enunciado no serán corregidas.
9. La escala de evaluación es del 60 % con nota entre $1.0 - 7.0$ en función del puntaje obtenido.
10. La prueba tiene una duración de 150 minutos.

1. Sección Teórica (12 Puntos)

Argumente con la información técnica que permita validar su respuesta y su cocimiento en la temática.

1. (2 puntos) Suponga que tiene un circuito RLC en serie, alimentado por una fuente de voltaje alterna. Utilizando alguna de las leyes de Maxwell, defina una superficie tal que permita determinar la corriente de desplazamiento que circula en el circuito. Explique claramente, de manera conceptual, que significado físico que tiene dicha corriente.

2. (2 puntos) Explique claramente la diferencia conceptual que existe entre la densidad e intensidad de campo magnético (B y H). Proponga un ejemplo numérico para explicar la diferencia entre ellos, tanto en el vacío como en otro medio.

3. (2 puntos) Dibuje la curva B vs H real de un material ferromagnético . Identifique claramente la remanencia, coercitividad, tramos de la curva de saturación y pérdidas del material. Además, grafique el valor de la permeabilidad magnética en función de H. ¿como se diferencia esta curva para un material ferromagnético utilizado para altas frecuencias con otro utilizado para bajas frecuencias? Dibuje ambas curvas.

4. (2 puntos) Asuma que Ud. construye una bobina de N vueltas cuya curva B-H tiene la forma indicada en el punto anterior. Obtenga una curva aproximada para la inductancia de dicha bobina.

5. (4 puntos) Considere que tiene un transformador monofásico, conformado por dos bobinas de vueltas N_1 y N_2, y material ferromagnético μ, constante (sin saturación). Para el circuito equivalente del transformador, solo considere que existe una resistencia de los bobinados, R_1 y R_2, pequeña. Desprecie las inductancias de dispersión y rama de magnetización. Ahora, suponga que el enrollado primario del transformador se conecta súbitamente a la red eléctrica, la cual tiene un voltaje de $sen(\omega t + 45°)$. El núcleo del transformador se encontraba previamente magnetizado con un flujo igual a ϕ_R. Obtenga:

   a) Una expresión para el flujo del transformador. Grafique.

   b) Una expresión para la tensión inducida en el primario del transformador (e_1). Grafique.

   c) Una expresión para la corriente por el primario del transformador. Grafique.

   d) Suponga ahora que el núcleo tiene saturación. Dibuje, conceptualmente, como será ahora la corriente por el transformador (no realice cálculos).

      Recuerde que $e = -d\phi/dt$, y que $R * \phi = N_1 * I_1 - N2 * I_2$. Además, la respuesta de un sistema de primer orden se compone de una respuesta natural y otra forzada. $y(t) = y_\infty(t) - (y_\infty(t_0) - y(t_0)) * e^{-t/\tau * (t-t_0)}$

2. Sección Teórica (12 Puntos)

1. La Ley de Ampere-Maxwell, en (1), indica que el flujo magnético, expresado como densidad de flujo magnético ($\vec{B}$), además de ser producido mediante la corriente circulando en un conductor, expresado como densidad de corriente ($\vec{J}$), es generado por la variación en el flujo eléctrico ($\phi_E = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$). $\varepsilon_0 = 8.854$ F/m y $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Tm/A son la permitividad y permeabilidad del vacío.

$$\int_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\delta}{\delta t} \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \tag{1}$$

El primer término de la derecha ($\int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$) corresponde a la corriente de conducción (I en la figura) y el segundo término ($\varepsilon_0 \frac{\delta}{\delta t} \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$) corresponde a la corriente de desplazamiento. Este término fue incluido por Maxwell, dado que él notó que la Ley de Ampere no se encontraba completa para todos los casos, como el presente en este ejercicio dado que al interior de un capacitor no circula corriente sino que se produce una acumulación de cargas eléctricas.

Para el esquema de la Fig. 1, cuando se utiliza la superficie cerrada descrita por la circunferencia de radio R, el flujo magnético solo es producido por la corriente que circula a través del conductor (I), debido a que el flujo eléctrico está reducido a la superficie del conductor eléctrico y por ende, puede ser despreciado, dado el valor de ε_0 y dado el radio reducido del conductor en relación al radio de integración. En dicho caso, (1) puede ser escrito como (2), expresión que corresponde a una consecuencia de la Ley de Ampere para el circuito de la figura.

$$\int_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \tag{2}$$

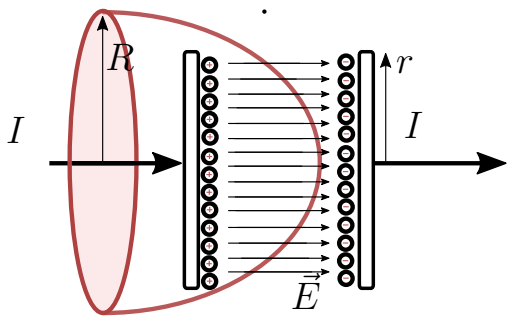


Figura 1: Esquema representativo de Ley de Ampere-Maxwell.

Cuando se utiliza la superficie holgada que se encuentra dentro del capacitor, no existe una corriente I, por lo tanto, en dicho caso el factor asociado al campo eléctrico ($\vec{E}$) toma importancia. Si la superficie holgada logra cubrir toda la superficie dentro de las

dos placas del capacitor, la expresión (1) puede ser reescrita como (3). El resultado es equivalente a (2), pero su origen es distinto. En el primer caso, el campo magnético fue producido por la corriente eléctrica en el conductor y en el segundo por el cambio de carga (Q) en el capacitor.

$$\int_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\delta}{\delta t} \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \phi_E = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \frac{Q}{\varepsilon_0} = \mu_0 I \tag{3}$$

2. El término B corresponde a la densidad de campo magnético (unidad de medida el Tesla T) y está ligado a la inducción magnética describiendo la cantidad de campo magnético por unidad de área ($wb/m^2 = T$). El término H corresponde a la intensidad de campo magnético (unidad de medida el Ampere-vuelta/m) y se entiende como la excitación del campo magnético, es decir, la cantidad de corriente encerrada por un contorno. H da lugar a B en un medio de permeabilidad μ y esto se representa como:

$$B = \mu H \tag{4}$$

   A través de la ley de Hopkinson, se puede entender que H es la excitación del circuito magnético (fuente de tensión) y que B es el flujo producido por la excitación en el medio (densidad de corriente eléctrica); μ es homólogo como la conductancia del circuito.

3. La curva característica real de un material ferromagnético se retrata en la Fig. 2.

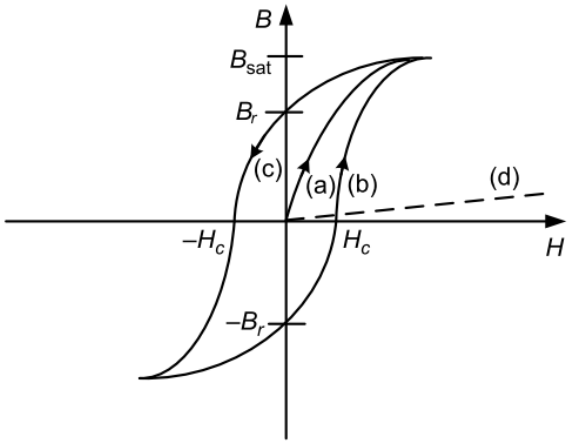


Figura 2: Curva de material ferromagnético.

