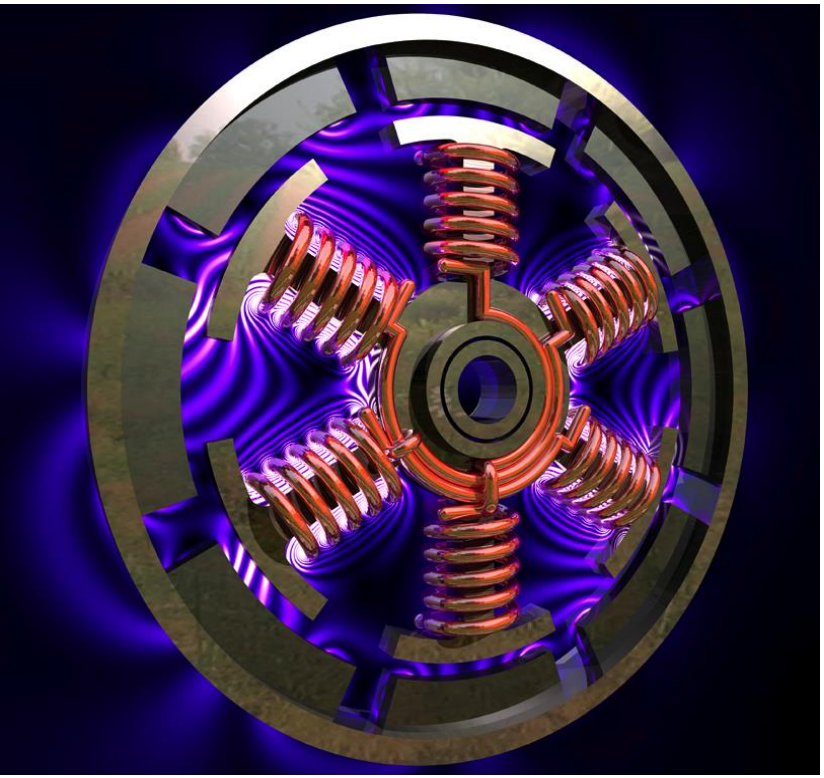
Javier Pereda
Profesor
Departamento de Ingeniería Eléctrica
Pontificia Universidad Católica de Chile

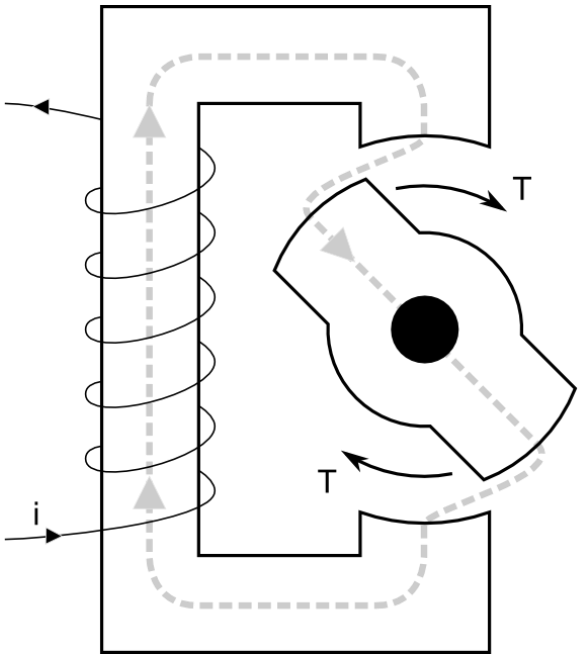


IEE 2213
Máquinas Eléctricas

5. Máquinas y Campos Magnéticos Rotatorios

Máquina básica de reluctancia y de doble excitación; motores paso a paso (stepper) máquina cilíndrica; distribución sinusoidal; campo magnético rotatorio; pares de polos; condición de torque medio; introducción a las principales máquinas.

Máquina de reluctancia básica



Máquina de reluctancia básica

Similar al movimiento lineal ($x \rightarrow \theta$)

Dispositivo de excitación simple: suponiendo sistema lineal donde la única reluctancia es el entrehierro. Basándonos en lo visto en el capítulo 4 (conversión electromecánica) tenemos:

$$L = N\frac{\Phi}{i} \Rightarrow \lambda = L(\theta)i \Rightarrow \begin{cases} W'_m(i,\theta) = \frac{1}{2}i^2 L(\theta) & \Big|_{i\ cte} \Rightarrow T_e = \frac{1}{2}i^2\frac{dL}{d\theta} \\ W_m(\Phi,\theta) = \frac{1}{2}\Phi^2\Re(\theta) & \Big|_{\lambda\ cte} \Rightarrow T_e = -\frac{1}{2}\Phi^2\frac{d\Re}{d\theta} \end{cases}$$

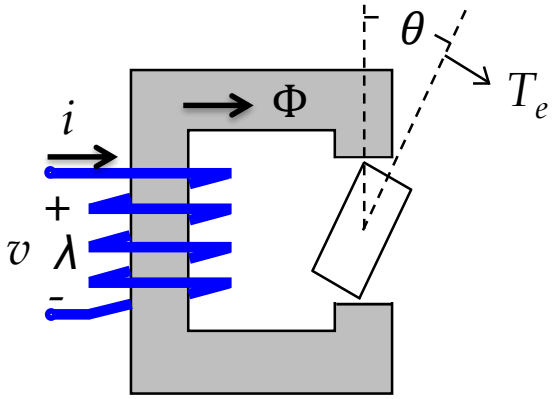
En la primera expresión el torque se produce cuando hay una variación en la **inductancia** y además este tiende a aumentarla (= disminuir la reluctancia).

En la segunda expresión el torque se produce cuando hay variación de **reluctancia** y este tiende a alinear el rotor con el estator (disminuir la reluctancia = aumentar el flujo).

Por lo tanto, estamos frente a un **motor de reluctancia**.

La reluctancia e inductancia tendrán una forma sinusoidal como función doble (dos polos) del ángulo mecánico θ.

El valor máximo de inductancia será cuando el rotor está alineado con el estator (**eje directo "d"**) y será mínimo cuando este a 90º del estator (**eje en cuadratura "q"**).

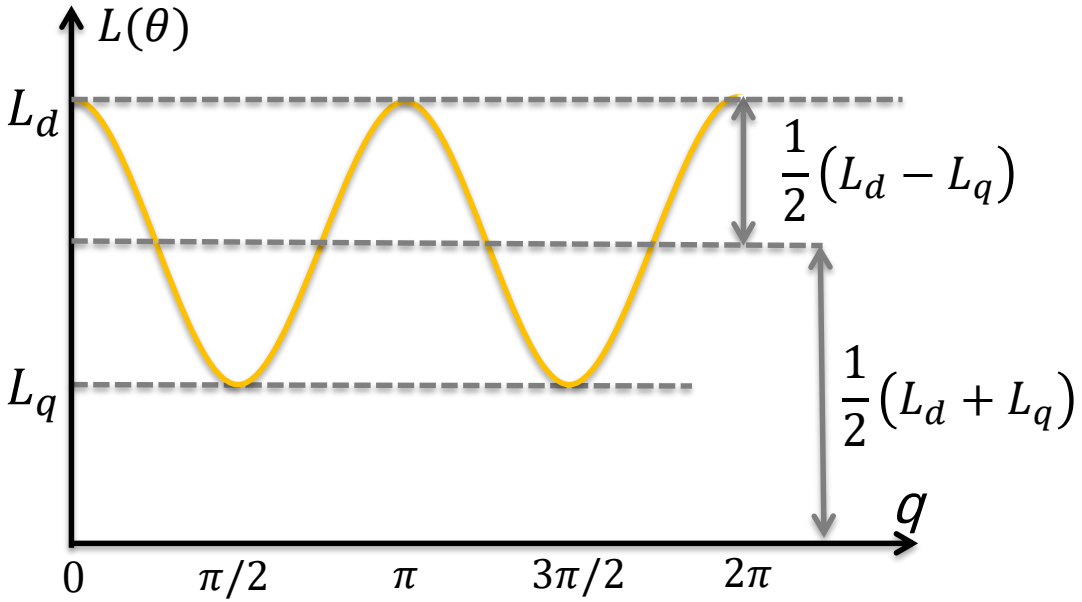


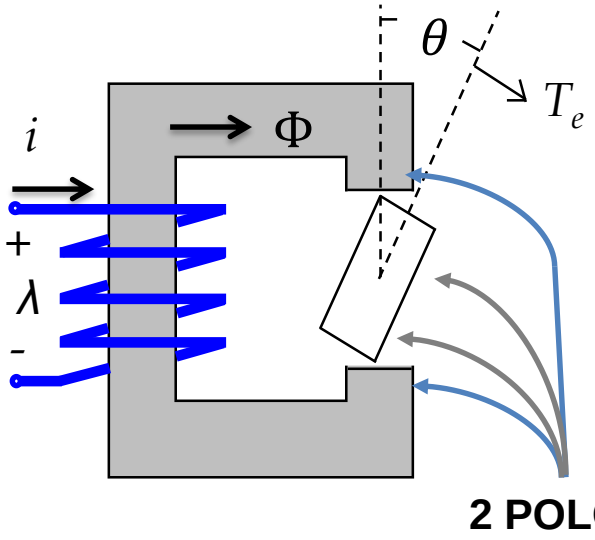
Máquina de reluctancia básica

Inductancia y Reluctancia variable según θ

Dispositivo de excitación simple:

El valor máximo de inductancia será cuando el rotor está alineado con el estator (**eje directo "d"**) y será mínimo cuando este a 90º del estator (**eje en cuadratura "q"**).





2 POLOS

$$L(\theta) = \frac{1}{2}(L_d + L_q) + \frac{1}{2}(L_d - L_q)\cos 2\theta \quad \Rightarrow \quad T_e = \frac{1}{2} i^2 \frac{dL}{d\theta} \quad \Rightarrow \quad T_e = \frac{1}{2} i^2 (L_d - L_q)\sin 2\theta$$

$$L(\theta) = L_a + L_b \cos 2\theta$$

Máquina de reluctancia básica

Torque de Reluctancia

$$T_e = -\frac{1}{2} i^2 (L_d - L_q) \sin 2\theta$$

Dispositivo de excitación simple: De la ecuación de torque tenemos que:

- Para que exista torque Ld ≠ Lq (torque de reluctancia). Por lo tanto, el entrehierro debe ser asimétrico, ya que si es cilíndrico no habrá torque (motor de reluctancia).
- La dirección de giro está determinada por la posición inicial del rotor, no por el sentido de la corriente.
- El signo negativo nos dice que el torque tiende a alinear el eje a θ=0, por lo tanto el rotor no tenderá a girar, más bien a alinearse.

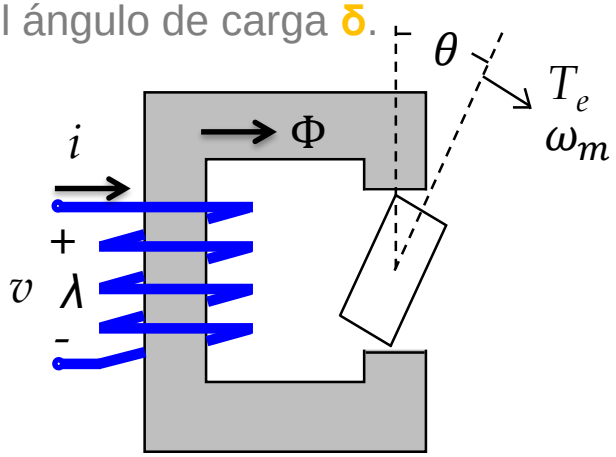
¿Qué sucede si lo alimentamos con corriente alterna?

Tarea: Calcule el torque medio de la máquina y demuestre matemáticamente que el torque medio resultante es nulo a menos que la velocidad mecánica sea igual a de alimentación (sincrónica). Dibuje el torque medio en función del ángulo de carga **δ**.

$$i(t) = I_0 \cos \omega t \qquad \theta(t) = \omega_m t + \delta$$

$$T_{med} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} T_e \, d(\omega t)$$

ω_m?



Máquina de reluctancia básica AC

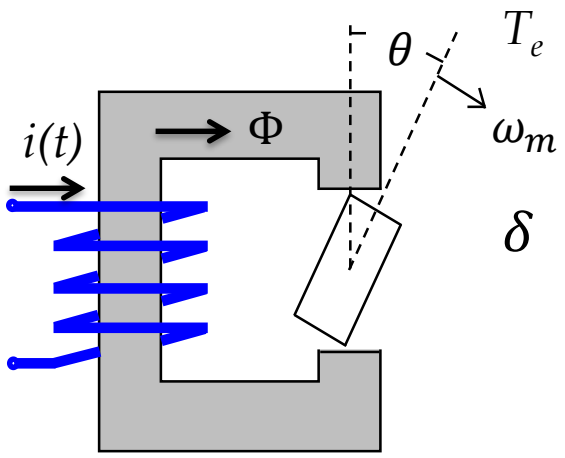
Corriente Alterna

Solución Tarea: **¿Qué sucede si lo alimentamos con corriente alterna?**

$$T_e = -\frac{1}{2} i^2 \left(L_d - L_q\right) \sin 2\theta$$

$$i(t) = I_m \cos \omega t$$

$$\theta(t) = \omega_m t + \delta$$



Máquina de reluctancia básica AC

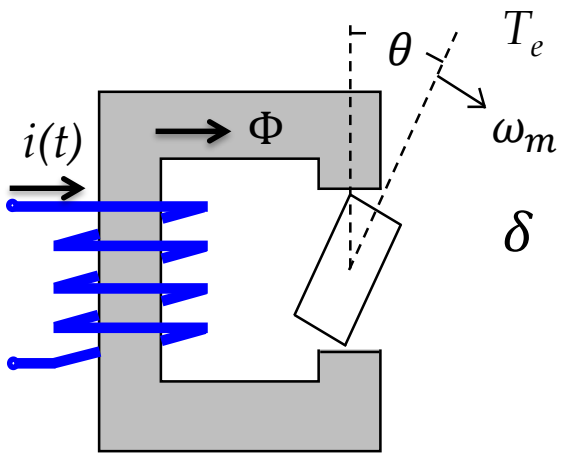
Corriente Alterna

Solución Tarea: **¿Qué sucede si lo alimentamos con corriente alterna?**

$$T_e = -\frac{1}{2} i^2 (L_d - L_q) \sin 2\theta$$

$$i(t) = I_m \cos \omega t$$

$$\theta(t) = \omega_m t + \delta$$



$$T_e = -\frac{1}{2} I_m^2 (L_d - L_q) \cos^2 \omega t \sin 2(\omega_m t + \delta)$$

$$T_e = -\frac{1}{2} I_m^2 (L_d - L_q) \frac{1 + \cos 2\omega t}{2} \sin 2(\omega_m t + \delta)$$

$$T_e = -\frac{1}{4} I_m^2 (L_d - L_q) [\sin 2(\omega_m t + \delta) + \cos 2\omega t \sin 2(\omega_m t + \delta)]$$

Máquina de reluctancia básica AC

Torque Medio

Solución Tarea: **¿Qué sucede si lo alimentamos con corriente alterna?**

$$T_e = -\frac{1}{4} I_m^2 (L_d - L_q)[\sin 2(\omega_m t + \delta) + \cos 2\omega t \sin 2(\omega_m t + \delta)]$$

$$\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$$

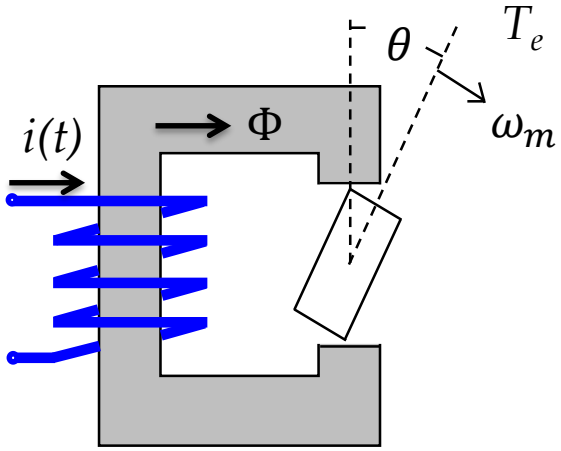
$$T_e = -\frac{1}{4} I_m^2 (L_d - L_q)\left[\sin 2(\omega_m t + \delta) + \frac{1}{2}\sin 2((\omega_m + \omega)t + \delta) + \frac{1}{2}\sin 2((\omega_m - \omega)t + \delta)\right]$$

Calculamos el torque medio

$$T_{med} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} T_e \, d(\omega t)$$

$$T_{med} = 0 \qquad |\omega| \neq |\omega_m|$$

$$T_{med} = -\frac{1}{8} I_m^2 (L_d - L_q)\sin 2\delta$$



Sólo hay torque medio a velocidad síncrona $|\omega| = |\omega_m|$

Máquina de reluctancia básica AC

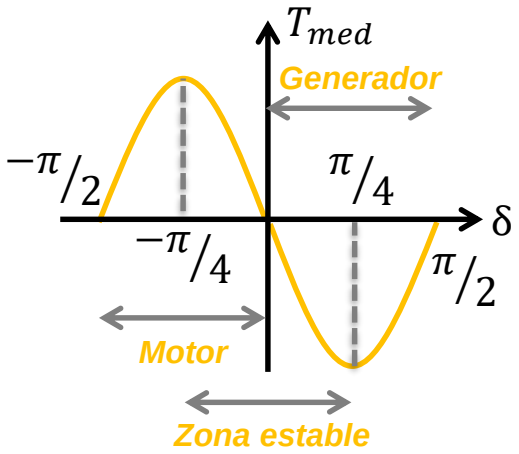
Análisis del Torque Medio

Solución Tarea: **¿Qué sucede si lo alimentamos con corriente alterna?**

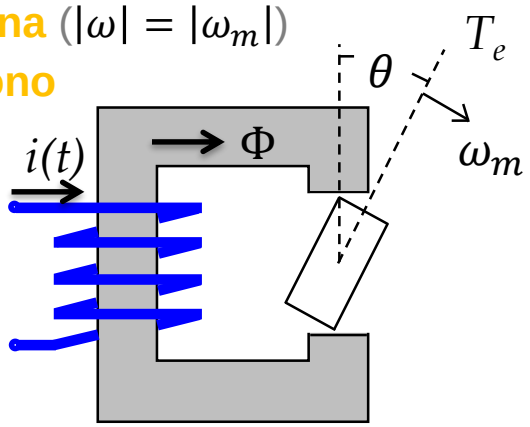
$$T_e = -\frac{1}{2} i^2 (L_d - L_q) \sin 2\theta$$

$$T_{med} = -\frac{1}{8} I_m^2 (L_d - L_q) \sin 2\delta$$

$$|\omega| = |\omega_m|$$



- El motor girará sólo si es ayudado o inicia en una posición desfasada respecto a la corriente (el desfase se llama **ángulo de carga δ**).
- El motor tendrá un torque medio sólo si gira a velocidad **síncrona** ($|\omega| = |\omega_m|$)
- Por lo tanto, el motor de reluctancia es un tipo de **motor síncrono**
- El torque medio es el relevante en máquinas rotatorias.
- El torque medio es una función respecto de **δ**
- El torque medio máximo se genera con **δ = ± 45º**
- Si **δ > 0º** la maquina funciona como generador.
- Si **δ < 0º** la maquina funciona como motor.



Máquina de reluctancia básica AC

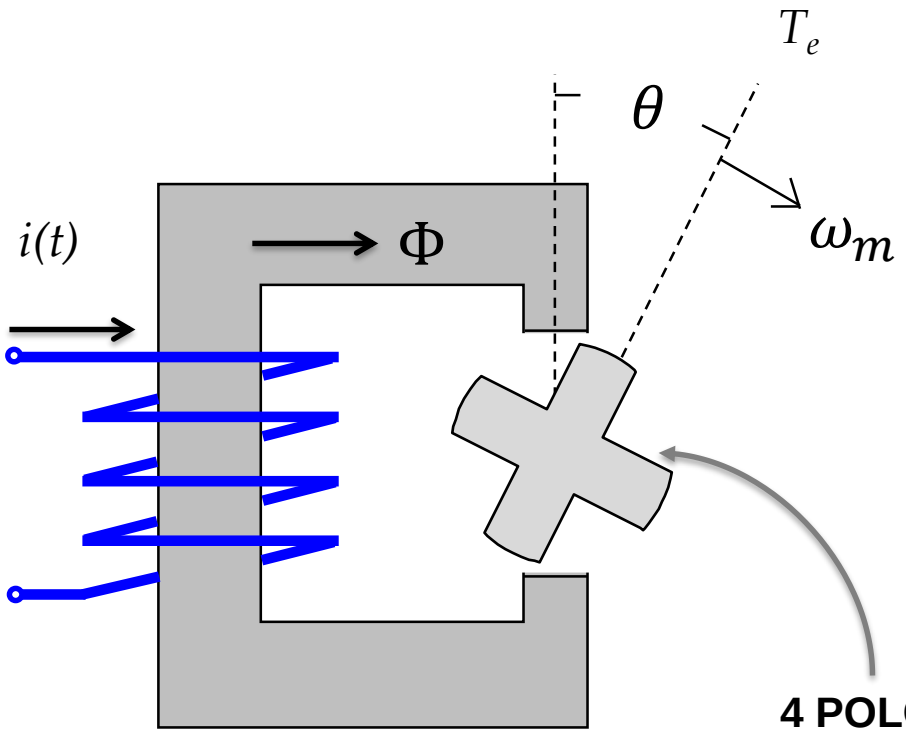
Análisis del Torque Medio

Tarea: **¿Cómo será la inductancía en el siguientes ejemplo (2/4 polos)?**

Nota: Observar que el torque ahora (dos pares de polos) es el doble que con un par de polos, pero es función cuádruple de θ, lo que se traduce en que existirá torque medio sólo si:

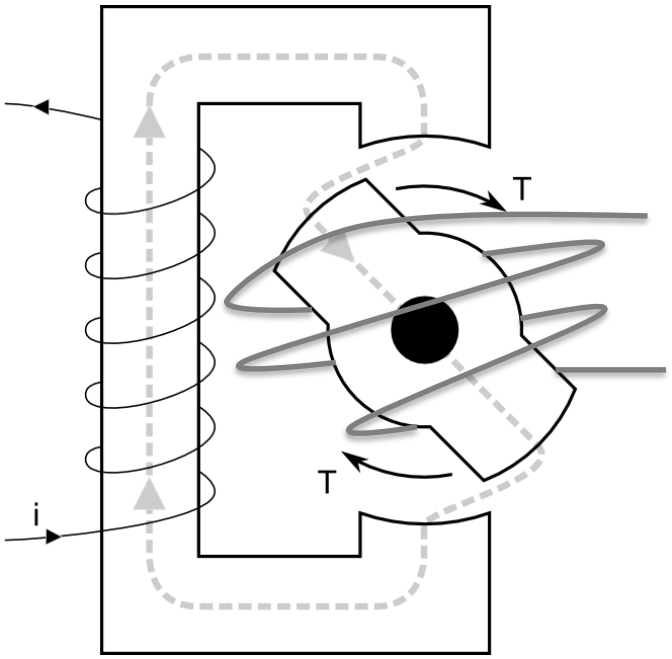
$$|\omega_m| = \frac{|\omega|}{2} = \frac{|\omega|}{p}$$

En resumen, el torque es proporcional a los pares de polos *p* y la velocidad es inversamente proporcional a *p*. En este caso hay **torque medio** si el rotor gira a la mitad de la frecuencia AC (ω).



$$L(\theta) = \frac{1}{2}(L_d + L_q) + \frac{1}{2}(L_d - L_q)\cos 4\theta \quad \rightarrow \quad T_e = \frac{1}{2} i^2 \frac{dL}{d\theta} \quad \rightarrow \quad T_e = -i^2(L_d - L_q)\sin 4\theta$$

Máquina básica con doble alimentación



Máquina de Doble Excitación

Caso general de máquina de una excitación

Dispositivo de doble excitación: Suponiendo sistema lineal y basándonos en lo visto en el lectura 4 (conversión electromecánica) tenemos:

$$L = N\frac{\Phi}{i} \quad \Rightarrow \quad [\Psi] = [L(\theta)][i] \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \psi_1 &= L_{11}i_1 + L_{12}i_2 \\ \psi_2 &= L_{21}i_1 + L_{22}i_2 \end{aligned}$$

$$[\Psi] = [\lambda]$$

Donde L_{ii} son las inductancias propias de la bobina "i" (autoinductancia) y L_{ij} es la inductancia mutua entre las bobinas i y j. Notar que $L_{ij}=L_{ji}$.
Por lo tanto, En sistemas multialimentados tendremos una matriz de inductancia:

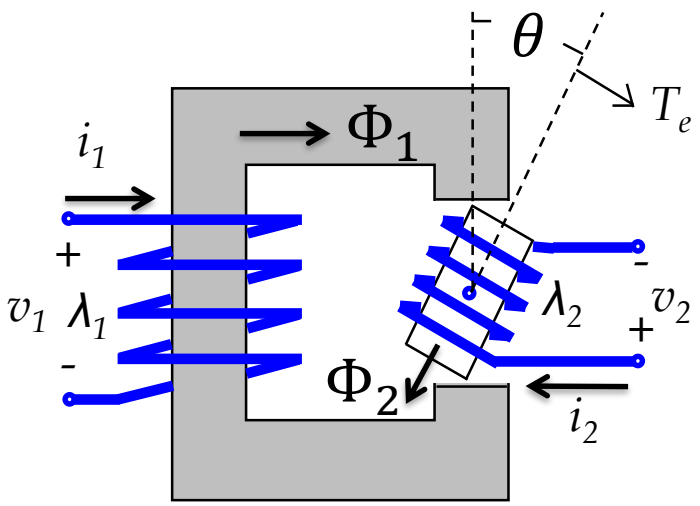
$$L(\theta) = \begin{bmatrix} L_{11}(\theta) & L_{12}(\theta) \\ L_{21}(\theta) & L_{22}(\theta) \end{bmatrix}$$

Como se vio anteriormente, las inductancias son del tipo:

$$L_{11}(\theta) = L_a + L_b\cos 2\theta$$ *Cte. si el rotor es cilíndrico*

$$L_{22}(\theta) = L_c + L_d\cos 2\theta$$ *Cte. si el estaror es cilíndrico*

$$L_{12}(\theta) = L_m\cos\theta$$ *Depende de la alineación de los ejes magnéticos*



Máquina de Doble Excitación

Torque de Reluctancia + Torque "Mutuo"

Dispositivo de doble excitación:

La relación de voltaje y corriente es:

$$v_1 = R_1 i_1 + \frac{d\psi_1}{dt} = R_1 i_1 + \frac{d}{dt}(L_{11} i_1 + L_{12} i_2)$$

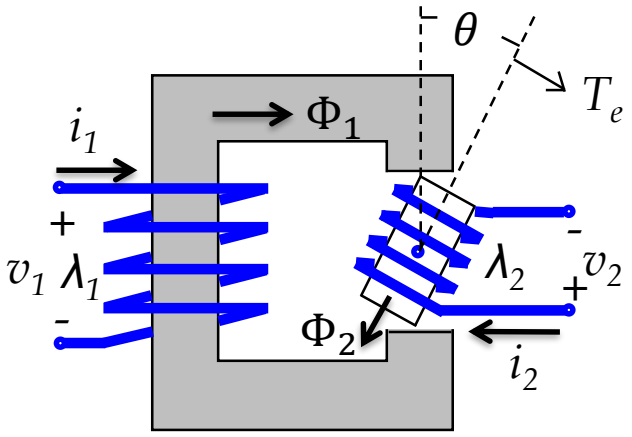
$$v_2 = R_2 i_2 + \frac{d\psi_2}{dt} = R_2 i_2 + \frac{d}{dt}(L_{21} i_1 + L_{22} i_2)$$

El torque esta dado por:

$$T_e(i,\theta) = \frac{1}{2}[i]^T \frac{d}{d\theta}[L(\theta)][i] \quad \Rightarrow \quad T_e(i,\theta) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} i_1 & i_2 \end{bmatrix} \cdot \frac{d}{d\theta}\begin{bmatrix} L_{11}(\theta) & L_{12}(\theta) \\ L_{21}(\theta) & L_{22}(\theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

$$T_e(i,\theta) = \frac{1}{2} i_1^2 \frac{dL_{11}}{d\theta} + i_1 \cdot i_2 \frac{dL_{12}}{d\theta} + \frac{1}{2} i_2^2 \frac{dL_{22}}{d\theta}$$

Torque de Reluctancia — **Torque de Reluctancia**



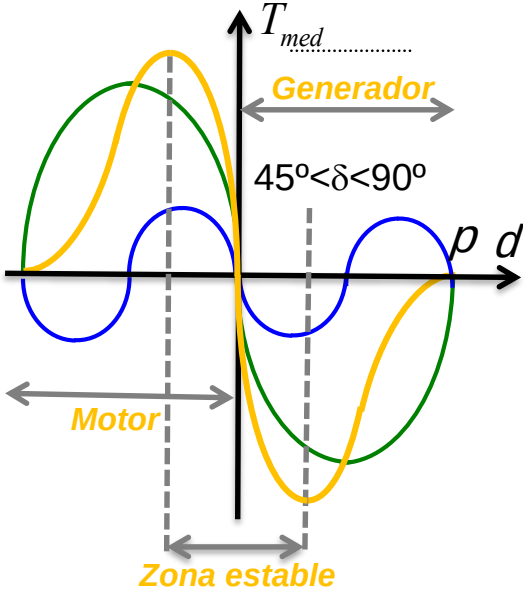
Máquina de Doble Excitación

Torque de Reluctancia + Torque "Mutuo"

Dispositivo de doble excitación: alimentación estator AC y rotor DC **(Motor Síncrono monofásico de polos salientes)**

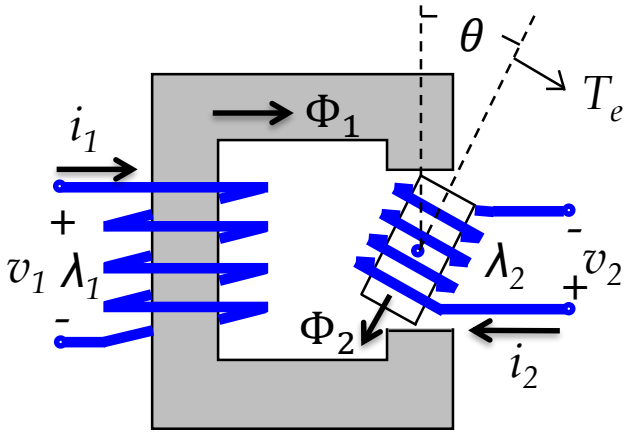
$$i_1(t) = I_1 \cos\omega t \qquad \theta(t) = \omega_m t + \delta$$

Se puede calcular el torque medio de forma muy similar al caso con una excitación. La ecuación T_{med} mostrará tres términos de torque sinusoidales: dos de reluctancia con termino ***sin2δ*** que se suman y uno mutuo que tendrá una función ***sinδ***. Igual que en el caso anterior, sólo hay torque a velocidad síncrona. $|W| = |W_m|$



$$T_{med} = T_{med}^{reluctancia} + T_{med}^{mutuo}$$

$$T_e(i,\theta) = \frac{1}{2} i_1^2 \frac{dL_{11}}{d\theta} + i_1 \cdot i_2 \frac{dL_{12}}{d\theta} + \frac{1}{2} i_2^2 \frac{dL_{22}}{d\theta}$$



Tarea: Analizar T_{med} y condición de existencia si:

(i) El rotor se alimenta con ac

(ii) El rotor y estator se alimentan con ac.

**** (notar que si el rotor se alimenta con dc su **torque medio** de reluctancia se anula al integrar) ****

Máquina rotativa básica

Repaso de Conceptos

Ejemplo de casos: ¿Qué sucederá si…?

① **Ambas corrientes son continuas:** alineación de ejes

② **Una corriente es continua y la otra alterna (Motor Síncrono monofásico):**

T_{med} existe si $|\omega_m| = |\omega|$

① **Ambas corrientes son alternas (Motor Asíncrono monofásico):**

T_{med} existe si $|\omega_m| = |\omega_1 \pm \omega_2|$

① **Ambas corrientes son nulas:** Nada

② **Una corriente es nula:** Tendremos únicamente un torque de reluctancia

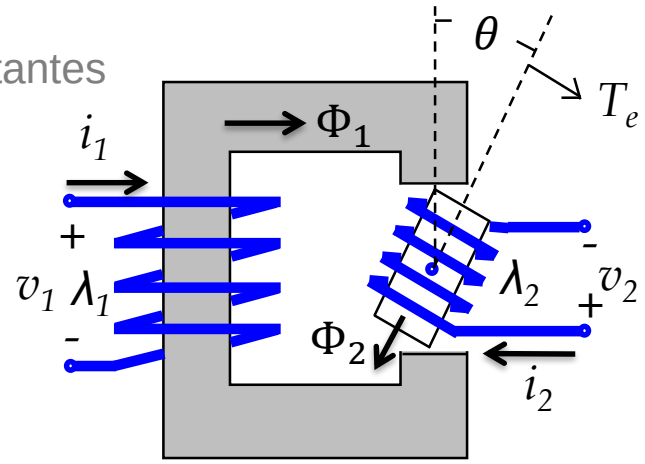
③ **El rotor es cilíndrico:** L_{11} (L_s) será constante

④ **El estator es cilíndrico:** L_{22} (L_r) será constante

⑤ **El estator y el rotor son cilíndricos:** L_{11} y L_{22} serán constantes

$$T_e(i,\theta) = \frac{1}{2} i_1^2 \frac{dL_{11}}{d\theta} + i_1 \cdot i_2 \frac{dL_{12}}{d\theta} + \frac{1}{2} i_2^2 \frac{dL_{22}}{d\theta}$$

Torque de Reluctancia | **Torque Mutuo** | **Torque de Reluctancia**



Máquina rotativa básica

Repaso de Conceptos

Ejemplo de casos: Ahora el rotor es cilíndrico y “jaula de ardilla” (inducción), y el estator también se puede considerar cilíndrico.

① **La corriente es continua:**

② **La corriente es alterna:**

③ **¿Existe torque de partida?**

④ **¿En que sentido girará?**

⑤ **¿Como podemos generar torque de partida?**

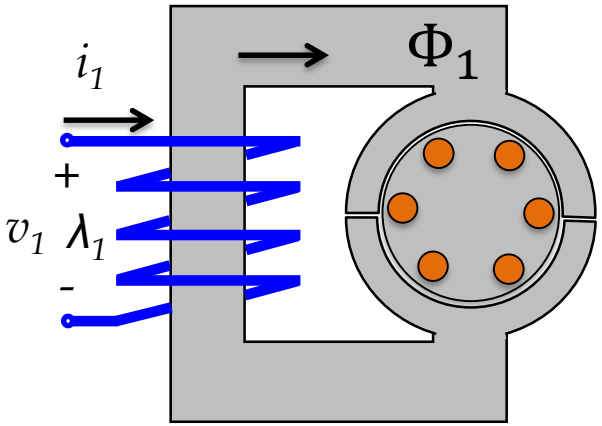


$$T_e(i,\theta) = \frac{1}{2} i_1^2 \frac{dL_{11}}{d\theta} + i_1 \cdot i_2 \frac{dL_{12}}{d\theta} + \frac{1}{2} i_2^2 \frac{dL_{22}}{d\theta}$$

$\frac{dL_{11}}{d\theta} \to 0$ (Torque de Reluctancia)

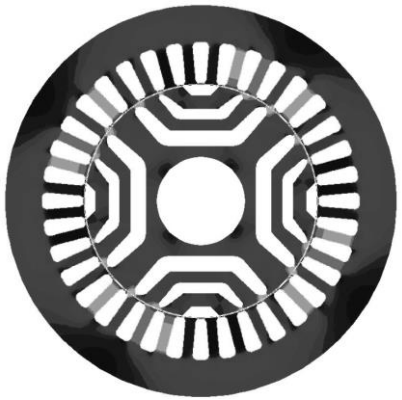
$\frac{dL_{12}}{d\theta}$ (Torque Mutuo)

$\frac{dL_{22}}{d\theta} \to 0$ (Torque de Reluctancia)



Máquina de Reluctancia









Máquina de reluctancia básica

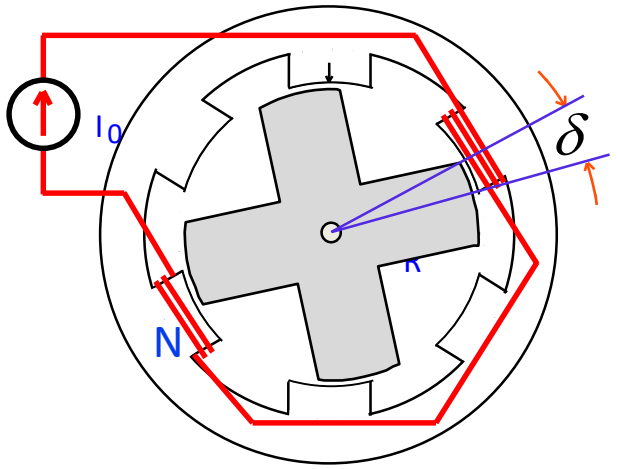
Suponiendo excitación simple

Ejemplo aplicado: Dispositivo de excitación simple (sólo estator). Suponiendo sistema lineal donde la única reluctancia es el entrehierro y basándonos en lo visto tenemos:

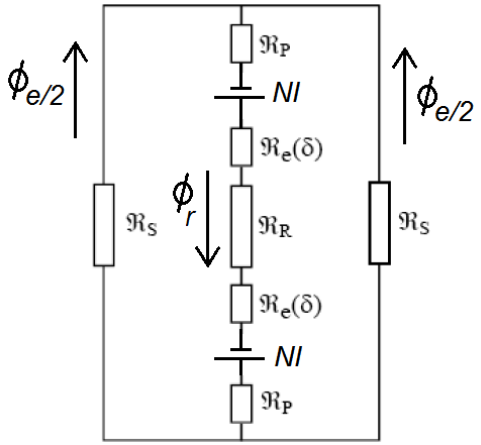
$$T_e(i,\delta) = \frac{1}{2} i_1^2 \frac{dL_{11}}{d\delta} + i_1 \cdot i_2 \frac{dL_{12}}{d\delta} + \frac{1}{2} i_2^2 \frac{dL_{22}}{d\delta}$$

($\frac{dL_{11}}{d\delta} = 0$, $\frac{dL_{22}}{d\delta} = 0$)

Torque de Reluctancia | **Torque Mutuo** | **Torque de Reluctancia**



6/4 Polos



Máquina de reluctancia

Suponiendo excitación simple

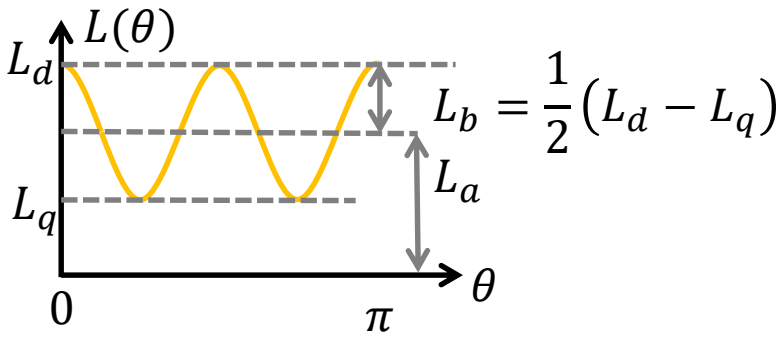
Ejemplo aplicado: Suponiendo dispositivo como de excitación simple y lineal donde la única reluctancia relevante es el entrehierro y no hay dispersión.

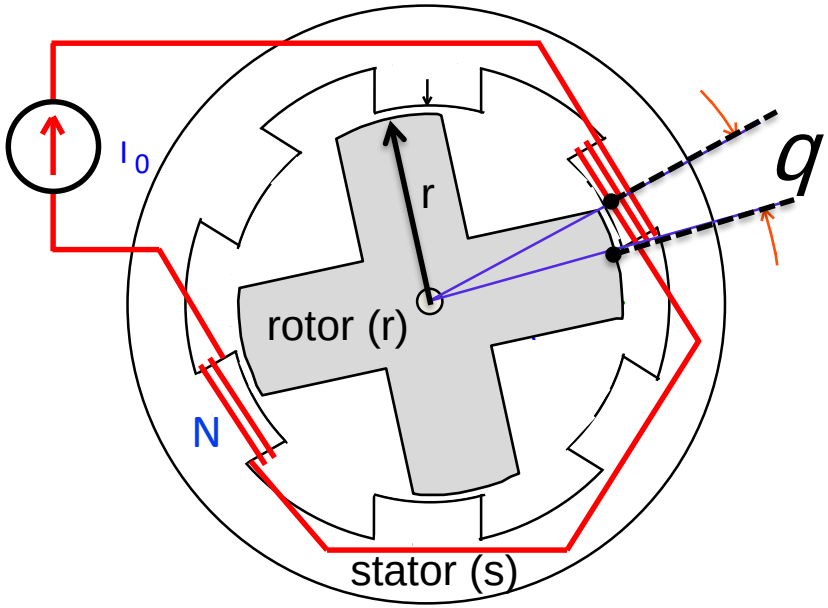
CASO REAL: Inductancia directa y en cuadratura.

$$T_e = \frac{1}{2} i^2 \frac{dL}{d\theta}$$

i cte

$$L_e(\theta) = L_a + L_b \cos 4\theta$$



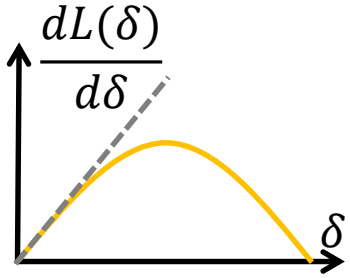


$$T_e = \frac{1}{2} i_s^2 \frac{dL_e}{d\theta} \rightarrow T_e = -i_s^2 (L_d - L_q) \sin 4\theta$$

Torque se generará hasta que se alineen los polos del estator y rotor (θ=0). Notar que es el mismo torque de la máquina vista en la **diapositiva 11**.

Máquina de reluctancia

Suponiendo excitación simple

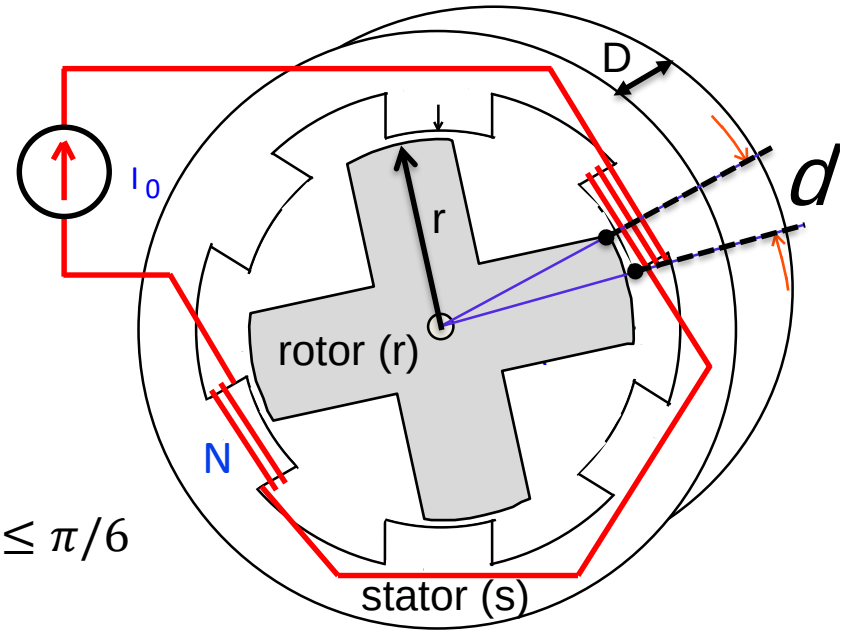


Ejemplo aplicado: Suponiendo dispositivo como de excitación simple y lineal donde la única reluctancia relevante es el entrehierro y no hay dispersión.