   La zona de saturación se observa cuando un aumento en la magnitud de la intensidad de campo magnético H no produce un aumento considerable en la densidad de campo magnético B. El punto a partir del cual se produce este fenómeno se indica como B_{sat} en la Fig. 2. La densidad de flujo magnético de remanencia ($B_r(-B_r)$ en la figura) se entiende como la densidad de flujo residual que permanece en el material cuando la

excitación del campo magnético (H) es removida del núcleo. Para retornar el material a su punto original es necesario aplicar un excitación inversa $-H_c(H_c)$, respectivamente. Esta excitación es conocida como fuerza coercitiva.

La curva característica de un material ferromagnético, sin considerar el ciclo de histéresis, se muestra en la Fig. 3.

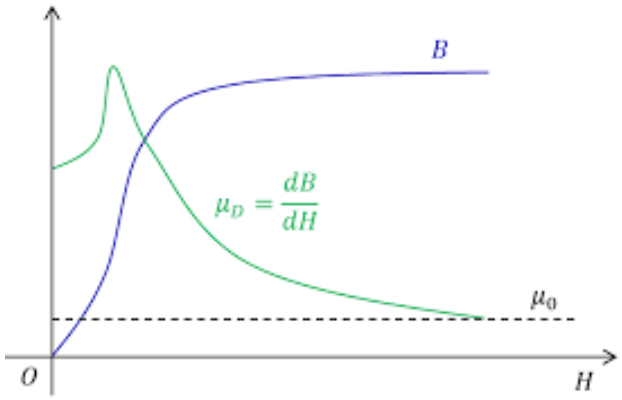


Figura 3: Curva de material ferromagnético.

Dado que la permeabilidad del material μ se define como:

$$\mu = \frac{dB}{dH} \tag{5}$$

Esta describe la pendiente de la curva de histéresis. Dependiendo del material, se puede o no presentar un punto de permeabilidad máximo. Notar que en la curva esto se produce en la zona del codo de saturación, es decir, cuando se trabaja en esta zona, se aprovecha de mejor forma el material ferromagnético. Cuando se alcanza el punto de saturación, la permeabilidad disminuye drásticamente a un valor comparativamente menor al que presenta antes de alcanzar el codo de saturación.

La curva de histéresis y de permeabilidad mostrada en la Fig. 3, puede ser utilizada para materiales de todas las frecuencias en términos generales. Las principales diferencias que se encontraran serán la magnitud de la permeabilidad del material y el valor máximo de B que tolera en función de H. Cuando se desea evaluar el desempeño del material en términos de la frecuencia f, se debe obtener el valor de μ en función de esta. Es de esperarse que el valor de μ nominal de un material diseñado para operar a altas frecuencias se mantenga más estable en magnitud que un de bajas frecuencias a medida que f aumenta. Esto se traduce en una curva de histéresis más angosta en términos comparativos.

4. Dado que ($A_cB = \phi$; $Hl_c = Ni$):

$$\mu = \frac{dB}{dH} = \frac{l_c}{A_cN}\frac{d\phi}{di} = \frac{l_c}{A_cN^2}L \tag{6}$$

$$L = N^2 \frac{A_c}{l_c} \mu \tag{7}$$

Por lo tanto, la curva de un inductor considerando la curva de histéresis es linealmente dependiente de μ y por lo tanto es equivalente a la Fig. 3 escalada por un factor $N^2 A_c / l_c$.

5. En la Fig. 4 se muestran las curvas del transformador en su proceso de arranque cuando no existe flujo remanente y cuando si lo existe.

   En ambos casos, el flujo puede ser establecido (considerando la ecuación de mallas del primario) como:

$$v(t) = Ri(t) + N_1 \frac{d\phi(t)}{dt} \tag{8}$$

   En este caso, $N_1\phi$ representa el flujo enlazado por las N_1 vueltas del primario. En este caso, dado que no se especifica carga, la corriente I debe ser la corriente de magnetización del transformador, la cual se define, por Ley de Ampere, como:

$$i(t) = i_m(t) = \frac{\Re}{N_1} \phi(t) \tag{9}$$

   Dado que se trata de un sistema de primer orden y dado que la tensión de alimentación es alterna, el sistema presentará una respuesta oscilatoria y una componente envolvente decreciente debido a la amortiguación que entrega al sistema la resistencia.

$$v(t) = R \frac{\Re}{N_1} \phi(t) + N_1 \frac{d\phi(t)}{dt} \tag{10}$$

   Notar que en la Fig. 4, la corriente presenta un inrush debdio a que la conexión no se realizó cuando la tensión es máxima. Más aún, cuando existe un flujo remanente, la corriente es incluso mayor. Además, ante el aumento del valor inicial del flujo, la tensión inducida se ve afectada (los gráficos muestran una razón de conversión 1:1) presentando una baja tensión en el primer semiciclo y una sobretensión en el siguiente semiciclo negativo.

   En la Fig. 4, se presenta el mismo caso de estudio, pero en este caso con un núcleo susceptible a la saturación. Acá se observa la distorsión en la forma de onda de la corriente más no del flujo (en estado estacionario). Además, en el caso de flujo remanente, por el punto de operación evaluado, existe un efecto aún más severo de la corriente de inrush ante la presencia de flujo remanente.