CASO APROX: Comportamiento sólo para una sección $0 \le \delta \le \pi/6$ (inductancia lineal).

$$T_e = \frac{1}{2} i^2 \frac{dL}{d\theta}$$ *i* cte

$$\mathfrak{R}_T = \frac{l}{\mu_0 \cdot A} = \underbrace{\frac{2e}{\mu_0 \cdot A_e(\delta)}}_{\mathfrak{R}_e(\delta)} + \underbrace{\frac{l_s + l_r}{\mu_{Fe} \cdot A_m}}_{\text{Constante (no genera } T_e)}$$



$$L_e(\delta) = \frac{N^2}{\mathfrak{R}_e(\delta)} = \frac{N^2 \mu_0 \cdot (D \cdot r \cdot \delta)}{2e} \qquad 0 \le \delta \le \pi/6$$

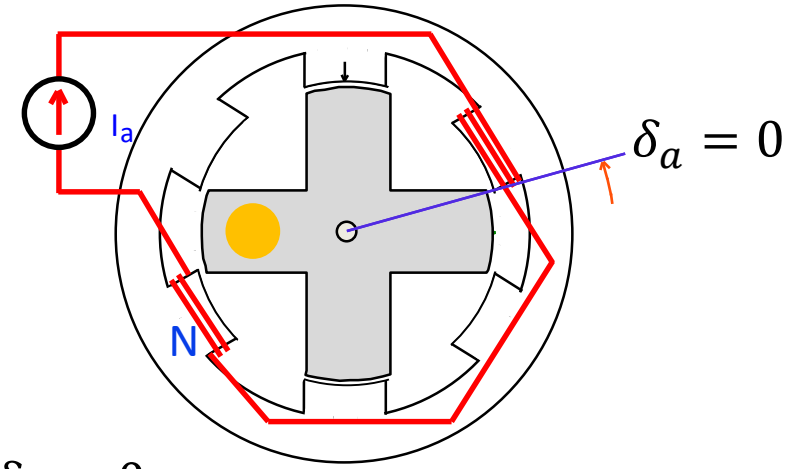
$$T_e = \frac{1}{2} i_s^2 \frac{dL_e}{d\delta} \rightarrow T_e = \frac{1}{2} i_s^2 \frac{N^2 \mu_0 \cdot D \cdot r}{2e}$$

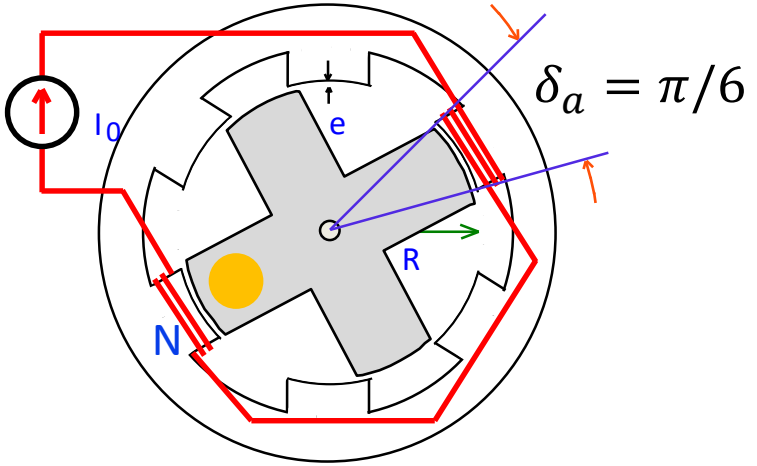
Torque cte. entre 0 y π/6

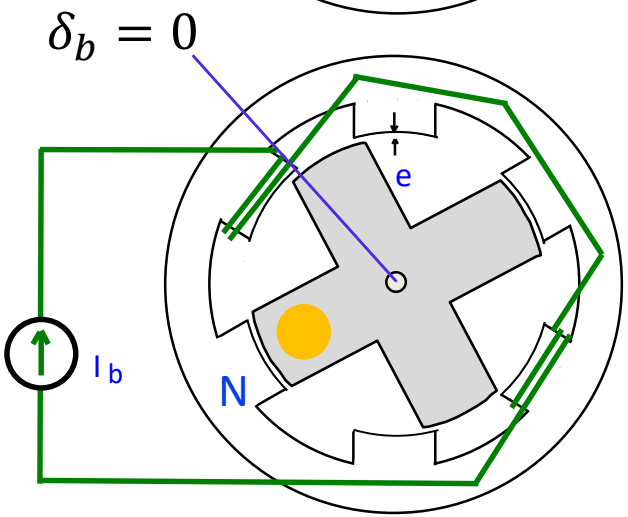
Máquina de reluctancia

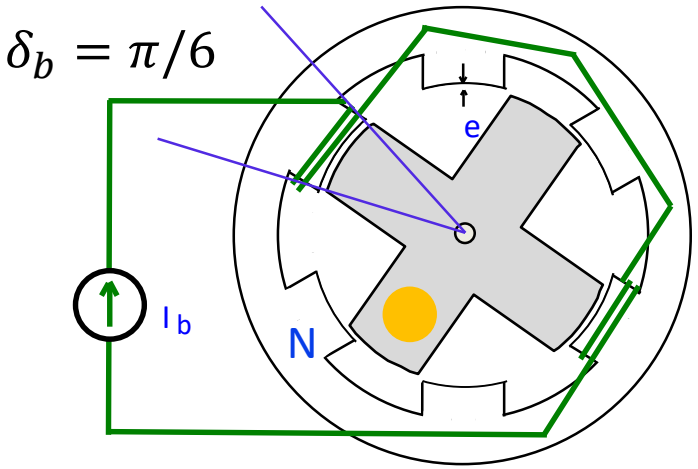
Campo Magnético Rotatorio (CMR) discreto

Ejemplo aplicado: Finalmente, la operación se realiza alternando las fases del estator de forma secuencial. La velocidad mecánica será síncrona pero negativa (sentido inverso).





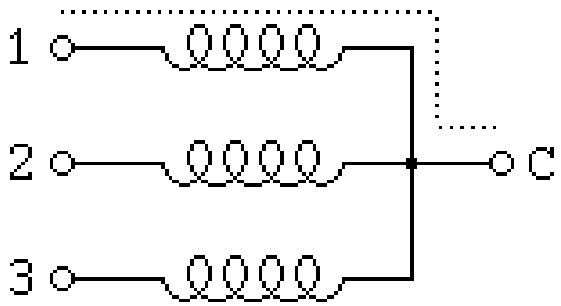


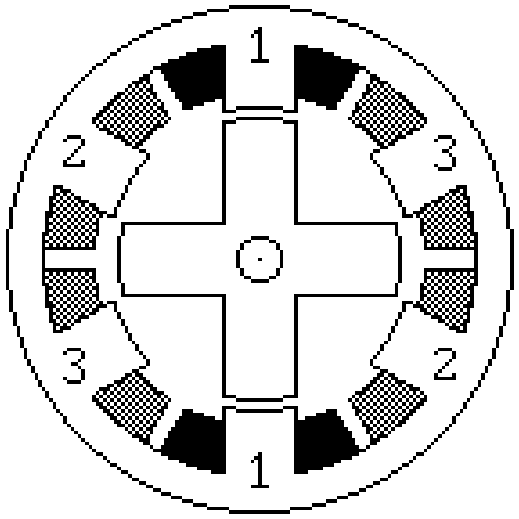


Máquina de reluctancia

Campo Magnético Rotatorio (CMR) discreto

Ejemplo aplicado: Finalmente, la operación se realiza alternando las fases del estator de forma secuencial. La velocidad mecánica será síncrona pero negativa (sentido inverso).

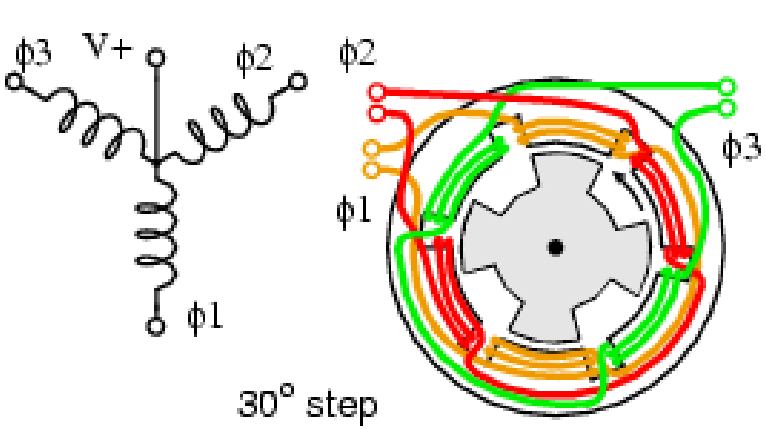


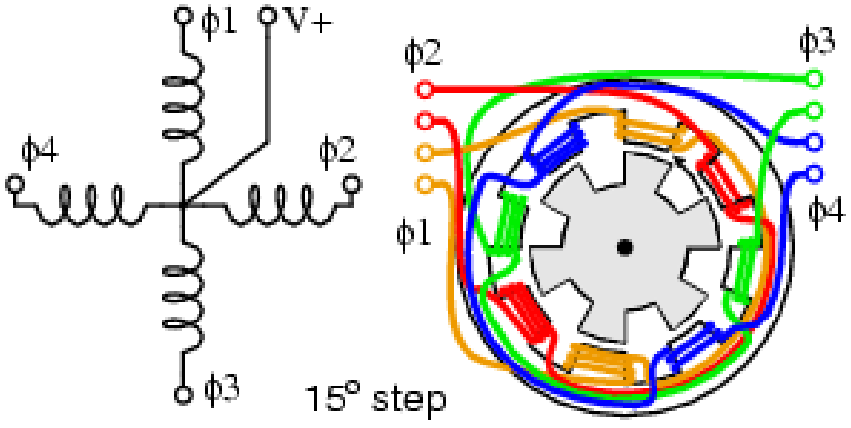


Máquina de reluctancia

Campo Magnético Rotatorio (CMR) discreto

Ejemplo aplicado: Motor de reluctancia variable (stepper o paso a paso de reluctancia) de 6/4 (3 fases o bobinas) y 8/6 polos (4 fases o bobinas).

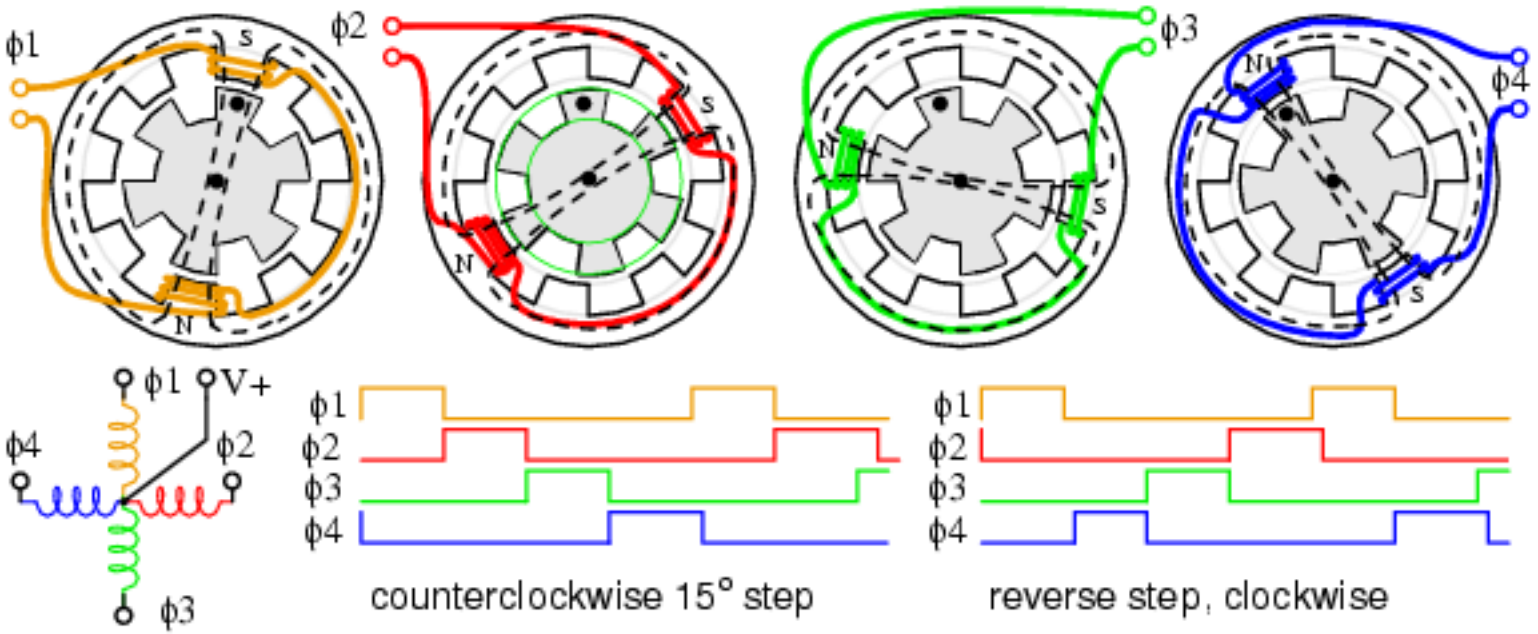




Máquina de reluctancia

Campo Magnético Rotatorio (CMR) discreto

Ejemplo aplicado con 4 fases (8/6 polos): Finalmente, la operación se realiza alternando las fases del estator de forma secuencial. La velocidad mecánica será síncrona pero negativa (sentido inverso).



Máquina de reluctancia

Campo Magnético Rotatorio (CMR) discreto

Tarea: La máquina de reluctancia estudiada tiene tres “fases” (tres corrientes controladas independientemente, y cada fase tiene un par de polos:

i. Dibujar las corrientes de cada fase durante un giro completo.

ii. ¿Cómo sería la maquina con dos pares de polo por fase? Dibújela.

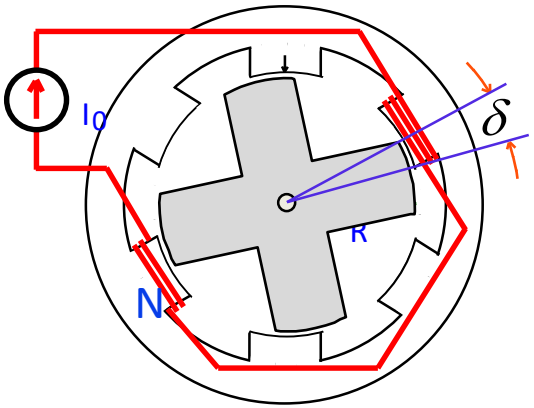
Este motor se puede utilizar como un motor paso-a-paso. Además, si adicionalmente utilizamos dos fases al mismo tiempo lograremos mayor resolución:

i. ¿Cuales serían todas las posibles posiciones (resolución) del motor?

ii. ¿La resolución de ángulos está distribuida uniformemente?

iii. Demuestre matemáticamente el ángulo intermedio obtenido al aplicar dos fases (ayuda: $T_{ab}=T_a(\theta)+T_b(\theta-\alpha)$ donde α el ángulo mecánico entre fases).

iv. Dibuje la secuencia de corrientes aplicadas para dar una vuela en intervalos de tiempo T.

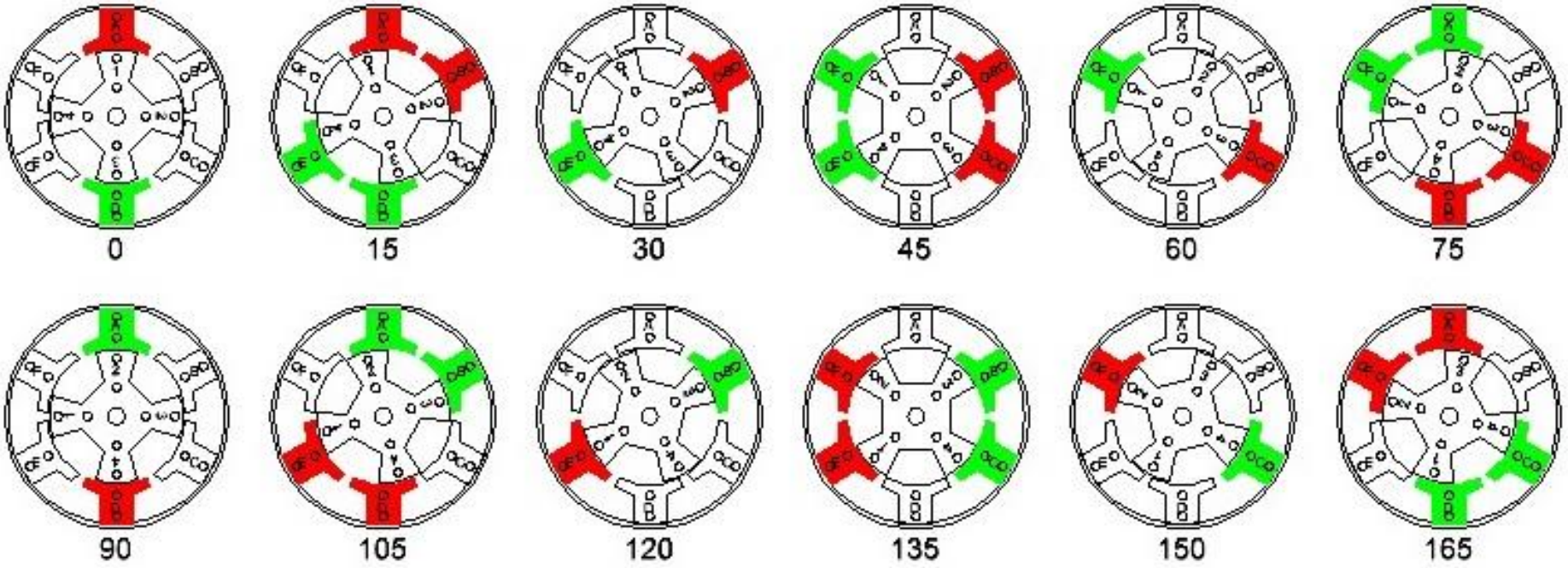


Máquina de reluctancia

Campo Magnético Rotatorio (CMR) discreto

Máquina de reluctancia paso-a-paso:

Un par de polos por “fase” y rotor tipo cruceta (6/4 polos)

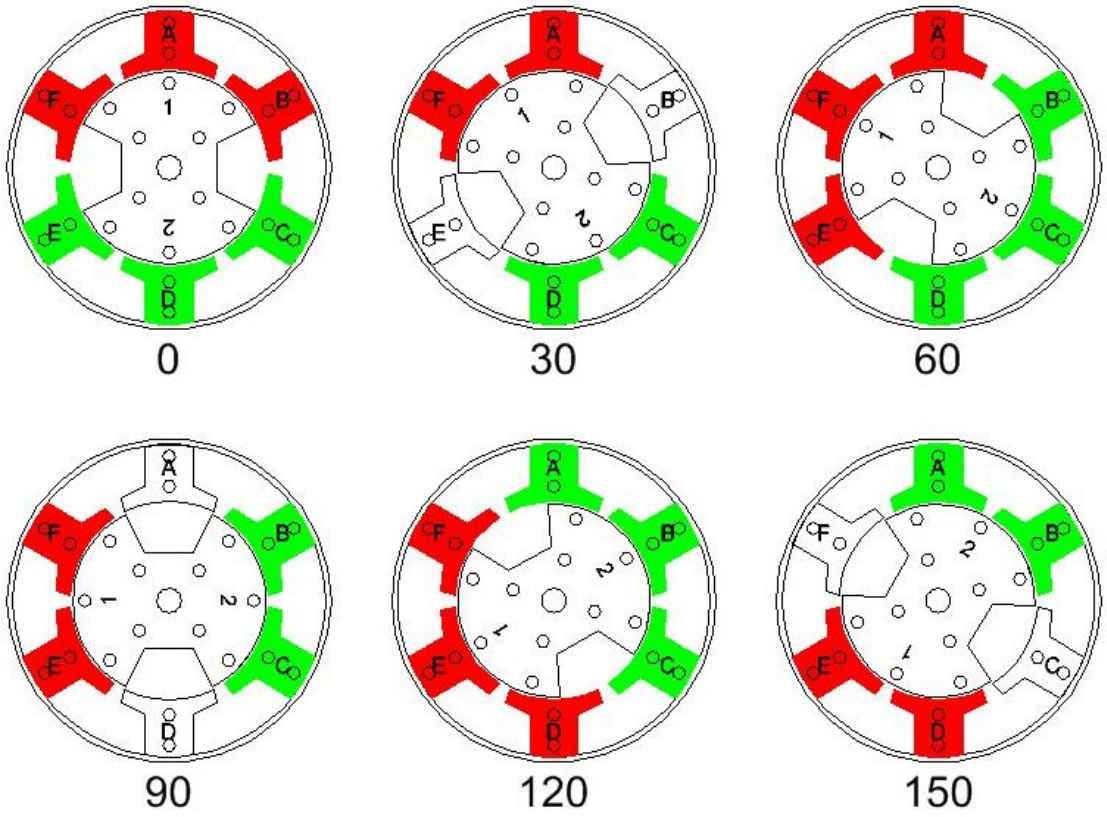


Máquina de reluctancia

Campo Magnético Rotatorio (CMR) discreto

Máquina de reluctancia paso-a-paso:

Un par de polos por fase y rotor de dos polos (6/2 polos)



Máquina de reluctancia

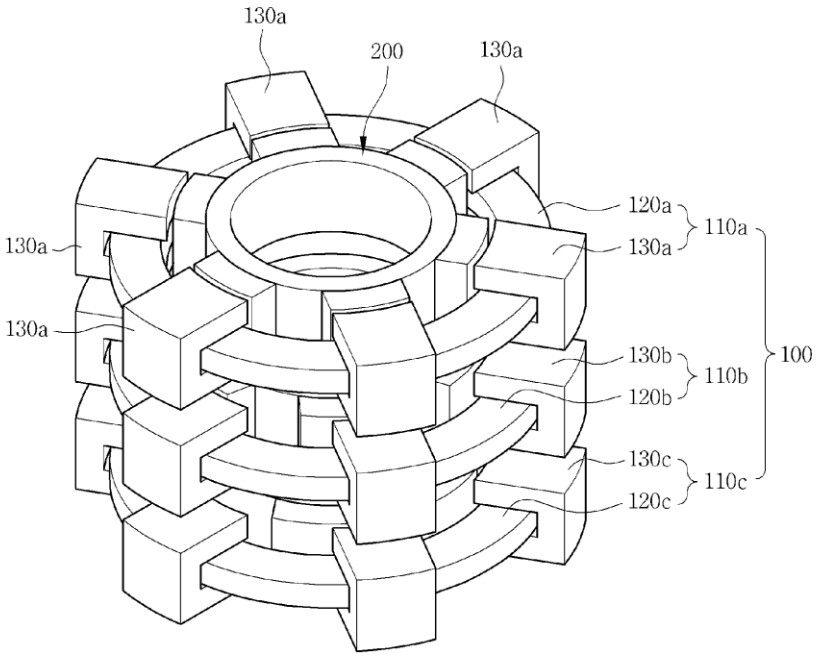
Campo Magnético Rotatorio (CMR) discreto

Máquina de reluctancia paso-a-paso multi-rotor-estator: tres fases con varios polos con rotor y estator independiente (tres estatores y tres rotores acoplados mecánicamente).