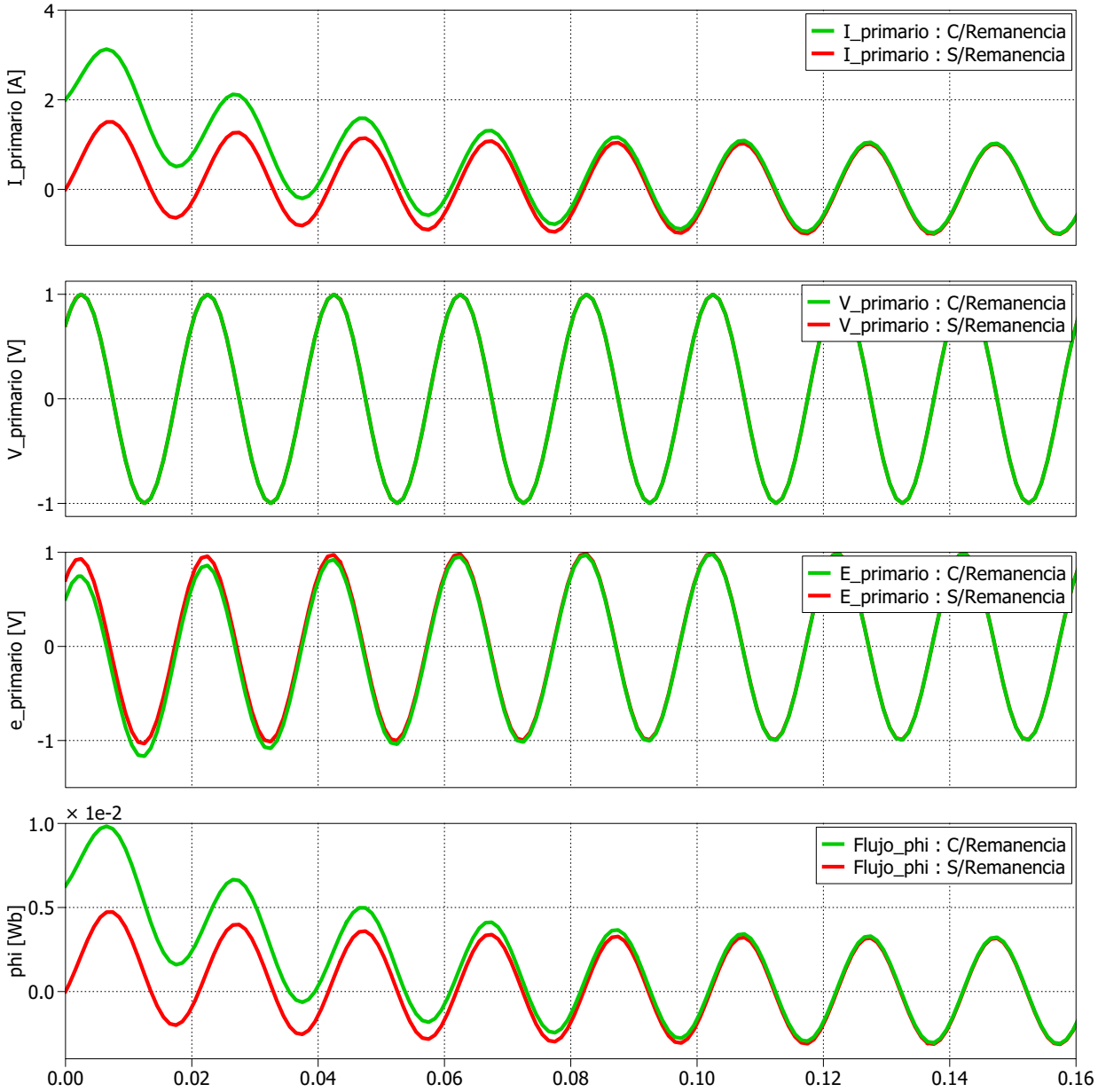


Figura 4: Curvas de arranque de transformador con núcleo lineal.

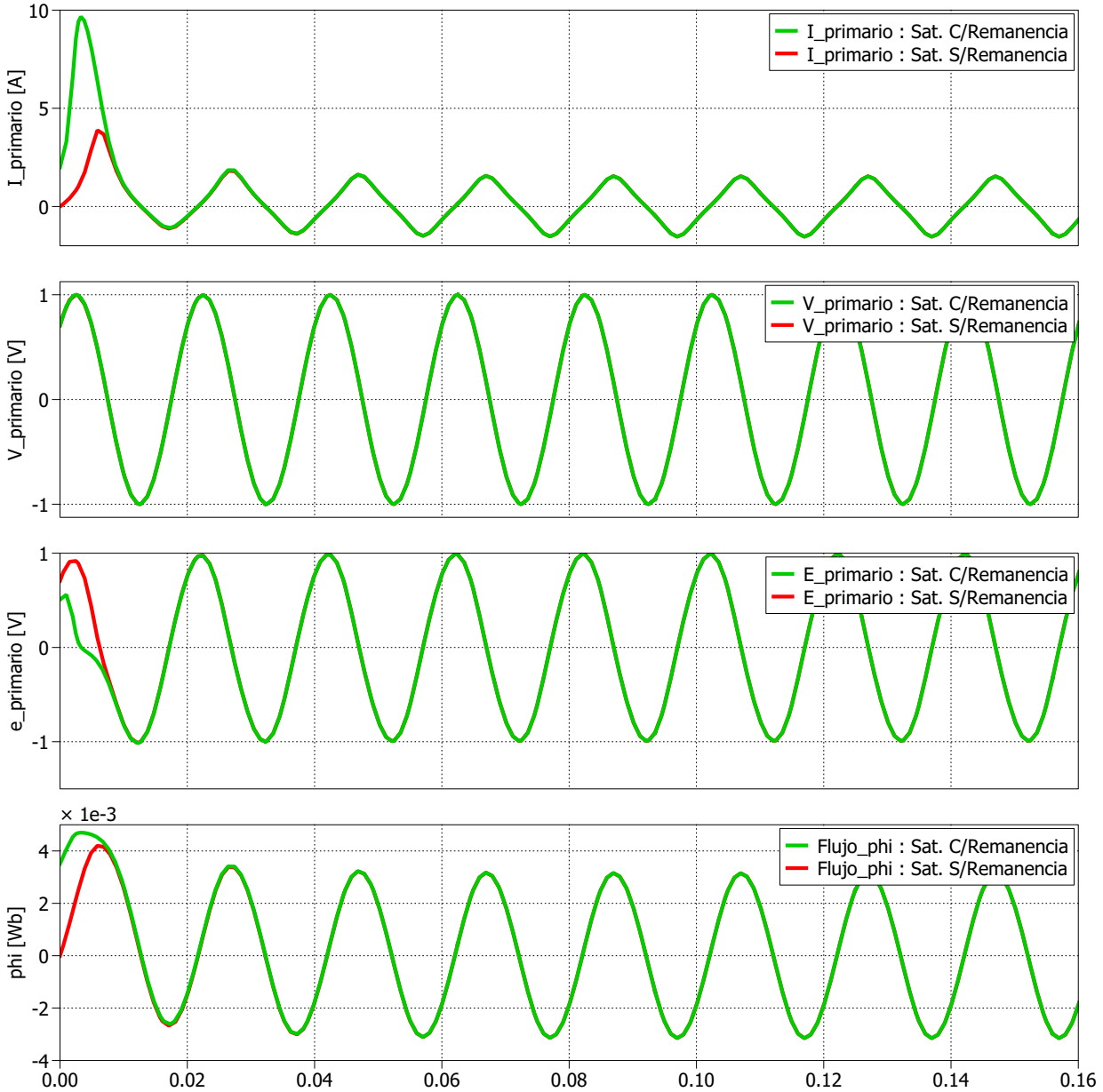


Figura 5: Curvas de arranque de transformador con núcleo saturable.

3. Problema 1 (12 puntos)

En la Fig. 6 se muestra una barra rectangular con ancho L y un alambre móvil con masa m, los cuales en conjunto forman una espira. A través de todo el sistema circula un vector de densidad de campo $\vec{B}$, el cual ingresa de forma perpendicular al plano de la espira. Al alambre móvil se le otorga una velocidad inicial v_o y luego se libera. Asuma que no existe fricción entre el alambre y la barra y que la única resistencia eléctrica del circuito proviene del alambre y corresponde a R.

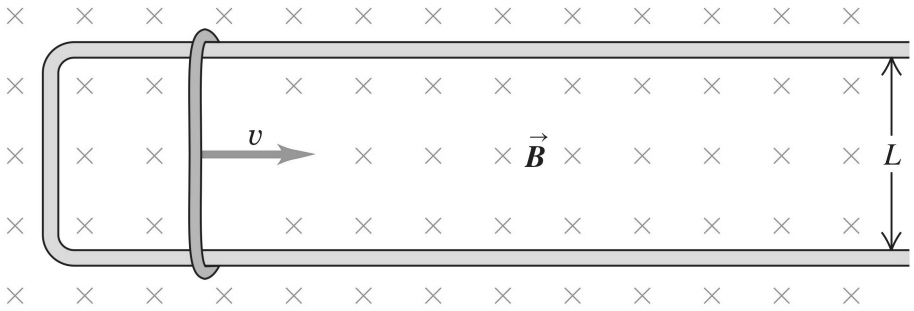


Figura 6: Diagrama del sistema

a) (6 puntos) Obtenga una expresión para la fuerza de Lorentz F, que se genera sobre el alambre en movimiento a velocidad v.

b) (6 puntos) Si el alambre comienza su movimiento en $x_o = 0$, demuestre que la distancia x que el alambre se mueve antes de llegar al reposo es $x = (mv_0R)/(L^2B^2)$.

Problema 1 - Solución

a) Se puede observar que la espira compuesta por la barra y el alambre corredizo corresponden a un área a través de la cual se proyecta un vector de densidad de flujo $\vec{B}$, lo cual se puede establecer como:

$$\phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int Bds = BS = BxL$$

Se puede simplificar la expresión debido a que el vector B es perpendicular en todo momento a la superficie, la cual está compuesta por el ancho de la barra L y la distancia entre un extremo de esta y el alambre, denotada como x.

Desde el momento en el que se le aplica una velocidad a la barra, el flujo (ϕ) varía debido al aumento del área (superficie cerrada) S acorde al aumento de x. En consecuencia, la ley de Faraday-Lenz indica que la FEM inducida se opone a la variación del flujo:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi}{dt}$$

Por lo tanto, la corriente eléctrica inducida por esta FEM ($\mathcal{E}$) produce un campo magnético tal que se opone a su propia variación, es decir, en dirección opuesta de $\vec{B}$. Utilizando la regla de la mano derecha (primer método), es posible determinar que la corriente eléctrica (envolver la espira con los dedos) debe circular en contra del sentido del reloj para producir un vector de campo (dedo pulgar) en sentido opuesto a $\vec{B}$.

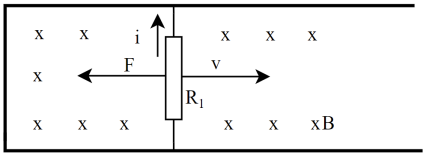


Figura 7: Dirección de F y de i

Ante la corriente que circula en la barra y el vector de densidad de corriente, se ejerce una fuerza en la barra descrita como la fuerza de Lorentz, esta puede ser representada como:

$$F = \int i\vec{l} \times \vec{B} = iLB$$

La fuerza de Lorentz en la barra (F) se ejerce de derecha a izquierda en la Fig. 6. Esto se determina por la regla de la mano derecha (segundo método). La corriente en pulgar, campo en el índice y fuerza en dedo medio formando ejes perpendiculares.

Para encontrar la corriente, primero se debe encontrar el voltaje inducido en la bobina. Al utilizar la ley de Faraday-Lenz, se obtiene la siguiente FEM:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(BxL) = BL\frac{dx}{dt} = BLv$$

Como ya se sabe la dirección de la corriente dentro de la espira, se considera únicamente el módulo de la FEM para calcular la corriente que circula dentro de ella:

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{BLv}{R}$$

Por lo tanto, la fuerza F será:

$$F = iLB = \frac{B^2L^2v}{R}$$

b) Para encontrar la distancia x que el alambre se mueve antes de llegar al reposo es necesario establecer una expresión para el desplazamiento de la pieza móvil. Se puede aplicar el balance de fuerzas sobre el alambre $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ considerando que en $t = 0$ $x_0 = 0$, lo cual establece que:

$$-F = ma_x$$
$$a_x = -\frac{F}{m} = -\frac{B^2L^2v}{mR}$$

Lo cual hace sentido, dado que la fuerza de Lorentz se opone al movimiento, por lo tanto, la aceleración en a_x deberá ser negativa de forma de ir frenando el desplazamiento. De esta manera se puede utilizar dicha expresión de forma de resolver para $v(t)$:

$$a_x = \frac{dv}{dt} = -\frac{B^2L^2v}{mR} \quad \rightarrow \quad \frac{dv}{v} = -\frac{B^2L^2}{mR}dt$$
$$\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{v} = -\frac{B^2L^2}{mR}\int_0^t dt$$
$$\ln(v) - \ln(v_0) = -\frac{B^2L^2t}{mR}$$
$$v(t) = v_0e^{-(B^2L^2t)/(mR)}$$

Una vez encontrada una expresión para $v(t)$ se procede a encontrar una para $x(t)$:

$$v = \frac{dx}{dt} = v_0e^{-B^2L^2t/mR} \quad \rightarrow \quad dx = v_0e^{-(B^2L^2t)/(mR)}dt$$

$$\int_0^x dx = \int_0^t v_0e^{-(B^2L^2t)/(mR)}dt$$
$$x = v_0\left(-\frac{mR}{B^2L^2}\right)\left[e^{-(B^2L^2t)/(mR)}\right]_0^t$$

$$x(t) = \frac{mRv_0}{B^2L^2}\left(1 - e^{-(B^2L^2t)/(mR)}\right)$$

Se sabe que eventualmente el alambre llegará al reposo, lo cual significa que en $t \to \infty$, $v = 0$. Evaluando $x(t)$ en infinito se encuentra la distancia recorrida por el alambre.

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \frac{mRv_0}{B^2L^2}(1 - 0) = \frac{mRv_0}{B^2L^2}$$

Por lo tanto, la distancia x que recorre el alambre antes de detenerse es $\frac{mRv_0}{B^2L^2}$.

4. Problema 2 (12 Puntos)

Considere el inductor de la Fig. 8 el cual está construido en base a un núcleo de material ferromagnético N97 ($\mu_r = 2300$) de longitud efectiva l_e de 146 mm y área equivalente A_c de 910 mm^2. Recuerde que se deben usar las unidades expresadas en metros.

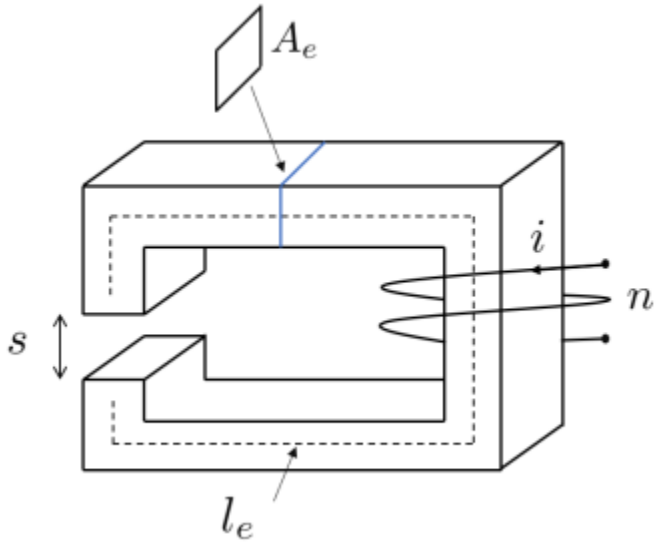


Figura 8: Diseño de inductor en base a núcleo de material ferromagnético.

Se desea diseñar un inductor de tal forma que sea capaz de soportar una corriente de 10 A y que presente una inductancia de 300 μH.

1. (4 puntos) Encuentre una expresión para realizar el cálculo del inductor en función del número de vueltas n, el área transversal del núcleo A_c, la corriente de operación i y la densidad de flujo magnético a la que se desea operar B_{op}. Recuerde que:

$$L = n\frac{d\Phi}{di}$$

$$B = \mu_r \mu_0 H$$

.

2. (4 puntos) Escoja un punto de operación de B_{op} para el diseño del inductor e indiqué claramente el motivo por el cual ha escogido dicho punto. Para ello, considere las curvas de histéresis mostradas en la Fig. 9 las cuales se encuentran detalladas para 25 y 100^{o}C.