Estatores desfasados

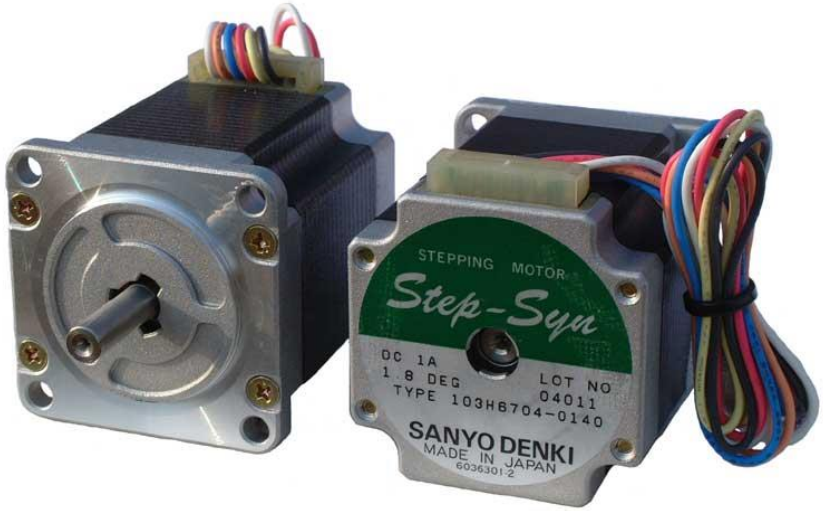


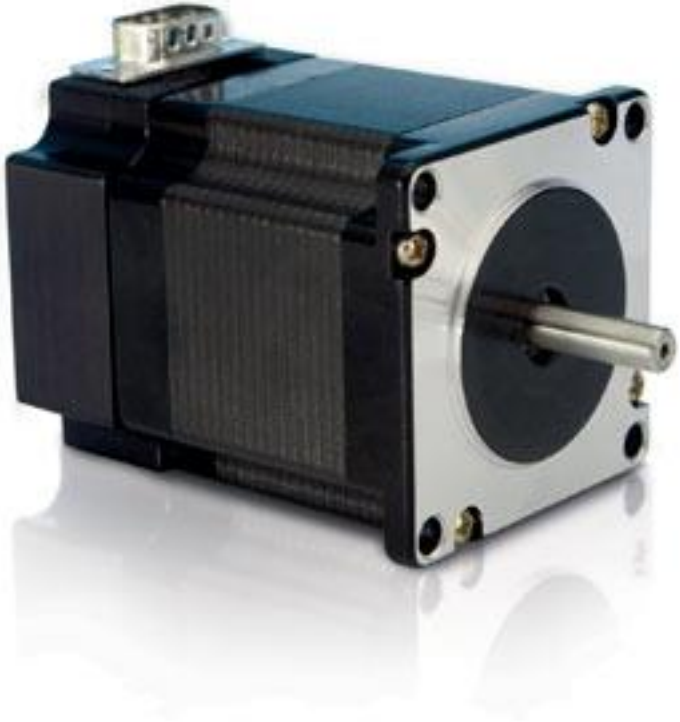
Estatores en fase

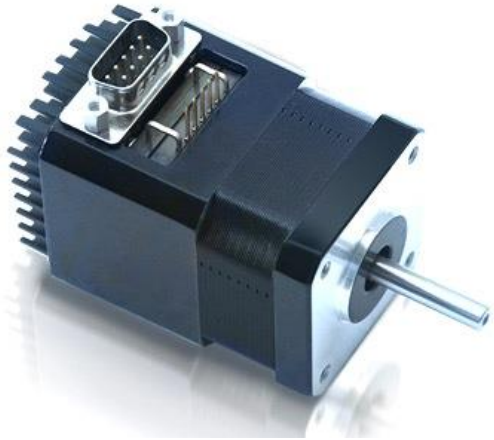


Motores Paso-Paso (Stepper)





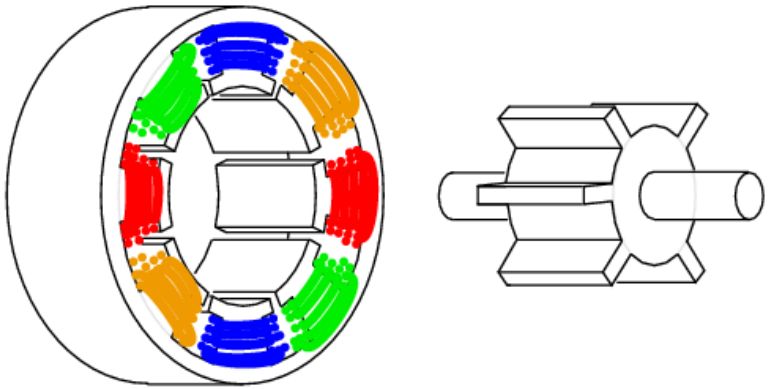




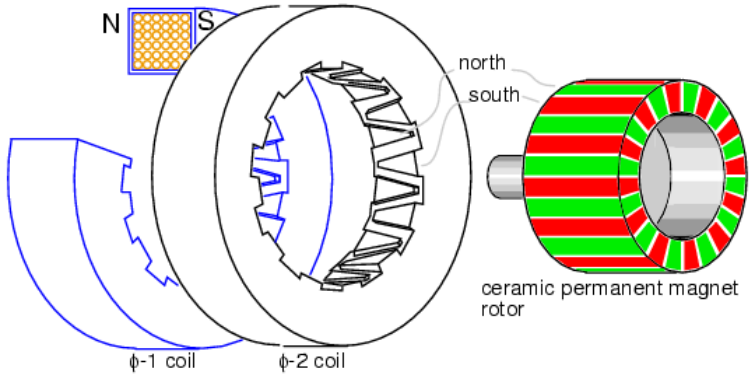
Máquina Paso-Paso

Motor Stepper

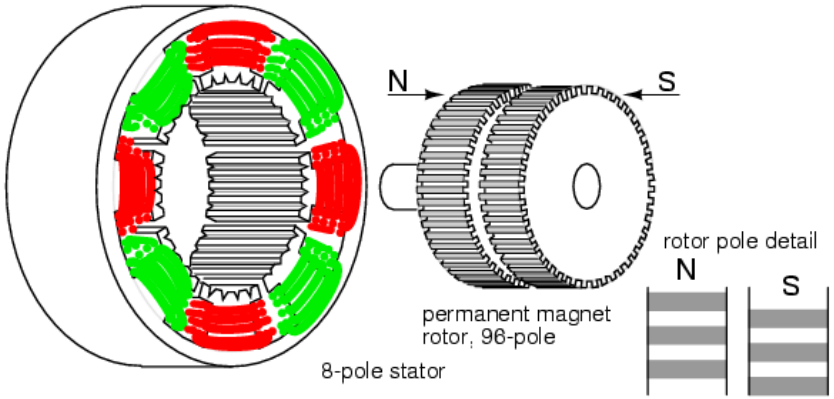
1. **Motor de Reluctancia Variable**
   (vista en las diapositivas anteriores)



2. **Motor de Imanes Permanentes**



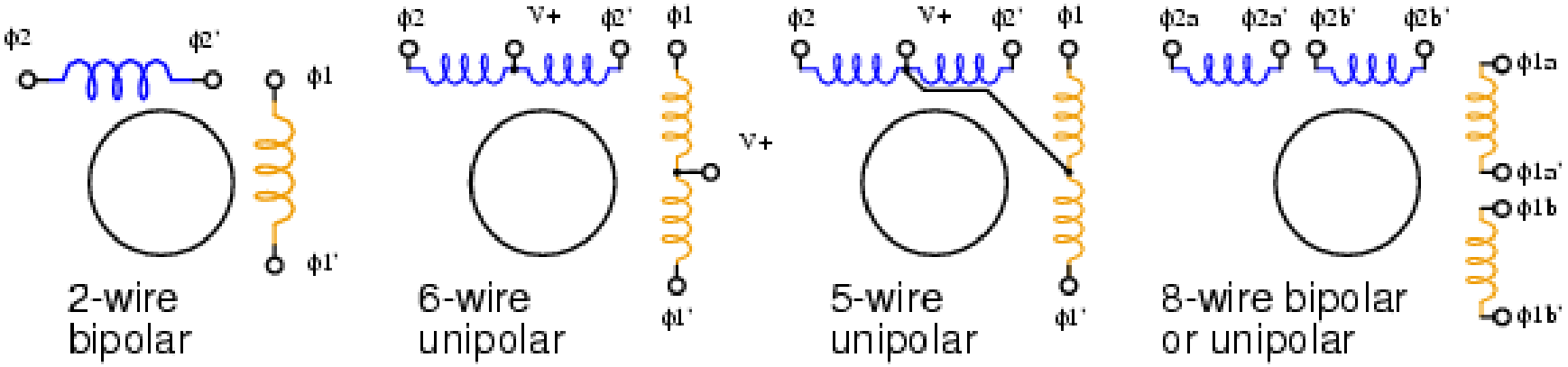
3. **Motor Híbrido**
   (Reluctancia variable con imanes)



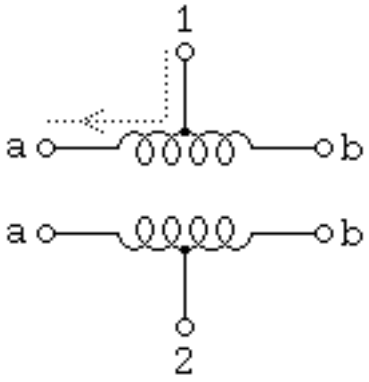
Motor paso-paso con Imanes

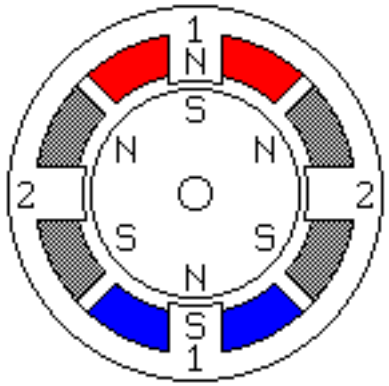
Motor Stepper con PM

Configuraciones comerciales



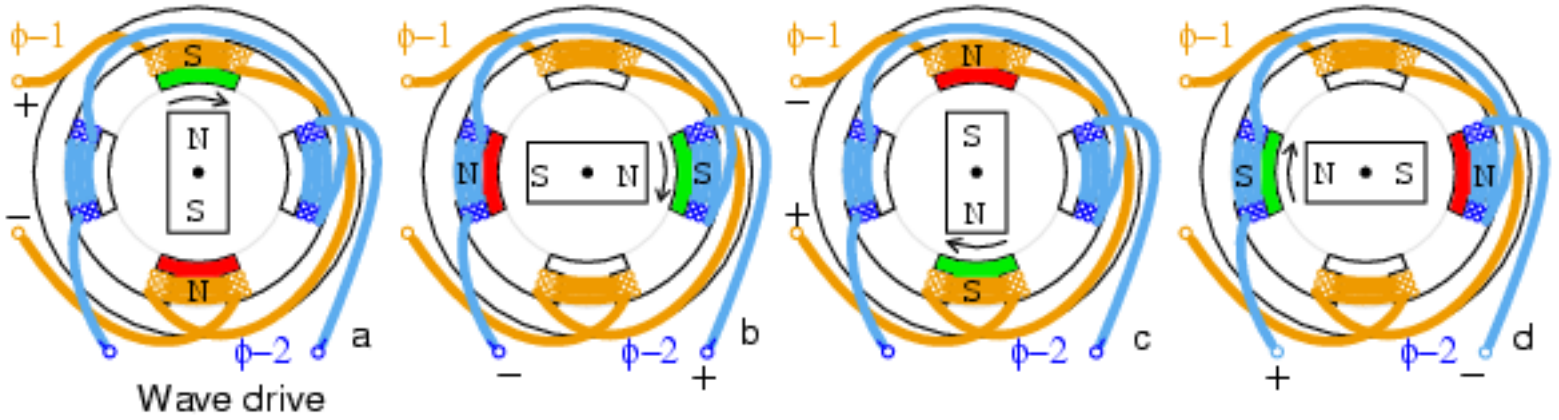
i. **Wave Drive:**
ii. **Full step drive:** ↑Torque
iii. **Half step drive:** ↑Resolución





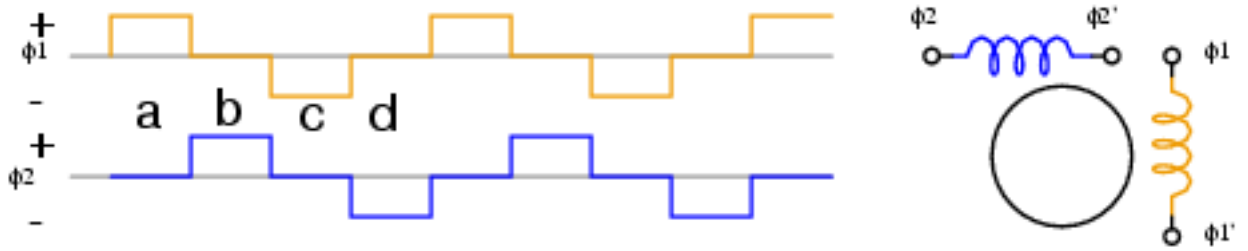
Motor paso-paso con Imanes

i. “Wave Drive”



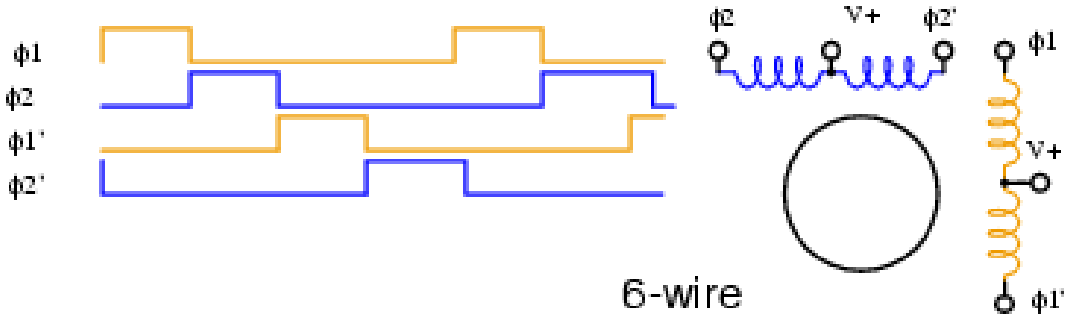
Bipolar

(mayor torque)



Unipolar

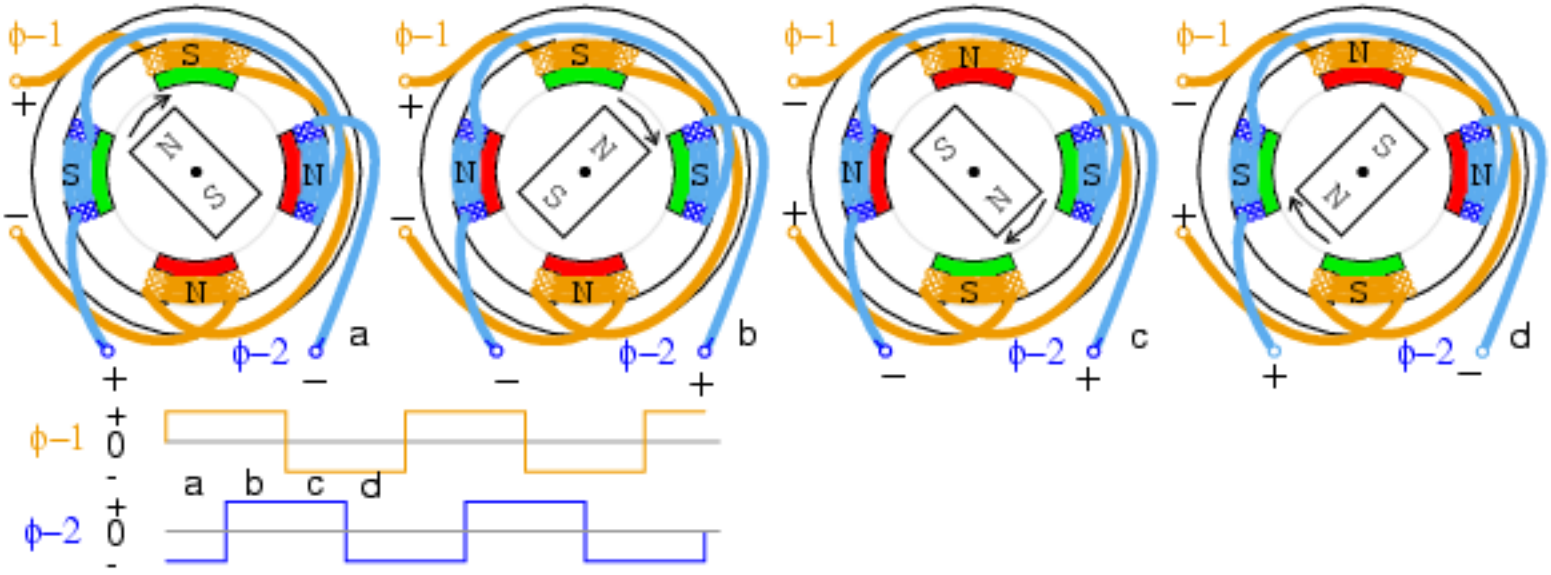
(controlador más simple)



Motor paso-paso con Imanes

ii. “Full Step Drive”

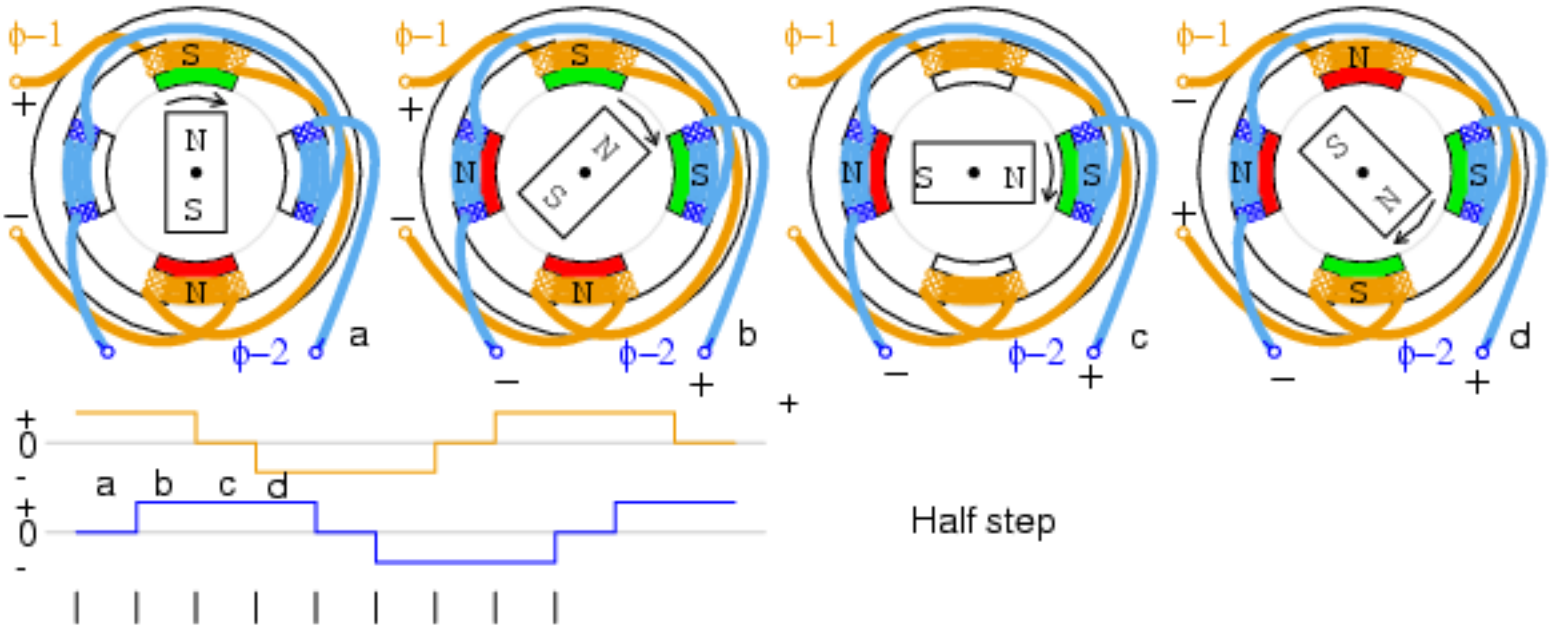
Mayor Torque que “wave drive” porque se alimentan dos bobinas a la vez (las fuerzas tienden a equilibrar el polo del rotor en medio de los polos de estator).



Motor paso-paso con Imanes

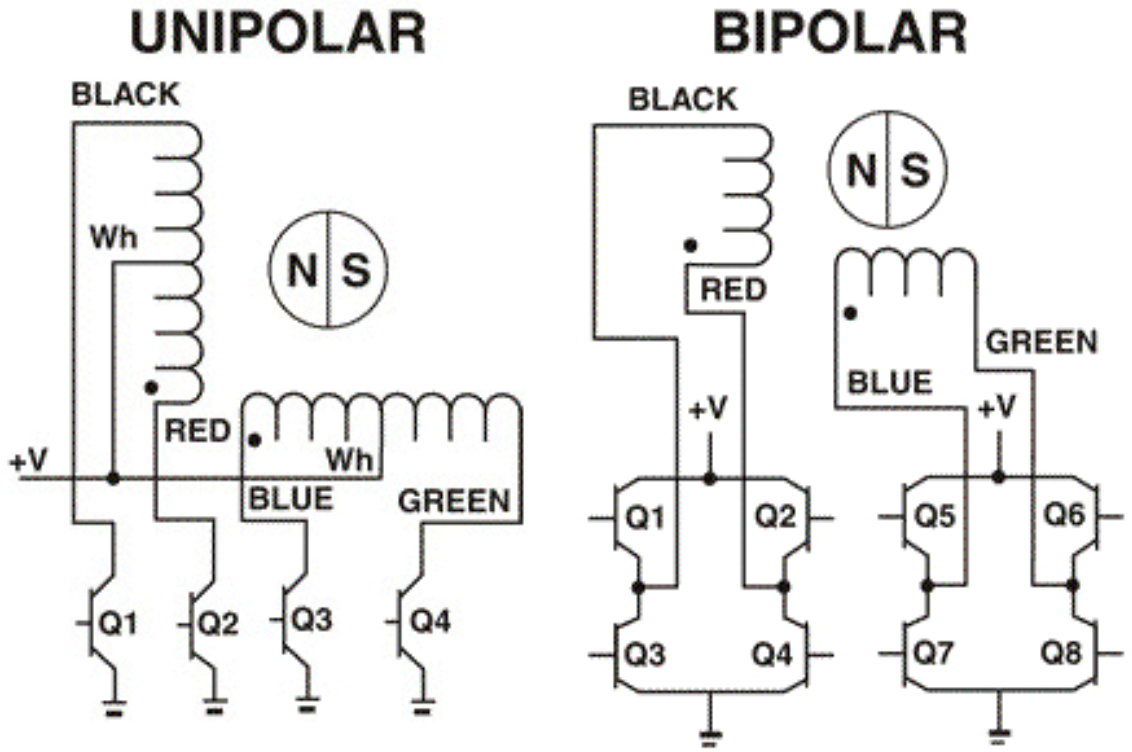
iii. “Half Step Drive”

Mayor Resolución que los casos anteriores porque se utilizan todas las combinaciones posibles.