3. (4 puntos) En base a la expresión obtenida en el ítem (1), determine el número de vueltas que es necesario para obtener el valor de inductancia deseado, el valor de la permeabilidad efectiva μ_{eff} (del circuito magnético equivalente) que debe ser alcanzada con el entrehierro para el punto de operación deseado y la longitud del entrehierro

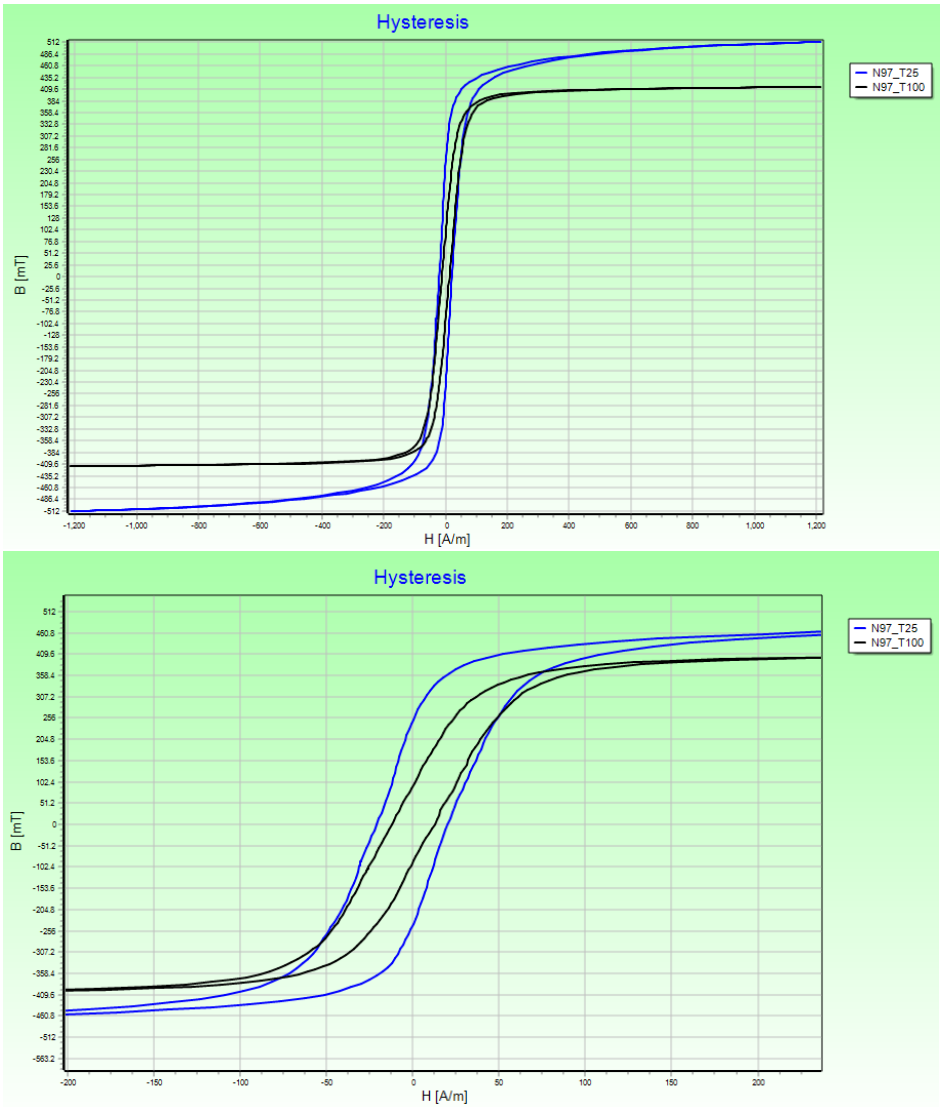


Figura 9: Curva de histéresis de material N97.

requerida (desprecie el Fringing Flux en el entrehierro y utilice áreas iguales para el núcleo y para el entrehierro). Recuerde que la inductancia puede ser calculada como:

$$L = \frac{n^2 \mu_{eff} \mu_0 A_c}{l_c}$$

Cuando se presenta entrehierro en el núcleo. Considere $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ T \cdot m \cdot A^{-1}$.

Problema 2 - Solución

1. En base a la definición de inductancia:

$$L = n\frac{d\Phi}{di}$$

Es posible obtener las siguientes relaciones teniendo en cuenta que $\Phi = A_c B$:

$$Ldi = nd\Phi$$
$$\int_0^{I_{op}} Ldi = nA_c \int_0^{B_{op}} dB$$

Si se considera una operación en la región lineal de la curva de histéresis de la Fig. 9 es posible simplificar la expresión a:

$$LI_{op} = nA_c B_{op}$$

Esta relación también puede ser obtenida mediante la resolución del circuito equivalente ($Ni = \Re\Phi$).

La forma de esta expresión que tiene relevancia es la siguiente:

$$n = \frac{LI_{op}}{A_c B_{op}}$$

Con ella se establece el número de vueltas requerido para que dada una corriente de operación I_{op} se establezca la densidad de flujo deseada B_{op} para un valor de inductancia requerida L en un núcleo de área transversal equivalente A_c.

La densidad de flujo B_{op} es obtenida ajustando la curva de histéresis en función de los requerimientos del sistema. Esto se realiza calculando el valor de la permeabilidad efectiva equivalente μ_{eff} en función de los parámetros de diseño.

En la expresión:

$$L = \frac{n^2 \mu_{eff} \mu_0 A_c}{l_c}$$

Todas los valores son conocidos y es posible obtener μ_{eff}. Esto significa que: Si damos n vueltas a un núcleo de área A_c y longitud l_c cuya permeabilidad relativa sea μ_{eff} obtendremos una inductancia de L Henrios.

2. Como se observa en las curvas de la Fig. 9, la temperatura juega un rol importante en el comportamiento del núcleo. En un circuito eléctrico siempre existen pérdidas debido a la resistividad de los conductores eléctricos. En un transformador se acumulan n vueltas en el núcleo y cada una de estas contribuye a la resistencia total R del inductor y a sus pérdidas por conducción (I^2R).

   Además, en el núcleo se produce el mismo fenómeno de disipación de calor, pero este se debe las pérdidas asociadas a la curva de histéresis (área encerrada por ella) y a otros fenómenos (corrientes parásitas) que varían según la calidad y aplicación del material utilizado.

   Toda esta disipación de calor se traduce en un cambio en la curva de histéresis y estas muestran que a mayor temperatura (100°C), el núcleo presenta un punto de saturación menor, es decir, se llega al codo de la curva con una magnitud menor de B_{op}. El valor que se debe escoger en la curva debe ser en la zona lineal dado que en dicho punto el valor de la inductancia es estable en magnitud. Notar que:

$$B = \mu_r \mu_0 H$$

   Es decir, la permeabilidad relativa del material μ_r (o μ_r si este presenta entrehierro) describe la relación entre B y H. En la zona de saturación μ_r tiende a un valor sumamente pequeño y, por ende, también varía la inductancia (tiende a disminuir). Esto significa que, si se opera en dicha zona, el elemento, ya sea inductor o cualquier aparato electromagnético, se comporta como una simple resistencia asociada al devanado.

   Por este motivo y dado que no se detalla más información como la temperatura de operación o la deseada, el punto de operación es seleccionado en 250 [mT] para los cálculos numéricos dado que en este punto se puede aprovechar al máximo la zona lineal de la curva de 100°C. Los valores obtenidos a partir de aquí son evaluados con tolerancia a la falta de resolución en la imagen del documento físico.

3. En base a los valores entregados en el problema se obtiene:

$$\mu_r = 2300$$
$$A_c = 910[mm^2] = 910 \cdot 10^{-6}[m^2]$$
$$l_c = 146[mm] = 146 \cdot 10^{-3}[m]$$
$$L = 300[\mu H] = 300 \cdot 10^{-6}[H]$$
$$I_{op} = 10[A]$$
$$B_{op} = 250[mT] = 250 \cdot 10^{-3}[T]$$

$$n = \frac{L I_{op}}{A_c B_{op}} = 13.19$$

En este punto se debe considerar que si se toma $n = 13$ el inductor presentará un valor final menor al deseado. En el caso contrario este valor será mayor. Para $n = 13$ se tiene:

$$L = \frac{n^2 \mu_{eff} \mu_0 A_c}{l_c}$$

$$\mu_{eff} = \frac{L l_c}{n^2 \mu_0 A_c} = 226.64$$

Dado que la permeabilidad del núcleo no es lo suficientemente baja (μ_r es 2300 lo cual significa que para una pequeña corriente se produce un gran flujo) por lo cual es necesario agregar un entrehierro para disminuir el valor de μ_r a μ_{eff}.

Si:

$$L = \frac{n^2 \mu_{eff} \mu_0 A_c}{l_c}$$

Entonces la longitud del entrehierro puede ser obtenida al resolver el circuito magnético equivalente ($nI_{op} = \Phi(\Re_s + \Re_c)$) considerando que las áreas de núcleo y entrehierro son iguales. Así, se obtiene:

$$\frac{1}{\mu_{eff}} = \frac{1}{\mu_r} + \frac{l_s}{l_c}$$

Y el valor del entrehierro es de 0.581 mm.

5. Problema 3 (12 Puntos)

Considere un transformador monofásico de 1 MVA y 7967/66 kV utilizado en la etapa de generación del sistema de transmisión. Cuyo circuito equivalente referido al primario se muestra en la Fig. 10.

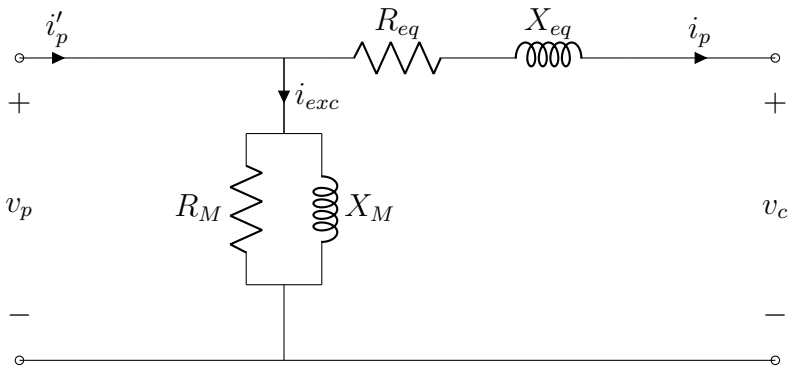


Figura 10: Circuito equivalente simplificado de transformador referido al primario.

1. (3 puntos) Obtenga los parámetros de la rama serie y de la rama de magnetización del circuito equivalente simplificado del transformador mostrado en la Fig. 10. Considere que el devanado de 7967 V fue considerado como primario en las pruebas tabuladas en la Tabla 1.

Tabla 1: Pruebas de transformador monofásico. Nominal implica en base a los valores de placa (tensión y potencia).

Prueba	Vacío	Cortocircuito
Tensión Primario	Nominal	41.36 [V]
Corriente Primario	2.659 [A]	Nominal
Potencia Activa Primario	6347.3 [W]	1575.5 [W]

2. (3 puntos) Considere que se conecta una carga en el devanado secundario (v_c) del transformador cuya impedancia es $Z_{c1} = 100 + j30\ \Omega$. Utilice solo la rama serie del transformador y obtenga las potencias del generador, del transformador y de la carga. Determine la regulación de tensión del sistema y dibuje su diagrama fasorial.

$$\%Reg = 100 \cdot \frac{|v_p - v_c|}{v_c}$$

3. (3 puntos) Considere que se conecta una carga adicional paralela a Z_{c1} (en los terminales de v_c) cuya impedancia es $Z_{c2} = -j363.333\ \Omega$. Determine nuevamente las potencias del sistema (generador, transformador y cargas).

4. (3 puntos) Comente las variaciones en las magnitudes de las potencias obtenidas e indiqué quién suministra la potencia activa consumida por la carga Z_{c1} y por el transformador y quién suministra la potencia reactiva de Z_{c1}, Z_{c2} y del transformador.

Problema 3 - Solución

1. Al realizar la prueba de vacío en un transformador se busca obtener los parámetros de la rama serie teniendo en cuenta que, para el esquema de la Fig. 10, al estar en vacío (sin corriente i_p) la única impedancia que contribuye a la corriente del primario i'_p es la rama paralelo. En dicho caso, teniendo en cuenta la tensión nominal de vacío como la tensión nominal del transformador (7967 V), se tiene:

$$\begin{aligned} i_p^{\prime vacio} &= 2.659\angle\theta \\ \theta &= -\arccos\frac{P^{vacio}}{|i_p^{\prime vacio}|\cdot|v_p^{vacio}|} = -\arccos\frac{6347.3}{2.659\cdot 7967} = -72.57^o \\ i_p^{\prime vacio} &= 2.659\angle -72.57 = 0.7965 - j2.5369[A] \\ jX_M &= \frac{|v_p^{vacio}|}{\Im|i_p^{\prime vacio}|} = \frac{7967}{-j2.5369} = j3.14[k\Omega] \\ R_M &= \frac{|v_p^{vacio}|}{\Re|i_p^{\prime vacio}|} = \frac{7967}{0.7965} = 10[k\Omega] \end{aligned} \tag{11}$$

   Para la prueba de cortocircuito se debe considerar la corriente nominal del sistema (I = S/V) de 125.52 A. Además, en esta prueba, se cortocircuita la salida del transformador a través de la impedancia serie, lo cual debe ser realizado a tensión reducida en el primario para evitar daños de sobrecalentamiento en los devanados del transformador. Se debe recordar que la impedancia serie del transformador debe ser pequeña para que este pueda cumplir su propósito. Además, al energizarse con tensión reducida en el primario, la contribución a la corriente i'_p de la rama paralela se vuelve despreciable en comparación a la contribución de la rama serie. Es por este motivo que se desprecia la rama paralela del transformador para la obtención de la impedancia serie. En este caso se tiene:

$$\begin{aligned} i_p^{\prime cc} &= 125.52\angle\theta \\ \theta &= -\arccos\frac{P^{cc}}{|i_p^{\prime cc}|\cdot|v_p^{cc}|} = -\arccos\frac{1575.5}{125.52\cdot 41.36} = -72.33^o \\ i^{\prime cc} &= 125.52\angle -72.33[A] \\ Z_{eq} &= \frac{v_p^{cc}}{i_p^{\prime cc}} = \frac{41.36\angle 0^o}{125.52\angle -72.33^o} = 0.1 + j0.314[\Omega] \end{aligned} \tag{12}$$

2. En este caso, al despreciar la rama de magnetización, se puede resolver el circuito directamente al conectar la impedancia de carga Z_{c1} en los terminales de v_c. Con ello se tiene:

$$
\begin{aligned}
i_p &= \frac{v_p}{Z_{eq} + Z_{c1}} = \frac{7967\angle 0^o}{0.1 + j0.314 + 100 + j30} = 76.17\angle -16.85^o[A] \\
v_c &= v_p - Z_{eq} i_p = 7967\angle 0^o - (0.1 + j0.314)(76.17\angle -16.85^o) = 7952.8\angle -0.15^o[V] \\
S_g &= v_p i_p^* = (7967\angle 0^o)(76.17\angle -16.85^o)^* = 580792.6 + j175904.8[VA] \\
S_c &= v_c i_p^* = (7952.8\angle -0.15^o)(76.17\angle -16.85^o)^* = 580215.1 + j174072.9[VA] \\
S_L &= (i_p Z_{eq}) i_p^* = (76.17\angle -16.85^o)(0.1 + j0.314)(76.17\angle -16.85^o)^* = 580.2 + j1821.8[VA]
\end{aligned}
\tag{13}
$$

En base a estos resultados se puede obtener la regulación de tensión como:

$$
\%Reg = 100 \cdot \frac{|v_p - v_c|}{v_c} = 100 \cdot \frac{|7967 - 7952.8|}{7952.8} = 0.1786\,\% \tag{14}
$$

El diagrama fasorial del sistema se muestra en la Fig. 11. El diagrama se encuentra a escala en las tensiones y por este motivo v_p se encuentra prácticamente encima de v_c. La corriente y las caídas de tensión en la impedancia serie han sido escaladas en un factor de 100 para que puedan ser distinguidas en el diagrama.