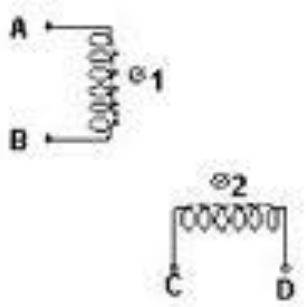
Motor paso-paso con Imanes

Resumen (Ej: unipolar and bipolar)



Motor paso-paso con Imanes

Resumen (Ej: 2 wire bipolar)



	ø1		ø2	
	A	B	C	D
1	-	+	-	+
2	-	+	+	-
3	+	-	+	-
4	+	-	-	+

CW ↓ CCW ↑

Full Step, 2 Phases on Sequence

	ø1		ø2	
	A	B	C	D
1	-	+	-	+
2			-	+
3	+	-	-	+
4	+	-		
5	+	-	+	-
6			+	-
7	-	+	+	-
8	-	+		

CW ↓ CCW ↑

Half-Step Sequence

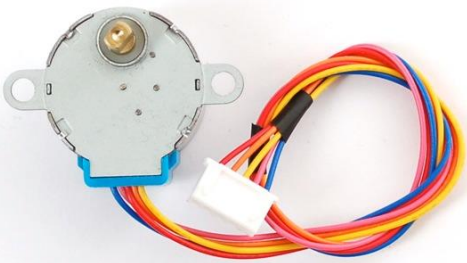
	ø1		ø2	
	A	B	C	D
1	-	+		
2			+	-
3	+	-		
4			-	+

CW ↓ CCW ↑

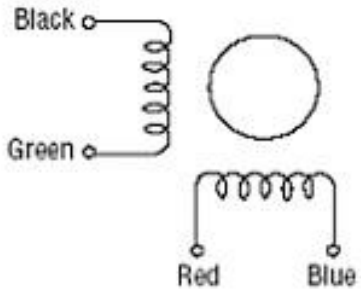
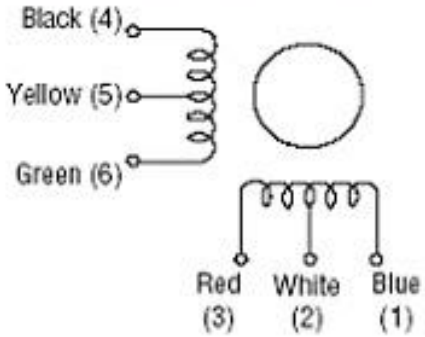
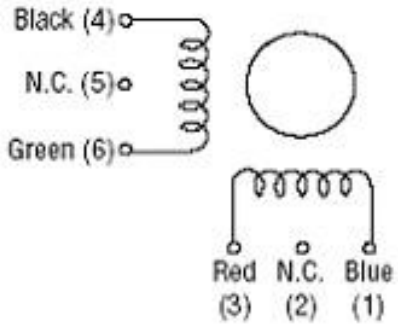
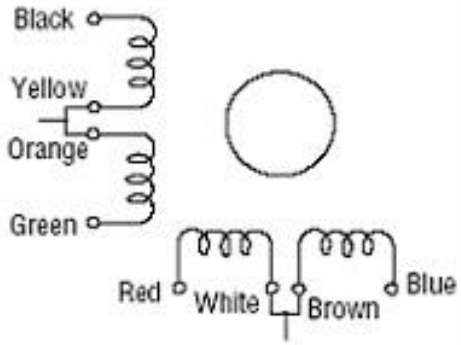
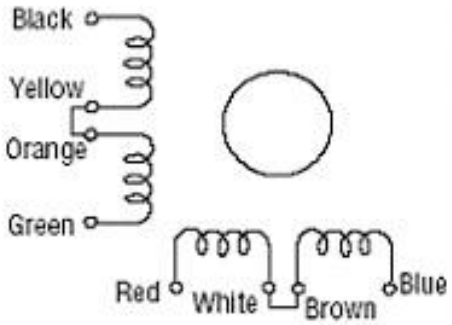
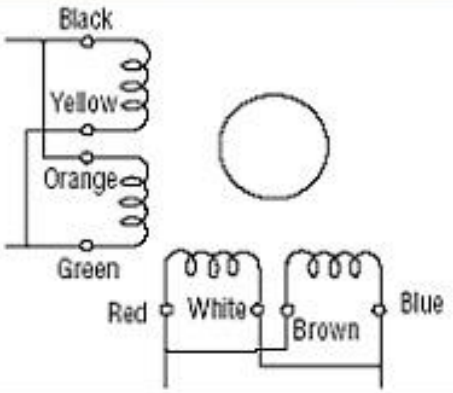
Wave Drive Sequence

Motor paso-paso con Imanes

Resumen

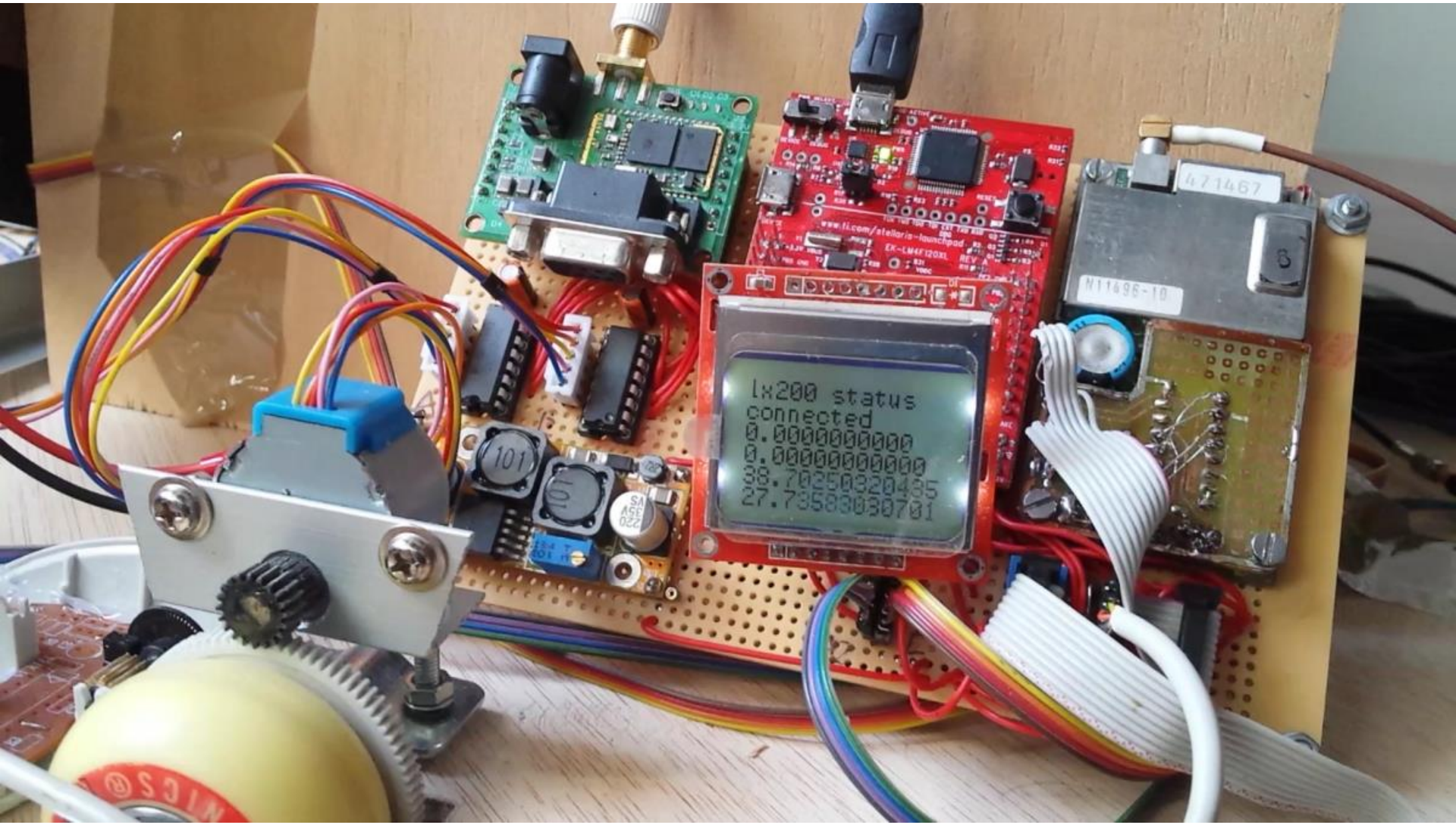


Wire Connection Diagrams

4 Lead Bipolar Connection	6 Lead Unipolar Connection	6 Lead Bipolar (Series) Connection
		
8 Lead Unipolar Connection	**8 Lead Bipolar (Series) Connection**	**8 Lead Bipolar (Parallel) Connection**
		

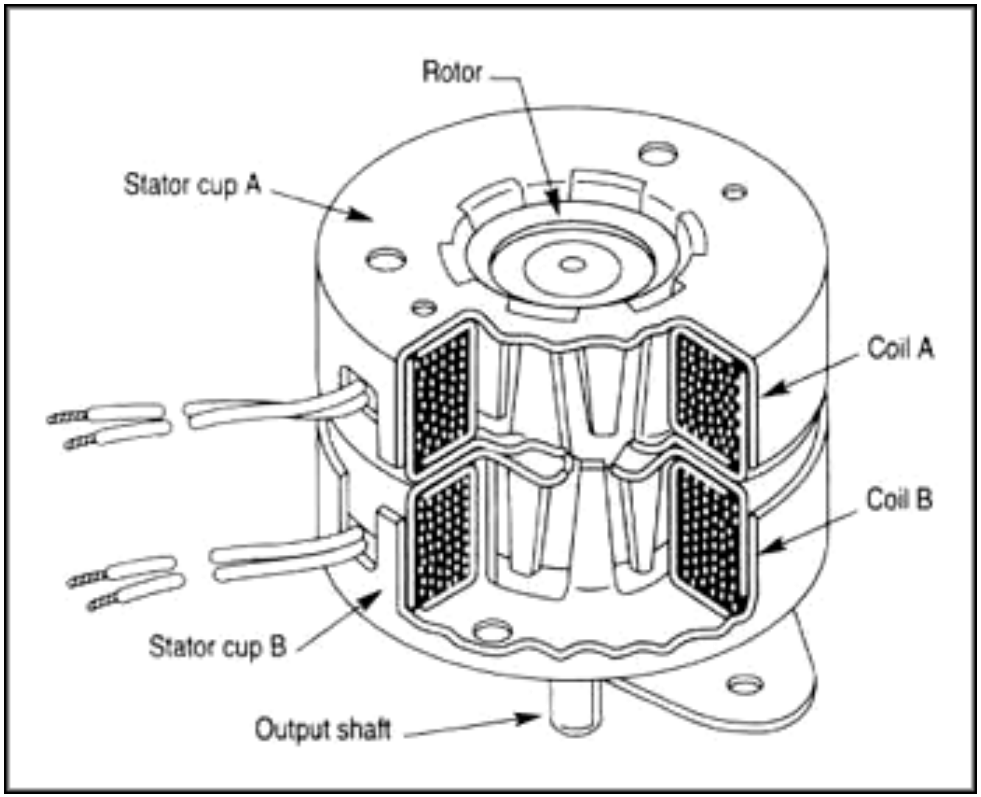
Motor paso-paso con Imanes

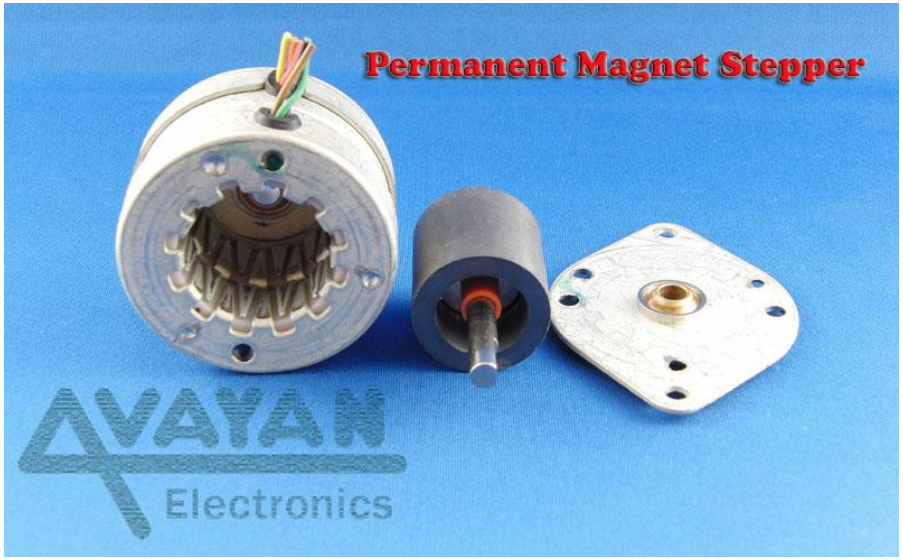
Ejemplo uC Tiva



Motor paso-paso con Imanes

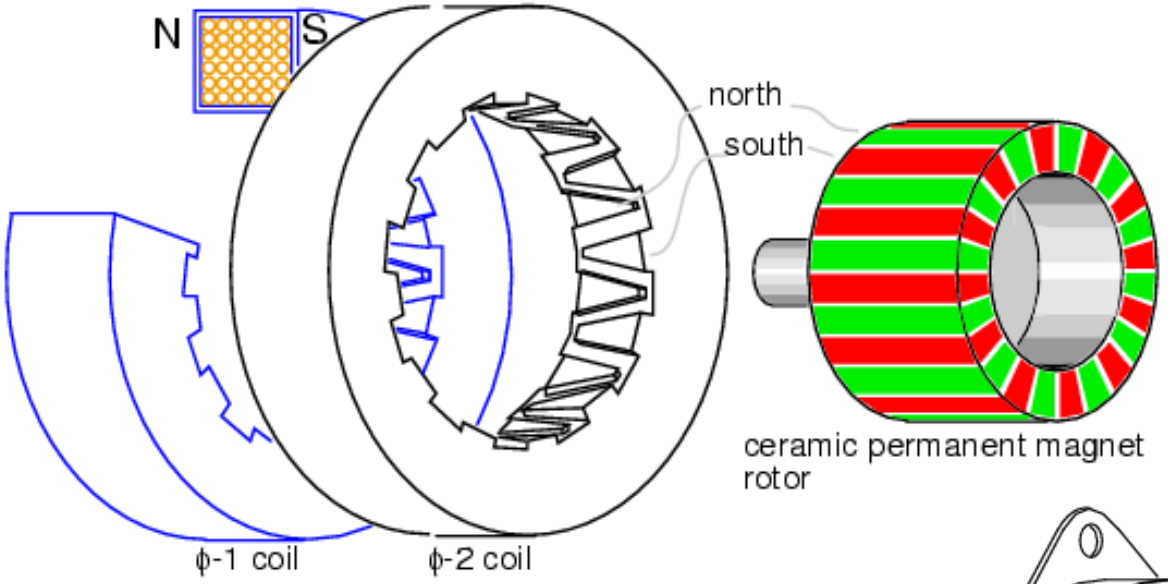
Construcción Real (Mayor Resolución)





Motor paso-paso con Imanes

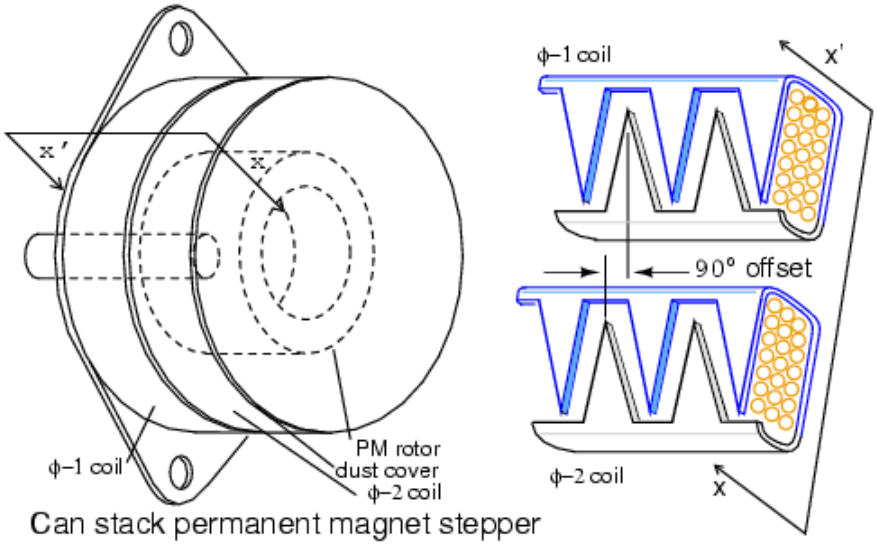
Construcción Real (Mayor Resolución)



La construcción real se llama “can stack” y es muy distinta a los dibujos previos, los cuales son más didácticos.

Esta configuración utiliza sólo 2 bobinas pero se obtienen múltiples polos (e.g. 24).

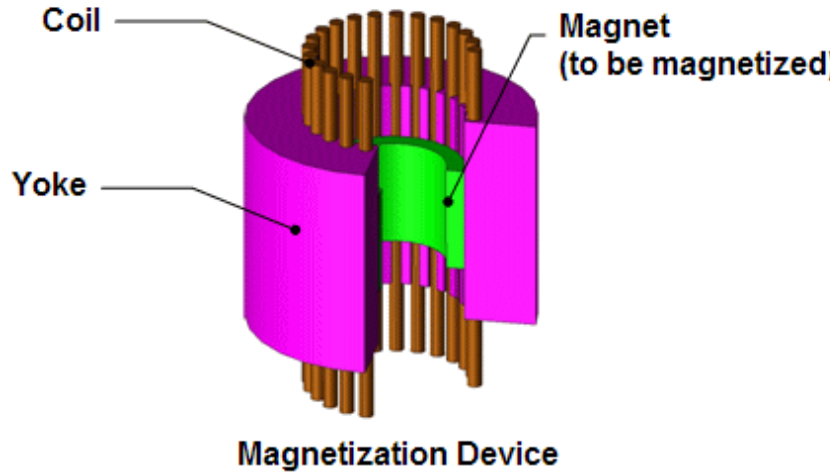
Puede operar con 1 bobina pero no se tiene control del sentido de giro. Con 2 bobinas duplicamos la resolución y tenemos control de giro.



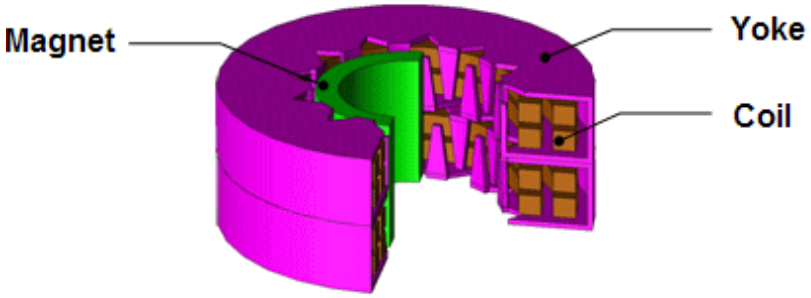
Can stack permanent magnet stepper

Máquina con Imanes **Stepper**
Construcción Real (Mayor Resolución)

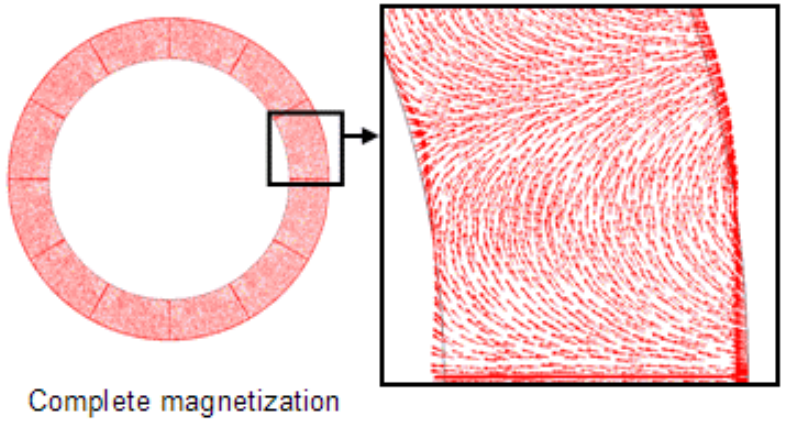
El rotor está compuesto por una ferrita que es magnetizada de forma especial para obtener múltiples polos.