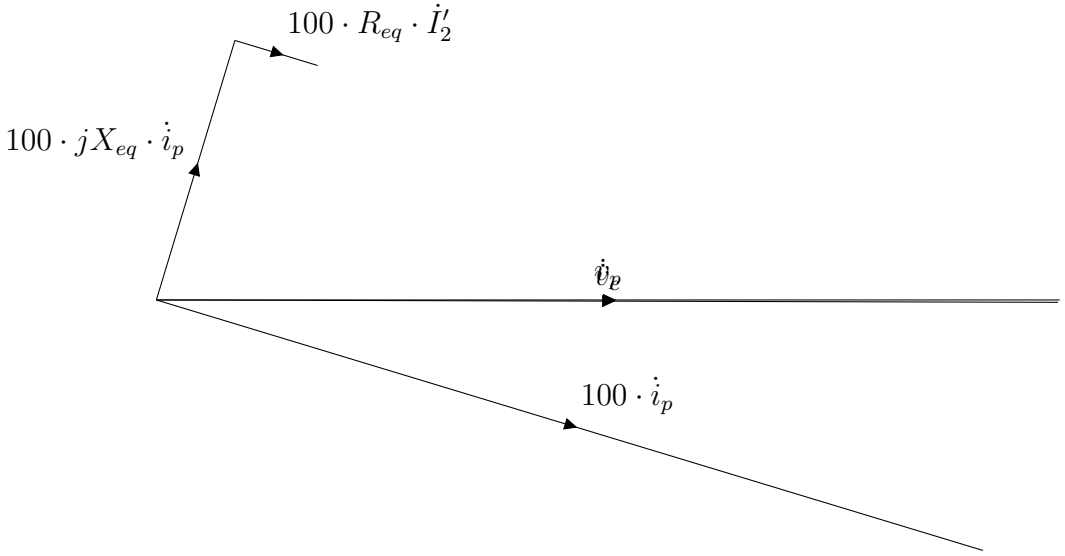


Figura 11: Diagrama fasorial de tensiones y corrientes de transformador monofásico.

3. En este nuevo caso, el ejercicio debe ser resuelto obteniendo la impedancia equivalente de la carga $Z_c = Z_{c1//Z_{c2}}$. Por lo tanto, se obtiene:

$$
\begin{aligned}
Z_c &= \frac{Z_{c1}Z_{c2}}{Z_{c1}+Z_{c2}} = \frac{(100+j30)(-j363.333)}{(100+j30)+(-j363.333)} = 109[\Omega] \\
i_p &= \frac{v_p}{Z_{eq}+Z_c} = \frac{7967\angle 0^o}{0.1+j0.314+109} = 73.02\angle -0.165^o[A] \\
v_c &= v_p - Z_{eq}i_p = 7967\angle 0^o - (0.1+j0.314)(73.02\angle -0.165^o) = 7959.66\angle -0.165^o[V] \\
i_{c1} &= \frac{v_c}{Z_{c1}} = \frac{7959.66\angle -0.165^o}{100+j30} = 76.24\angle -16.86^o[A] \\
i_{c2} &= \frac{v_c}{Z_{c2}} = \frac{7959.66\angle -0.165^o}{-j363.333} = 21.91\angle 89.835^o[A] \\
S_g &= v_p i_p^* = (7967\angle 0^o)(73.02\angle -0.165^o)^* = 581747.9 + j1675.3[VA] \\
S_{c1} &= v_c i_{c1}^* = (7959.66\angle -0.165^o)(76.24\angle -16.86^o)^* = 581264.5 + j174332.4[VA] \\
S_{c2} &= v_c i_{c2}^* = (7959.66\angle -0.165^o)(21.91\angle 89.835^o)^* = -j174396.2[VA] \\
S_L &= (i_p Z_{eq})i_p^* = (73.02\angle -0.165^o)(0.1+j0.314)(73.02\angle -0.165^o)^* = 533.2 + j1674.2[VA]
\end{aligned}
\tag{15}
$$

4. En base a los resultados obtenidos se puede concluir que:

   - Se observa que, el generador conectado en los terminales de entrada del transformador sigue suministrando la potencia activa de la carga Z_{c1} y de la componente resistiva del transformador R_{eq}.
   - Se observa que, al incluir la carga de carácter capacitivo en paralelo a la carga RL del caso inicial, se consigue compensar la demanda de potencia reactiva de forma local, con lo cual el generador ya no debe suministrar la potencia reactiva de la carga.
   - Ahora, el generador solo entrega los reactivos requeridos por la componente inductiva de la impedancia serie del transformador X_{eq}.
   - En el extremo de salida, la carga Z_{c1}, al ser de carácter inductivo, absorbe reactivos, mientras que la carga Z_{c2}, de carácter capacitivo, los suministra a la red.
   - Se debe tener en cuenta que, al aproximar los valores numéricos, existirán leves diferencias en las dígitos menos significativos de las potencias, mas su comportamiento resulta evidente.

6. Problema 4 (12 puntos)

Considere el circuito de la Fig. 12 el cual corresponde a la conexión serie-paralelo de dos transformadores monofásicos cuyas razones de transformación son a y b, respectivamente, acorde a lo retratado en el esquema. La corriente y el voltaje de entrada del sistema son definidos como I_1 y V_1, mientras que en la salida son definidos como I_2 y V_2.

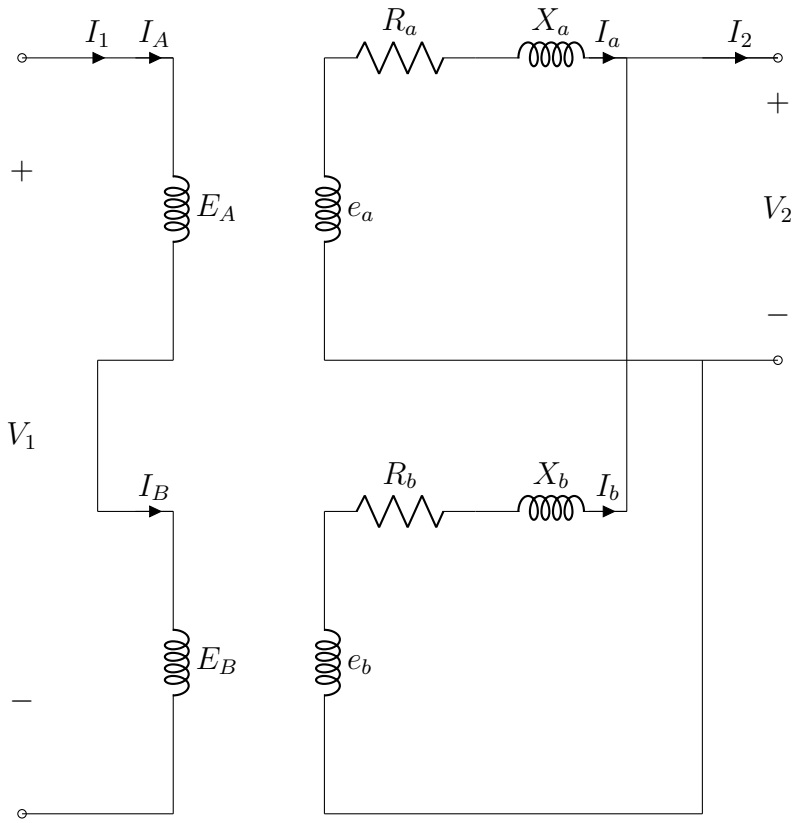


Figura 12: Conexión serie-paralelo de dos transformadores monofásicos.

1. (4 puntos) Determine una expresión para determinar el voltaje V_1 en la entrada en función de la tensión V_2, de la corriente I_2 y de los parámetros del sistema.

2. (4 puntos) Calcule el valor de la tensión de entrada y la potencia que absorbe el sistema cuando la tensión de la salida V_2 es de 220 V y la corriente I_2 es $50\angle -25.87$ A. Considere que la razón de transformación es $a = b = 0.5$ y que las impedancias son $Z_a = Z_b = 0.1 + j0.3\ \Omega$.

3. (4 puntos) Considere que la razón de transformación cambia siendo $a = 0.51$ y $b = 0.49$. Además, las impedancias equivalentes de cada unidad se modifican a $Z_a = 0.1 + j0.3\ \Omega$ y

$Z_a = 0.1 + j0.2\ \Omega$. Calcule nuevamente la tensión de la entrada y la potencia. Encuentre una expresión para la corriente circulante del sistema y determine su magnitud.

Problema 4 - Solución

1. Del esquema de la Fig. 12, se pueden establecer las relaciones que tienen voltajes y corrientes debido a la conexión serie-paralelo de ambas unidades.

$$\begin{aligned} I_1 &= I_A = I_B \\ V_1 &= E_A + E_B \\ I_2 &= I_a + I_b \\ e_a &= V_2 + Z_a I_a \\ e_b &= V_2 + Z_b I_b \end{aligned} \tag{16}$$

Además, de las relaciones de transformación de ambos transformadores se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{E_A}{e_a} &= a \\ \frac{E_B}{e_b} &= b \\ \frac{I_a}{I_A} &= a \\ \frac{I_b}{I_B} &= b \\ \frac{I_a}{I_b} &= \frac{aI_A}{bI_B} = \frac{aI_1}{bI_1} = \frac{a}{b} \end{aligned} \tag{17}$$

Notar que, en conjunto con $I_a + I_b = I_2$, esta última expresión, permite resolver el sistema de ecuaciones de I_a e I_b conocida la corriente I_2. Para este caso se cumple que:

$$
\begin{aligned}
I_2 &= I_a + I_b \\
I_2 &= I_a + \frac{b}{a} I_a \\
I_a &= \frac{I_2}{1 + \frac{b}{a}} \\
I_b &= \frac{I_2}{1 + \frac{a}{b}} \\
e_a &= V_2 + Z_a I_a \\
e_b &= V_2 + Z_b I_b \\
E_A &= a e_a = a(V_2 + Z_a I_a) \\
E_B &= b e_b = b(V_2 + Z_b I_b) \\
V_1 &= E_A + E_B = a(V_2 + Z_a I_a) + b(V_2 + Z_b I_b) \\
V_1 &= E_A + E_B = a(V_2 + Z_a \frac{I_2}{1 + \frac{b}{a}}) + b(V_2 + Z_b \frac{I_2}{1 + \frac{a}{b}}) \\
V_1 &= (a+b)V_2 + aZ_a \frac{I_2}{1 + \frac{b}{a}} + bZ_b \frac{I_2}{1 + \frac{a}{b}} \\
V_1 &= (a+b)V_2 + \frac{I_2}{1 + \frac{b}{a}} (aZ_a + bZ_b \frac{1 + \frac{b}{a}}{1 + \frac{a}{b}}) \\
V_1 &= (a+b)V_2 + \frac{I_2}{1 + \frac{b}{a}} (aZ_a + \frac{b^2}{a} Z_b) \\
V_1 &= (a+b)V_2 + \frac{I_2}{a+b} (a^2 Z_a + b^2 Z_b)
\end{aligned}
\tag{18}
$$

2. Resolviendo para los valores entregados se tiene:

$$
\begin{aligned}
V_1 &= (a+b)V_2 + \frac{I_2}{a+b} (a^2 Z_a + b^2 Z_b) \\
V_1 &= (0.5+0.5)(220\angle 0^o) + \frac{50\angle -25.87^o}{0.5+0.5} \left[0.5^2 \cdot (0.1 + j0.3) + 0.5^2 \cdot (0.1 + j0.3)\right] \\
V_1 &= 225.6\angle 1.44^o [V] \\
I_a &= I_b = 0.5 \cdot I_2 = 25\angle -25.87^o [A] \\
I_1 &= I_A = I_B = \frac{I_a}{a} = \frac{I_b}{b} = \frac{25\angle -25.87^o}{0.5} = 50\angle -25.87^o [A] \\
S_1 &= V_1 I_1^* = (225.6\angle 1.44^o)(50\angle -25.87^o)^* = 10022.7 + j5175.3 [VA]
\end{aligned}
\tag{19}
$$

3. Reemplazando los nuevos valores en la expresión obtenida en el ítem (1) de este problema, se obtiene:

$$
\begin{aligned}
V_1 &= (a+b)V_2 + \frac{I_2}{a+b}(a^2 Z_a + b^2 Z_b) \\
V_1 &= (0.51+0.49)(220\angle 0^o) + \frac{50\angle -25.87^o}{0.51+0.49}\left[0.51^2 \cdot (0.1+j0.3) + 0.49^2 \cdot (0.1+j0.2)\right] \\
V_1 &= 225.05\angle 1.166^o[V] \\
I_a &= \frac{I_2}{1+\frac{b}{a}} = 25.5\angle -25.87^o[A] \\
I_a &= \frac{I_2}{1+\frac{a}{b}} = 24.5\angle -25.87^o[A] \\
I_1 &= I_A = I_B = \frac{I_a}{a} = \frac{I_b}{b} = \frac{25.5\angle -25.87^o}{0.51} = 50\angle -25.87^o[A] \\
S_1 &= V_1 I_1^* = (225.05\angle 1.166^o)(50\angle -25.87^o)^* = 10022.7 + j5114.8[VA]
\end{aligned}
\tag{20}
$$

La corriente circulante se origina por la diferencia de tensión de las tensiones inducidas en el secundario (e_a y e_b), en este caso ocasionado por la diferencia en la razón de transformación. Esta corriente se establece resolviendo el lazo cerrado que considera ambas fuentes. Para esta resolución se considera la corriente circulante Δi desde e_a hacia e_b. Por lo tanto, se tiene:

$$
\begin{aligned}
e_a &= V_2 + Z_a I_a \\
e_b &= V_2 + Z_b I_b \\
\Delta i &= \frac{e_a - e_b}{Z_a + Z_b} \\
\Delta i &= \frac{V_2 + Z_a I_a - (V_2 + Z_b I_b)}{Z_a + Z_b} \\
\Delta i &= \frac{Z_a I_a - Z_b I_b}{Z_a + Z_b} \\
\Delta i &= \frac{(0.1+j0.3)(25.5\angle -25.87^o) - (0.1+j0.2)(24.5\angle -25.87^o)}{(0.1+j0.3)+(0.1+j0.3)} \\
\Delta i &= 5.11\angle -6.15^o[A]
\end{aligned}
\tag{21}
$$

Esto implica que, cada corriente de los secundarios del transformador, tiene una componente que abastece corriente a la carga en sus salidas, y, además, presentan una componente que circula entre los transformadores debido al desbalance en la conexión en paralelo. Esto puede ser resumido como:

$$
\begin{aligned}
I_a &= I_{ao} + \Delta i \\
I_b &= I_{bo} - \Delta i
\end{aligned}
\tag{22}
$$