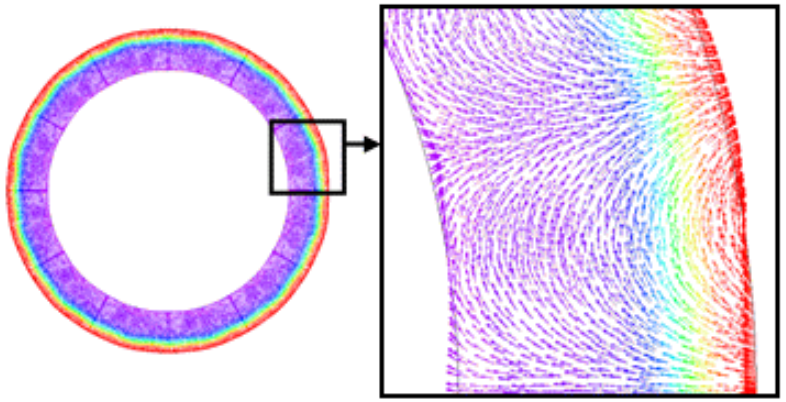
Magnetization Device



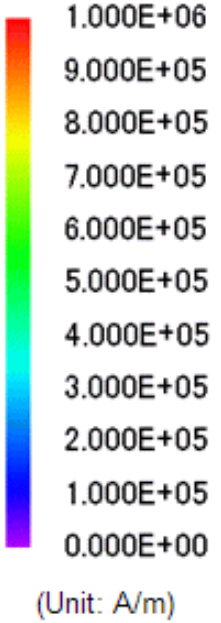
Stepping motor



Complete magnetization

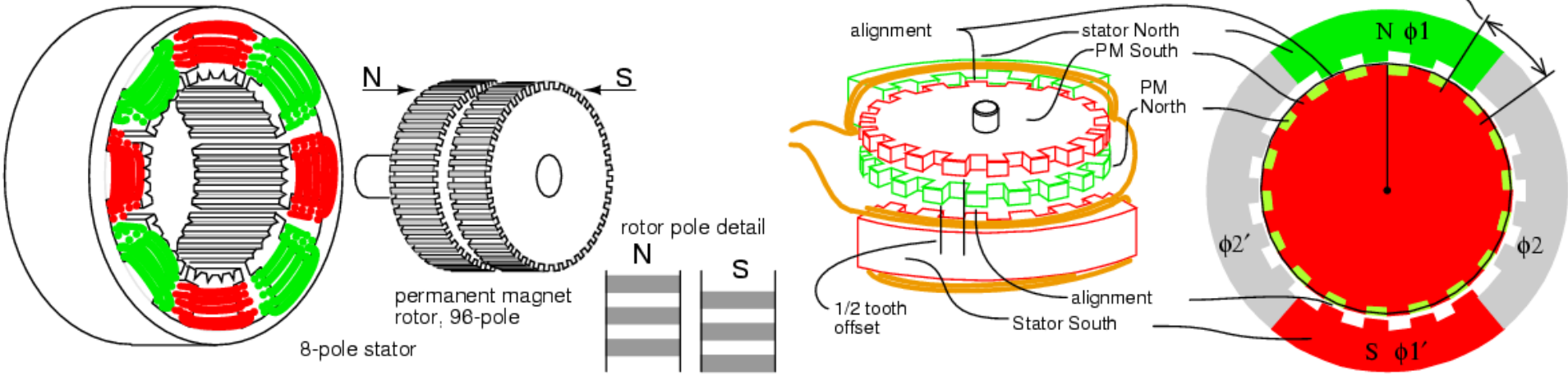


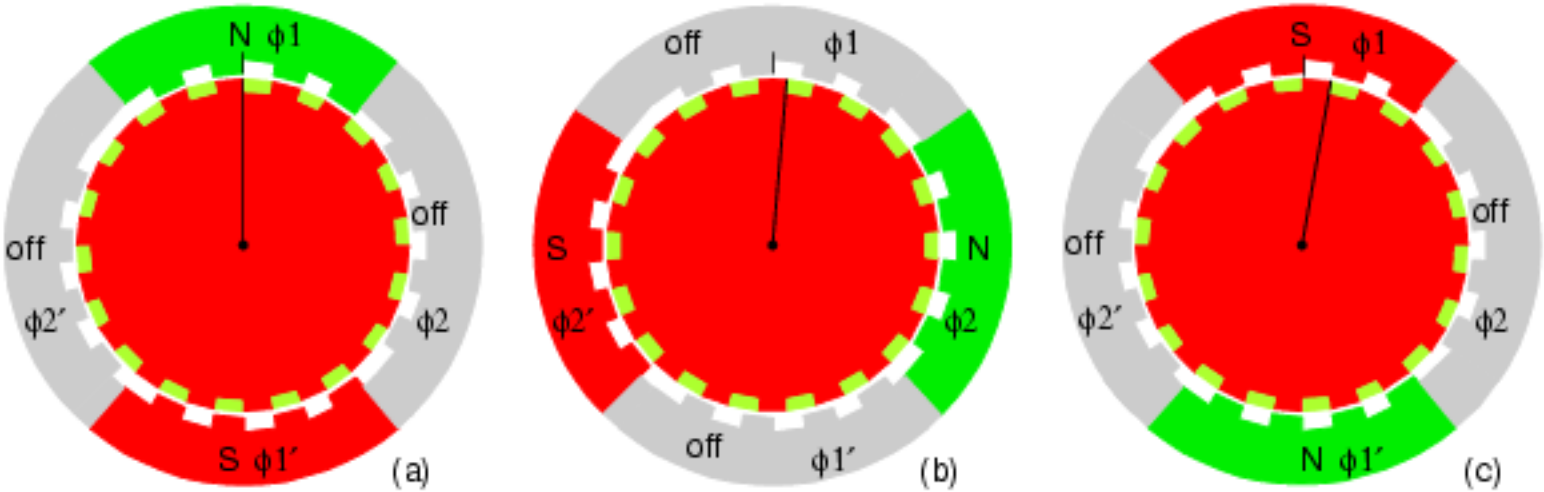
Incomplete magnetization



Máquina de reluctancia con imanes

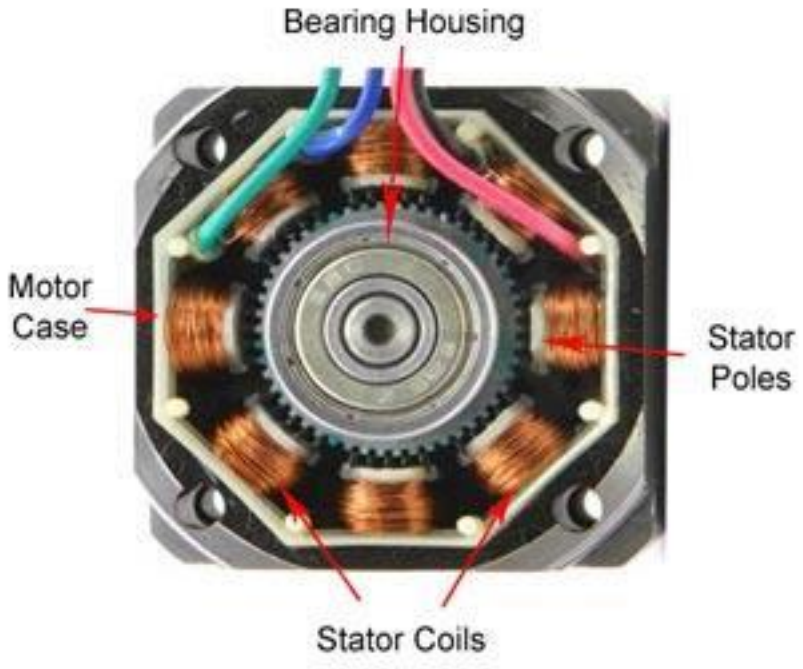
Motor Stepper Híbrido

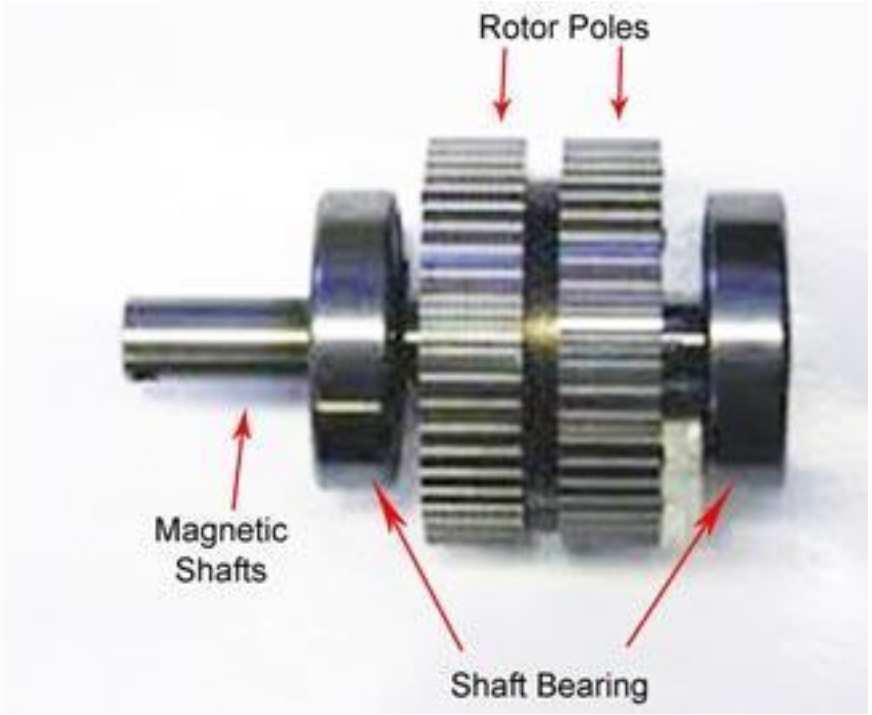




Máquina de reluctancia con imanes

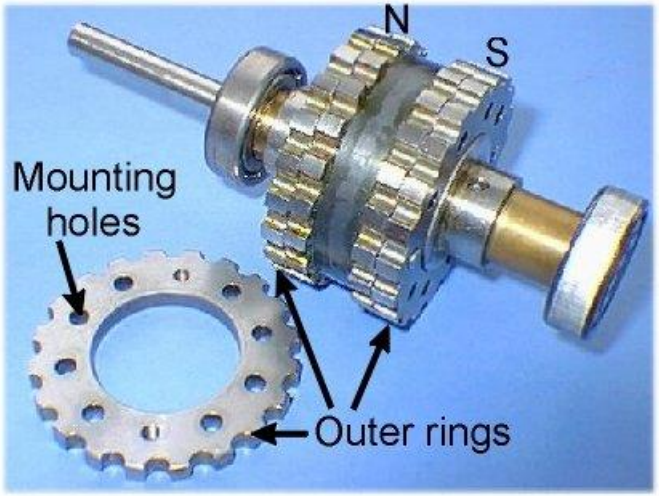
Motor Stepper Híbrido



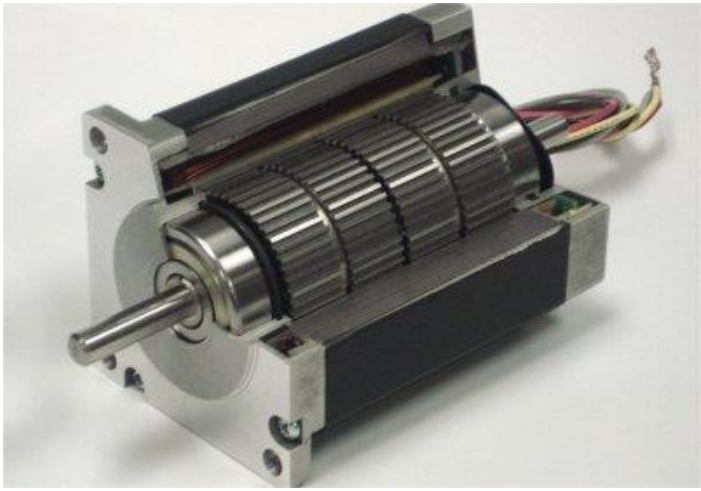


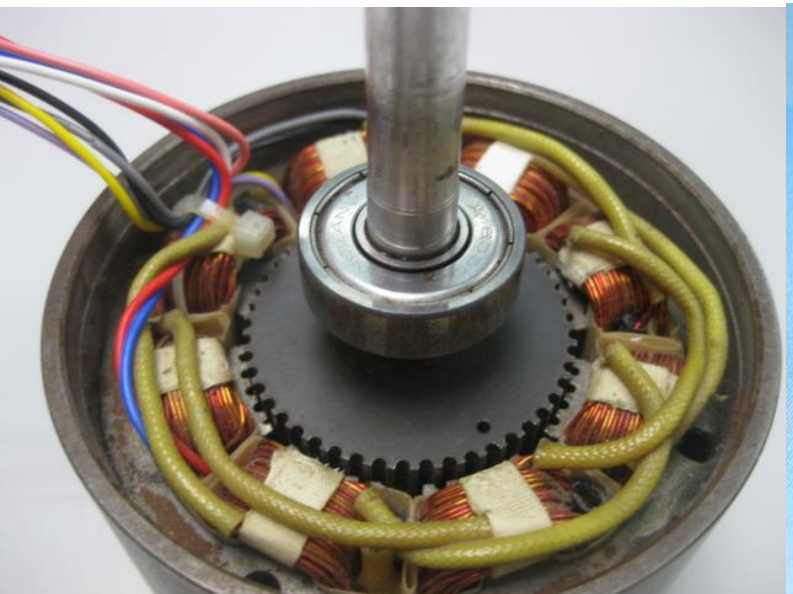
Máquina de reluctancia con imanes

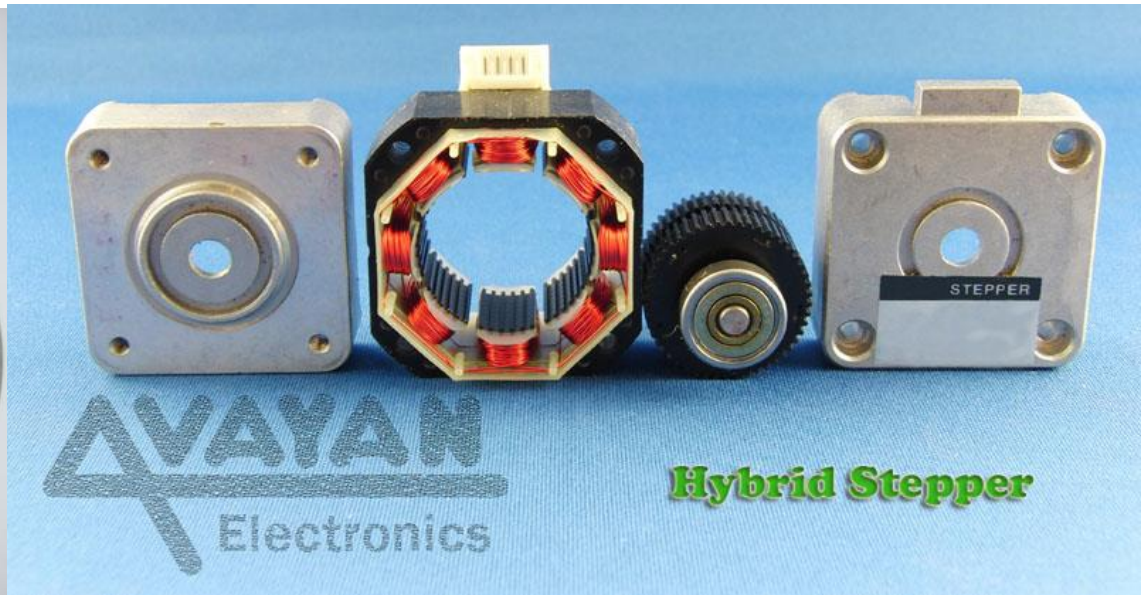
Motor Stepper Híbrido







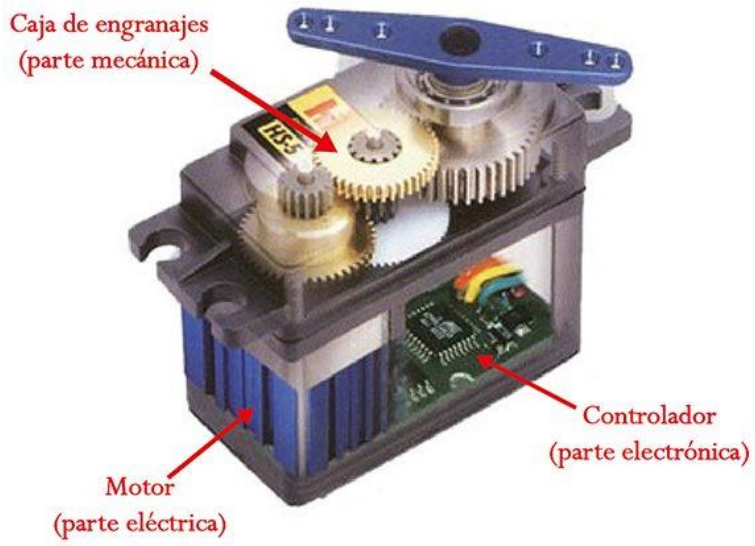




Otro motor utilizado para posición

Servo Motor (DC y AC)

Actuador lineal o rotatorio que permite control preciso de posición o velocidad. Consiste en un motor con un sensor de posición y un control más sofisticado. Pueden ser motores DC (utilizado en aplicaciones pequeñas como aeromodelismo) o AC (PMSM utilizados en aplicaciones industriales).

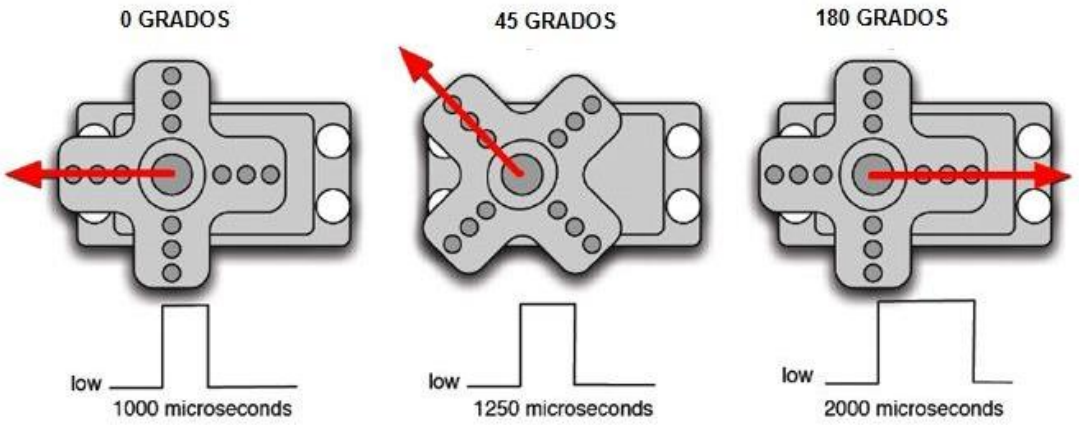


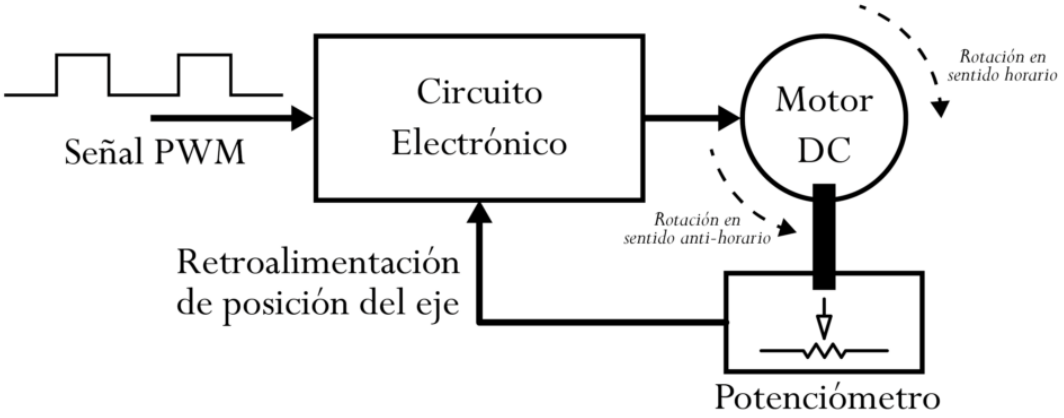


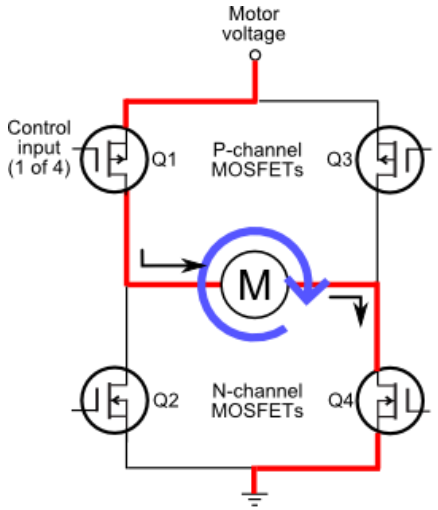
Otro motor utilizado para posición

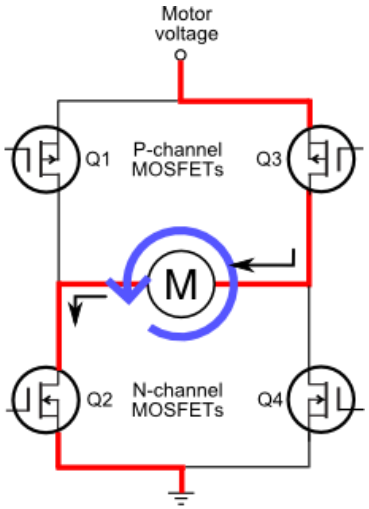
Servo Motor (DC y AC)

Ejemplo DC servo motor para RC:





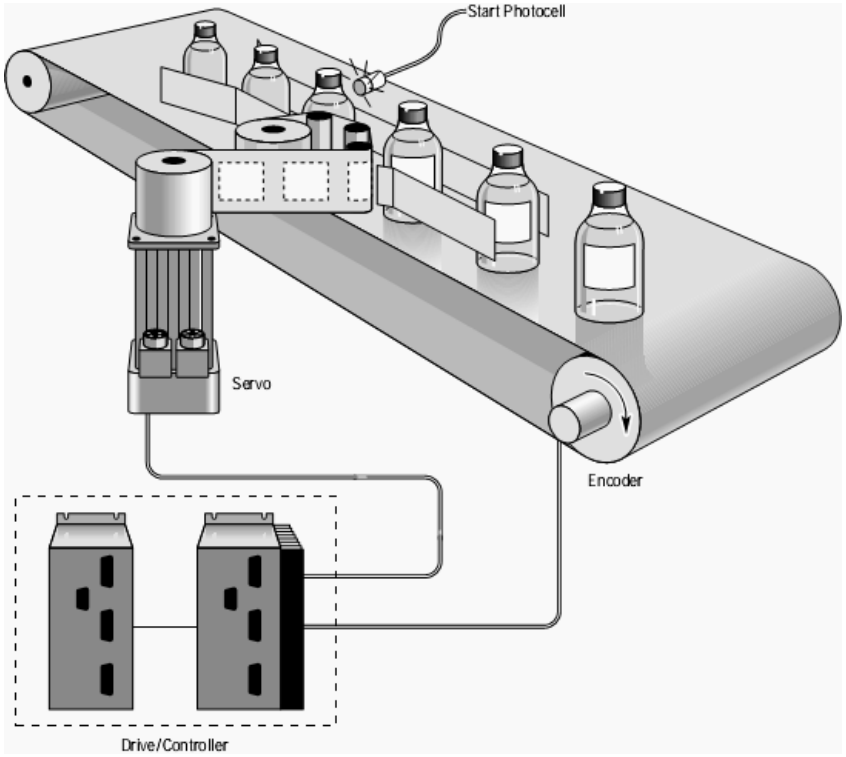


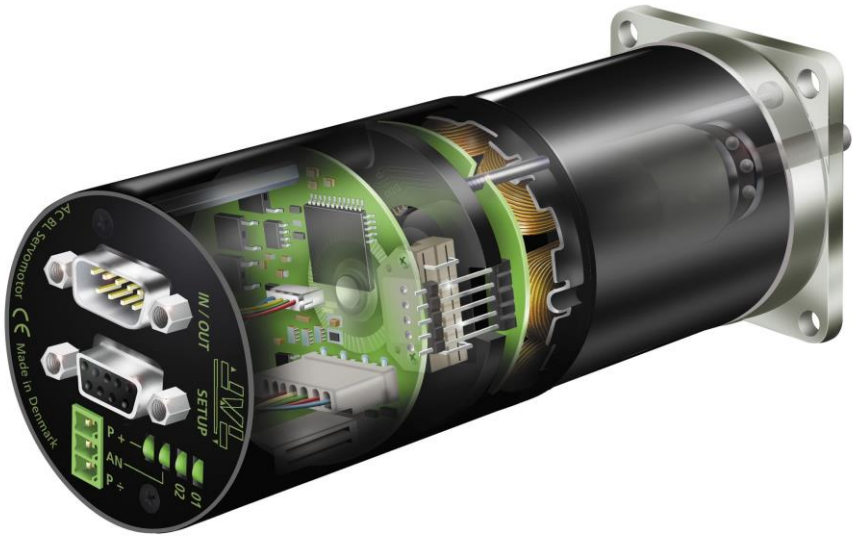


Otro motor utilizado para posición

Servo Motor (DC y AC)

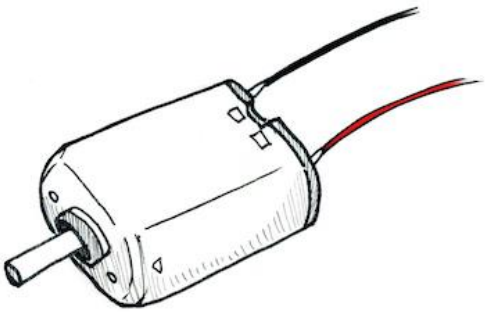
Ejemplo AC servo motor industrial:





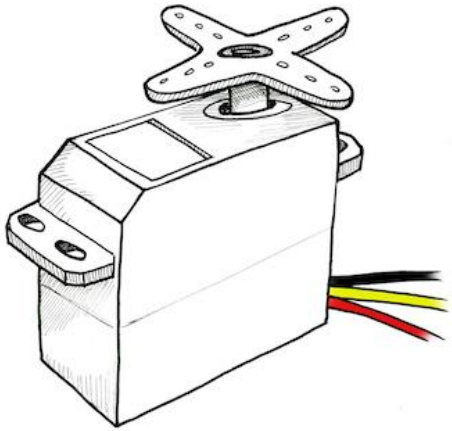
Resumen

DC Motor



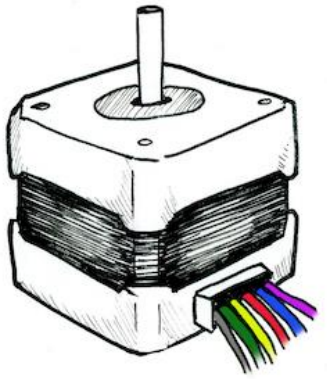
2 Wires

Servo Motor



3 Wires

Stepper Motor

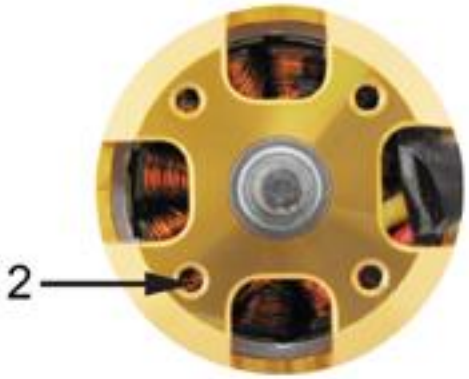


Lots of wires

Otro motor muy utilizado (no solo como servo)
Brushless DC y AC (BLDC y BLAC)

En realidad es un motor síncrono con imanes en el rotor que es alimentado con corrientes trapezoidales (“DC”) o sinusoidales (“AC”) en el estator. Otra forma equivalente de verlo, es como un motor DC con colector electrónico. En ocasiones el rotor es externo para obtener mayor torque (fig. inferior).

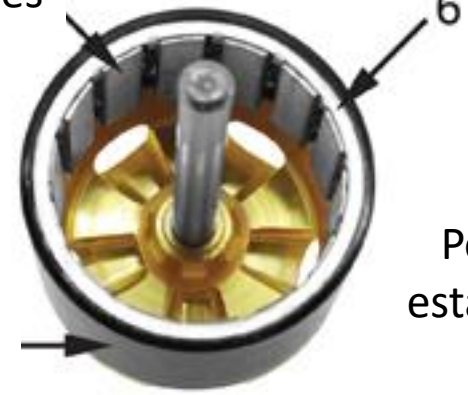






imanes

Bobina



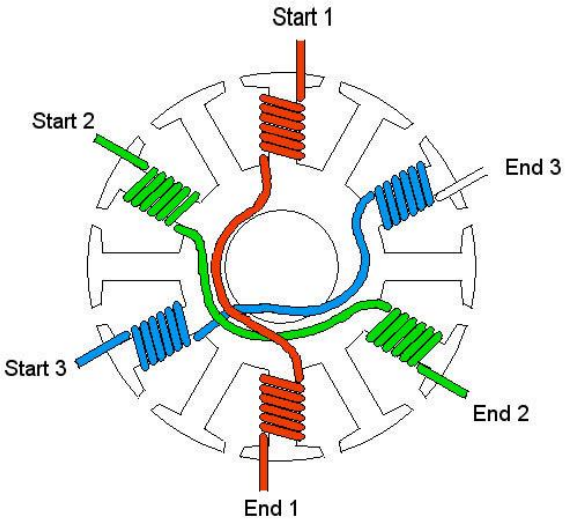
Rotor exterior



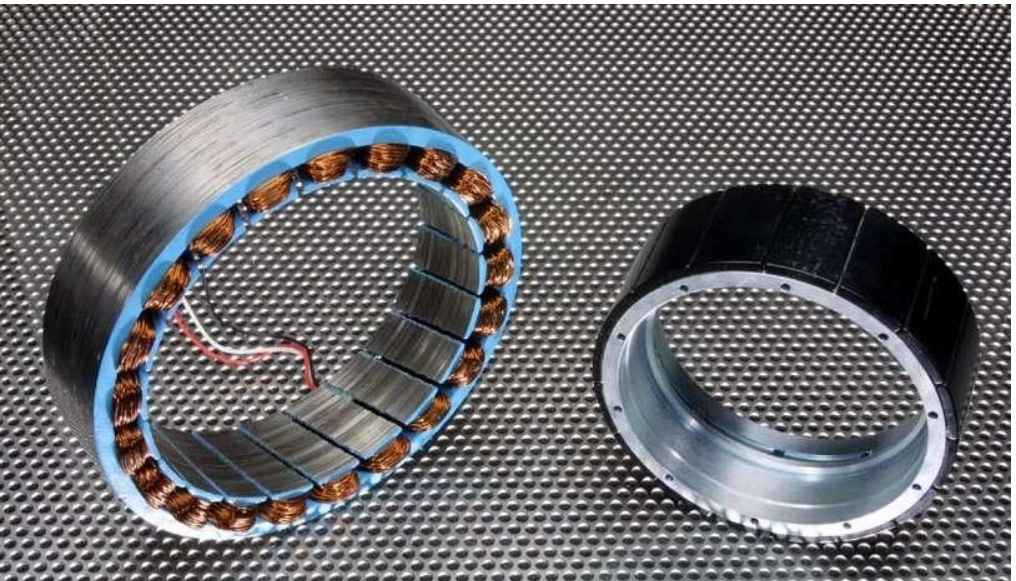
Polos estator

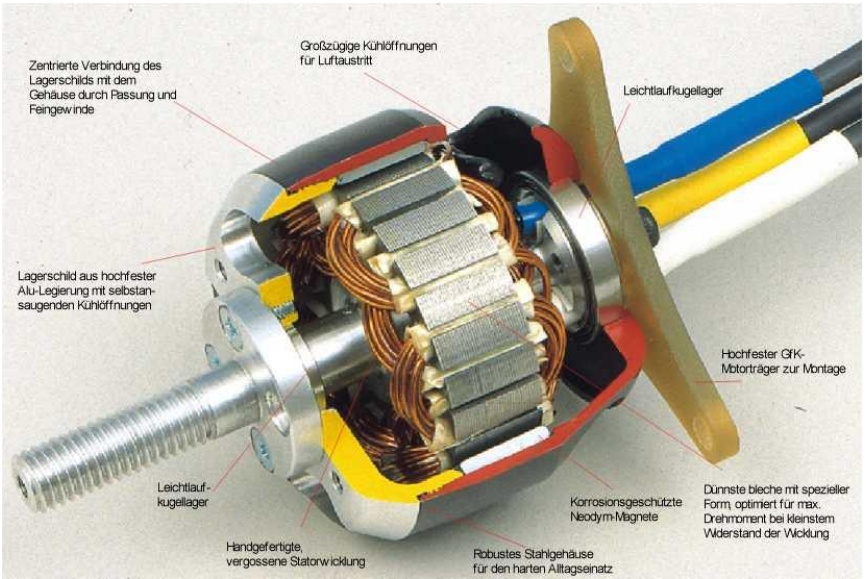


Otro motor muy utilizado (no sólo como servo)
Brushless DC y AC (BLDC y BLAC)





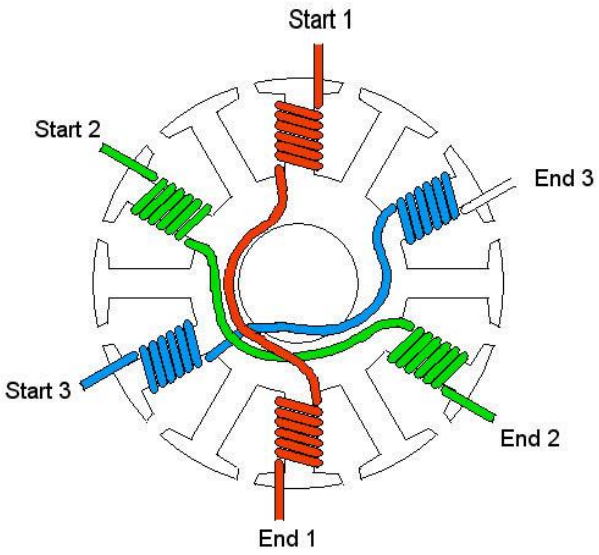


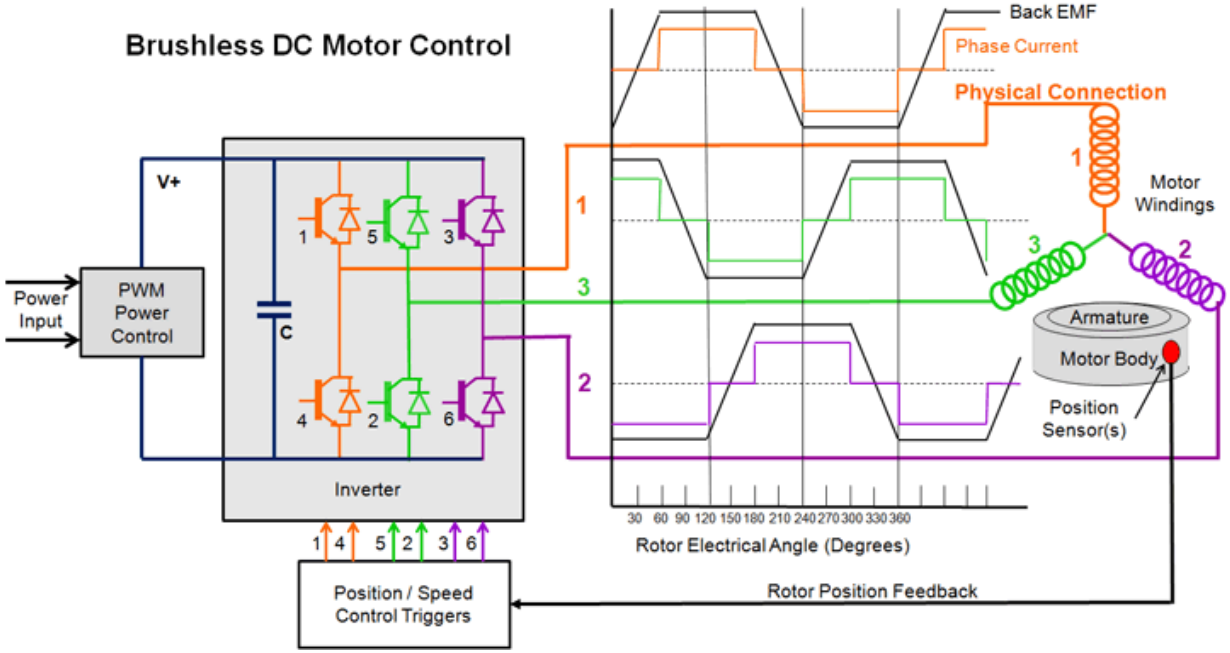


Otro motor muy utilizado (no solo como servo)
Brushless DC y AC (BLDC y BLAC)

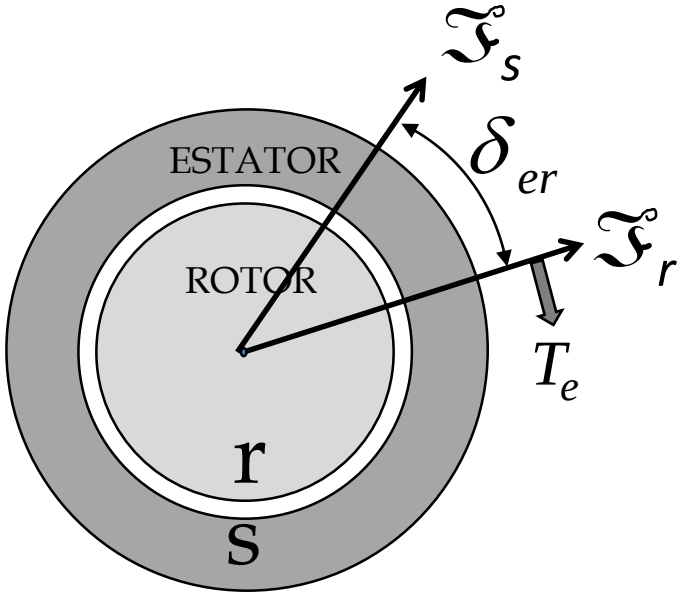
El funcionamiento de este motor es idéntico al paso-paso de imanes permanentes (Half-step-drive). Sin embargo, en el motor paso a paso “half-step-drive” que vimos algunas diapositivas atrás, el estator tiene dos fases y por lo tanto el desfase eléctrico entre ellas es de 90º y el desfase mecánico depende del número de polos utilizados . $\theta_e[°eléctricos] = \theta_m \cdot p[°mecánicos]$

En cambio, en este motor BLDC el estator tiene tres fases, por lo tanto están desfasadas eléctricamente en 120º.





Distribución del Campo Magnético: Máquina Cilíndrica



Máquina Cilíndrica

Campo Magnético en el entrehierro

Supuestos:

- Máquina cilíndrica (rotor y estator): entrehierro distribuido uniformemente
- Permeabilidad infinita del hierro (reluctancia despreciable): No se requiere una f.m.m para generar inducción en esta parte de la máquina, sólo en el entrehierro
- Máquina con sólo un par de polos (luego se extenderá a más pares de polos)

Principios de funcionamiento (Ley de Faraday y Ampére): Tenemos una bobina inductora y una inducida en el rotor y estator respectivamente o viceversa.

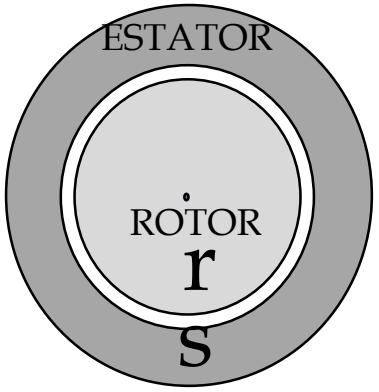
① Bobina inductora genera una f.m.m (F_1) en el entrehierro.

② La f.m.m (F_1) generada induce una f.e.m (E_2) en la bobina inducida.

③ Las f.e.m (E_2) inducida genera una corriente cuando el circuito está “cerrado”

④ Las corrientes inducidas generan otra f.m.m (F_2) en el entrehierro

⑤ El f.m.m del entre hierro está compuesto por las f.m.m del inductor y el inducido ($F_E=F_1+F_2$)



Las f.m.m. y f.e.m de la máquina están directamente relacionadas, Por lo tanto, es fundamental entender cómo es la distribución del campo magnético en el entrehierro para analizar el torque.

Máquina Cilíndrica

Campo Magnético en el entrehierro

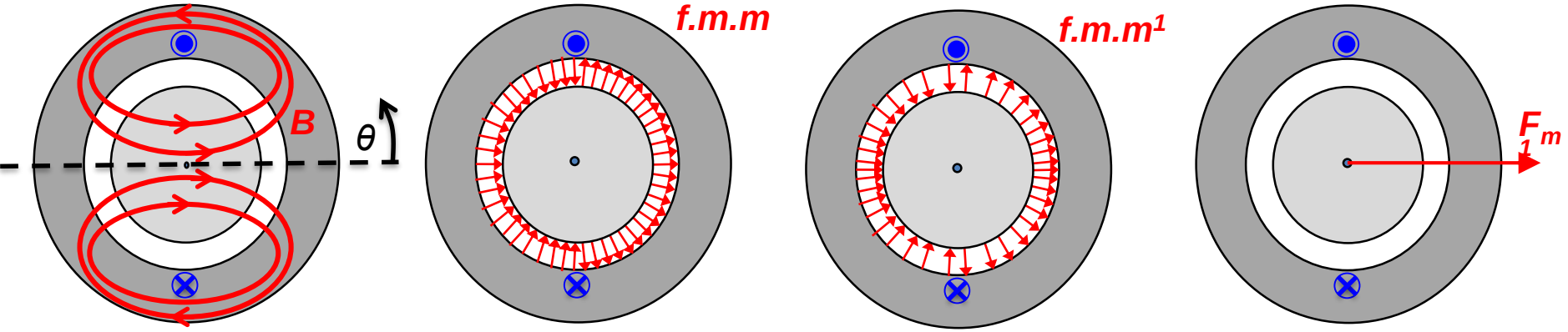
Distribución del la f.m.m en el entrehierro:

① Recordemos que el estator y rotor son ideales (reluctancia nula) por lo tanto su "potencial" magnético es nulo (f.m.m=0), solo hay f.m.m en el entrehierro (verlo como una analogía con nodos eléctricos).

② El campo magnético se distribuye uniformemente por el entrehierro (B y f.m.m tienen magnitud constantes y son positivos entre $-90^o<\theta<90^o$ y negativos en $90^o<\theta<270^o$).

③ Por desarrollo en series de Fourier, sabemos que la distribución constante de f.m.m se puede describir como una distribución sinusoidal (f.m.m^1: componente fundamental) sumada a armónicos impares sinusoidales.

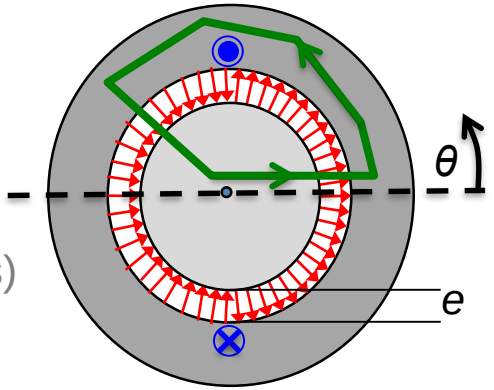
④ La componente fundamental f.m.m^1 puede ser descrita como un fasor espacial que se distribuye geométricamente por el entrehierro $F(\theta)^1=F_m \bullet cos\theta$



Máquina Cilíndrica

Campo Magnético en el entrehierro

Tarea: Comprobar que la distribución del la f.m.m en el entrehierro es uniforme (ayuda: toda máquina eléctrica rotativa tiene asimetría circular):



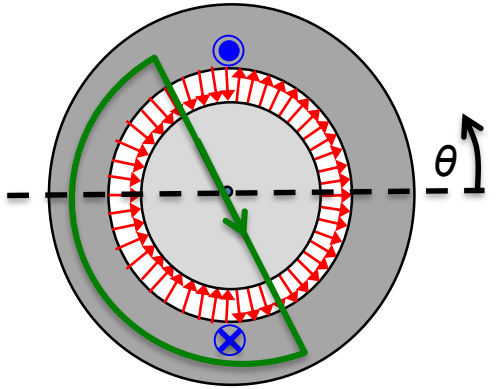
i. Aplicamos la ley de Ampére:

$$\oint_C Hdl = Ni$$

ii. Sólo importa el entrehierro (rotor y estator ideales: ver como nodos)

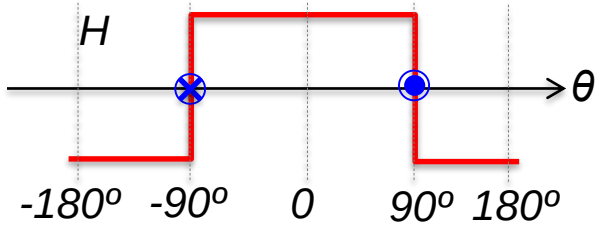
$$\int_{e_1} Hdl + \int_{e_2} Hdl = Ni \quad \Rightarrow \quad H_1 e + H_2 e = Ni$$

iii. ¿Cómo distinguir H_1 y H_2? Utilicemos un camino para aprovechar la simetría de la máquina: $H(\theta)=-H(\theta\pm\pi)$ y $H(\theta)=H(-\theta)$



$$H(\alpha)e - H(\alpha+\pi)e = Ni \quad \Rightarrow \quad H(\alpha) = H = \frac{Ni}{2e}$$

iv. El campo magnético es uniforme y su signo depende del sentido de la corriente. B y F se pueden obtener desde H:



$$B = H \cdot \mu_0$$

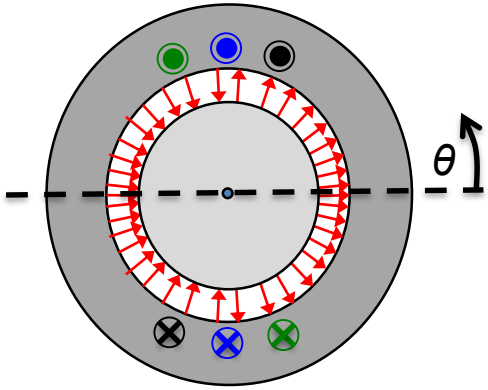
$$\mathfrak{F} = H \cdot e$$

Máquina Cilíndrica

Campo Magnético en el entrehierro

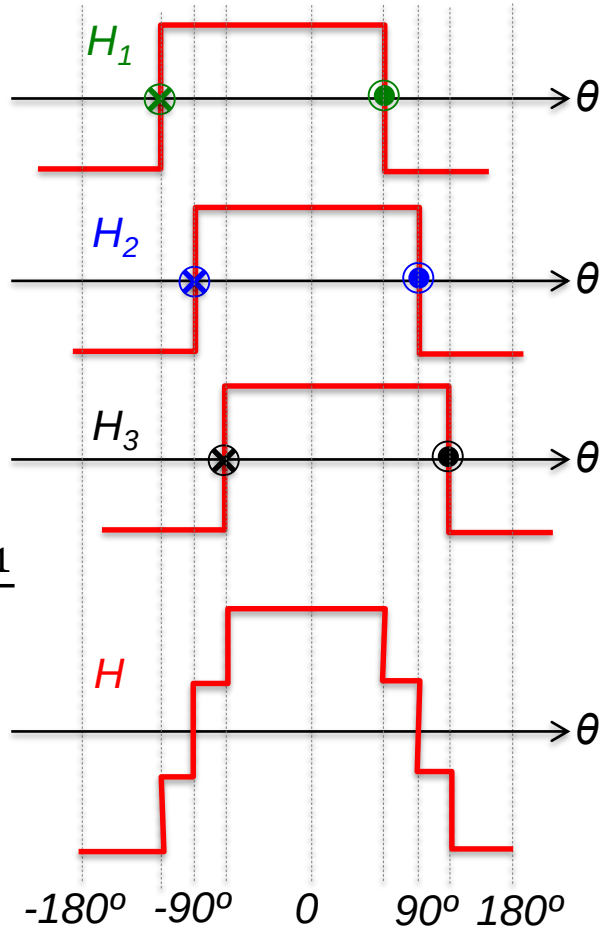
Bobinas distribuidas:

En la práctica, las máquinas se construyen con bobinas distribuidas para aprovechar el espacio físico y generar una f.m.m y f.e.m más sinusoidal.



$$H_1 = \frac{N_1 i_1}{2e}$$

$$H = H_1 + H_2 + H_3$$



Ventajas de trabajar con f.m.m:

***E**s independiente del espesor del entrehierro (e).*

$$B = \mu_0 H = \mu_0 \frac{\sum N_1 i_1}{2e}$$

***C**umple con el principio de superposición (podemos sumar varias f.m.m) ya que es función lineal de la corriente (no así la f.e.m que no es lineal debido a la histéresis).*

$$\mathfrak{F} = H \cdot e = \frac{\sum N_1 i_1}{2}$$

Máquina Cilíndrica
Campo Magnético en el entrehierro

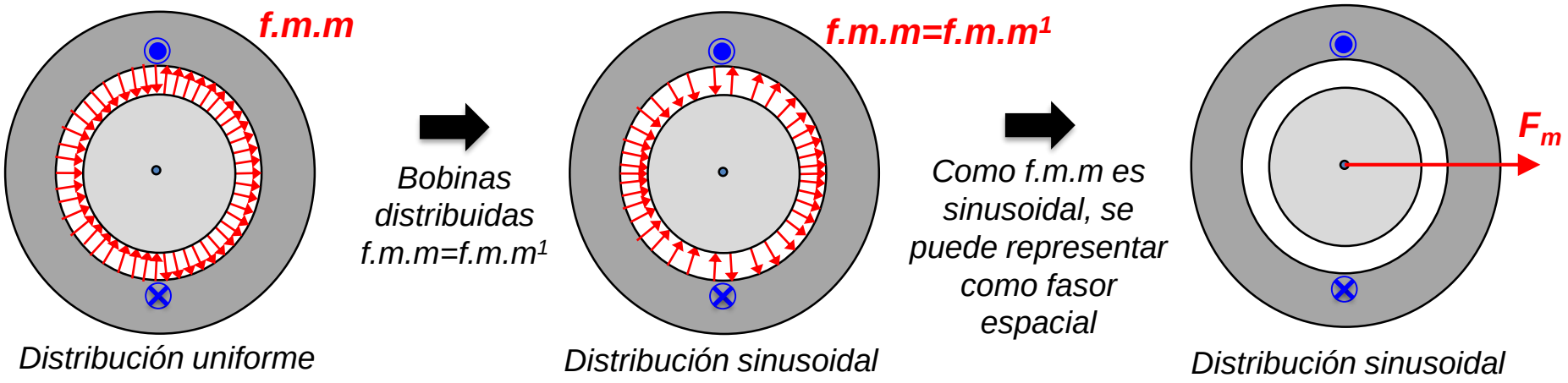
Resumen y suposiciones importantes:

- Demostramos que la f.m.m del entrehierro se distribuye simétricamente y su componente fundamental f.m.m^1 puede ser descrita como un fasor espacial. Además, con una mayor distribución de bobinas, la f.m.m es más similar a la componente fundamental.

$$\mathfrak{J}(\theta) = \mathfrak{J}^1 \cos\theta + \mathfrak{J}^3 \cos 3\theta + \mathfrak{J}^5 \cos 5\theta + \ldots$$

- Por simplicidad gráfica, generalmente se dibuja sólo una bobina por fase pero se supone una distribución ideal de bobinas en toda la máquina, lo que supone que los armónicos de la f.m.m son despreciables (f.m.m es prácticamente igual a la fundamental f.m.m^1).

$$\mathfrak{J}(\theta) = \mathfrak{J}_m \cos\theta$$



Máquina Cilíndrica

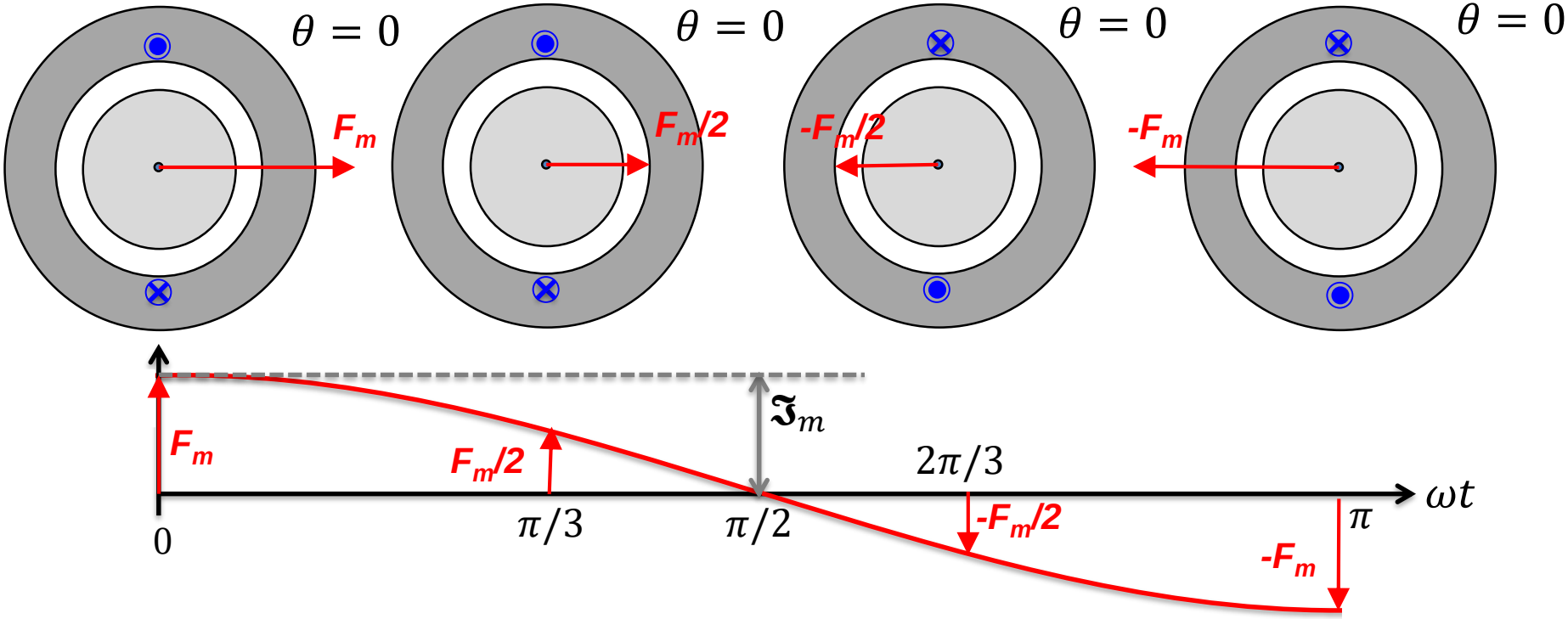
Campo Magnético en el entrehierro

Alimentación con corriente AC:

Si la corriente de la bobina es sinusoidal tenemos:

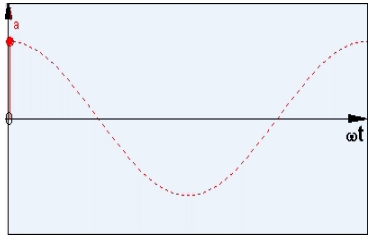
$$i(t) = I_m \cos\omega t \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{I}(\theta, t) = \mathfrak{I}_m \cos\omega t \cos\theta$$

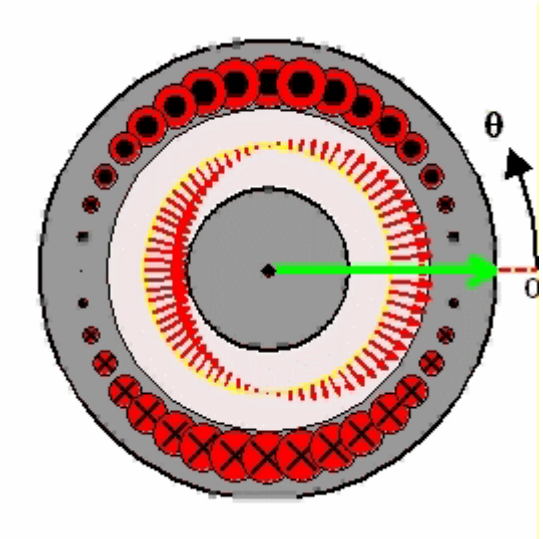
La f.m.m resultante es estacionaria (espacialmente respecto a θ) pero de amplitud variable (sinusoidalmente), lo que se llama una f.m.m pulsante:

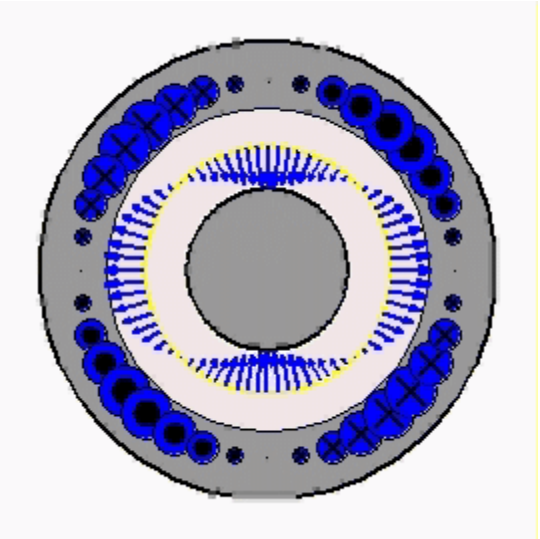


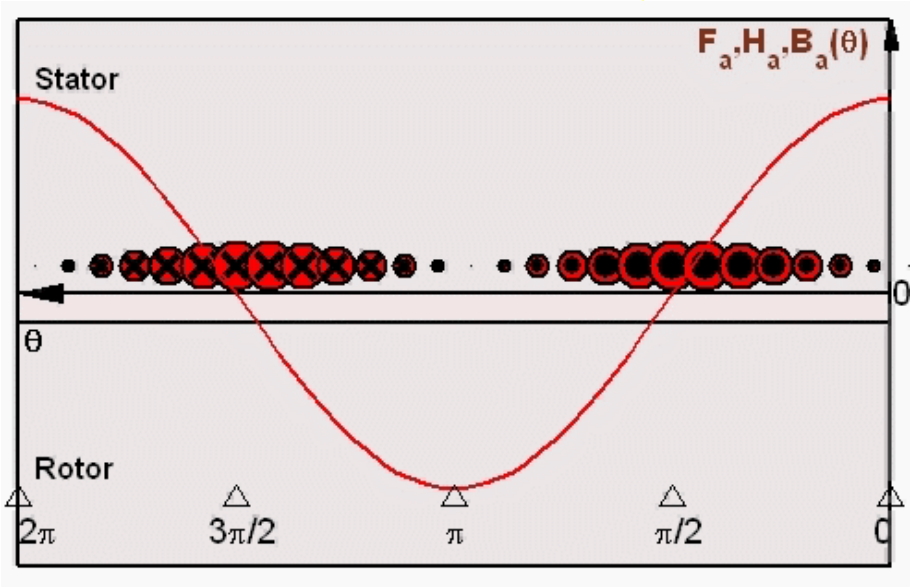
Máquina Cilíndrica

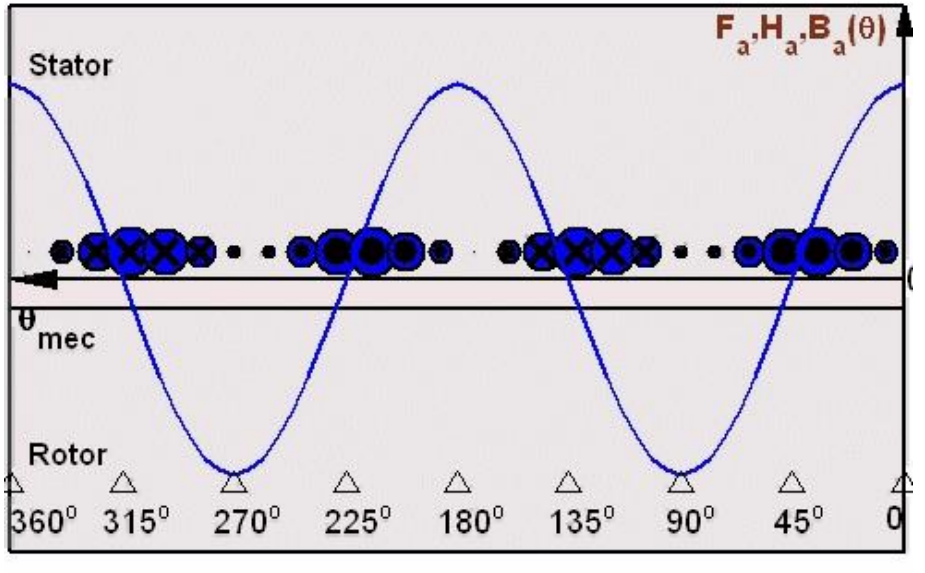
Campo Magnético en el entrehierro







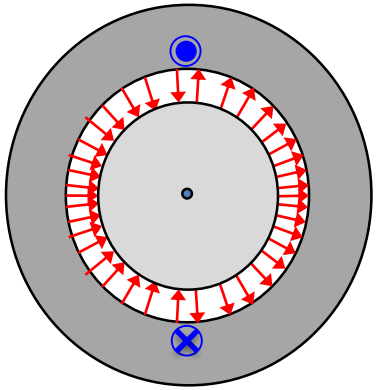




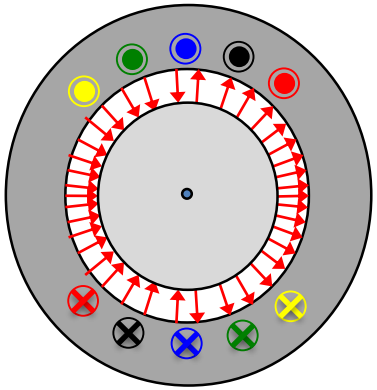
Máquina Cilíndrica

Bobinas en máquinas reales

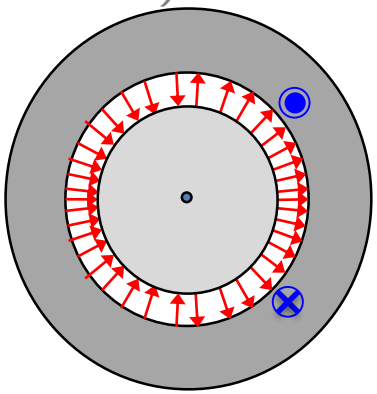
La disposición real de las bobinas es mucho más compleja de lo visto. Se disponen de formas especiales para generar distribuciones sinusoidales y eliminar los armónicos (*esto se estudia analíticamente para optimizar determinadas variables de la máquina, pero es materia de un curso más avanzado de diseño de máquinas que no se dicta en la UC).*



Caso básico (muy utilizado para simplificar gráficos)



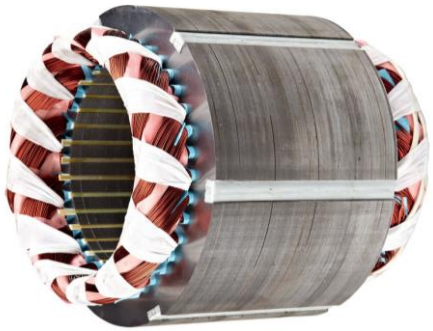
Bobinas distribuidas a lo largo de la máquina

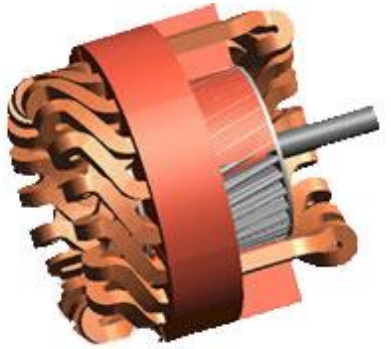


Bobinas no se disponen con "paso diametral" como se ha visto, se disponen con "acortamientos de paso"



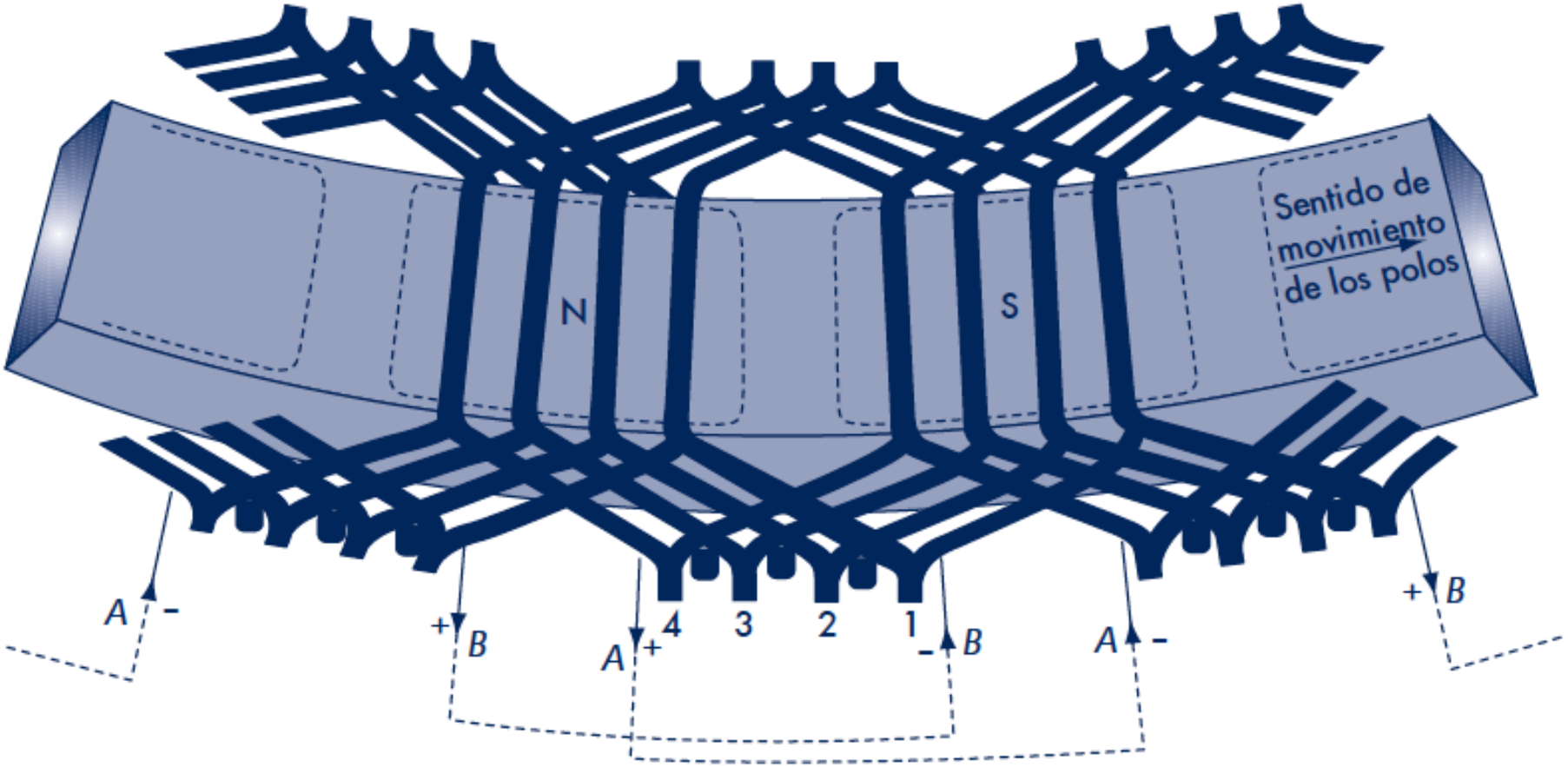


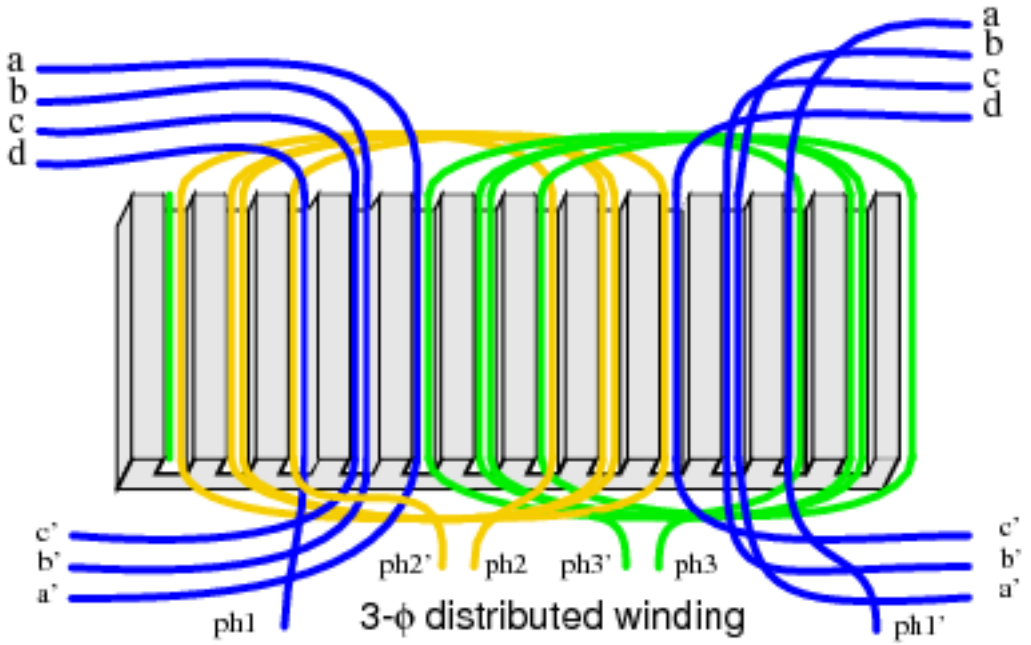


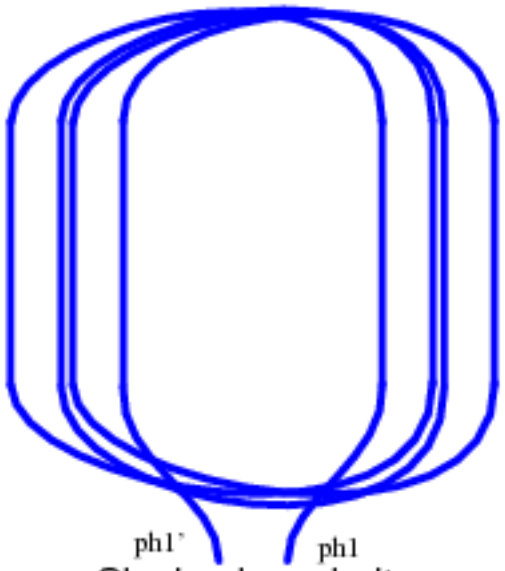


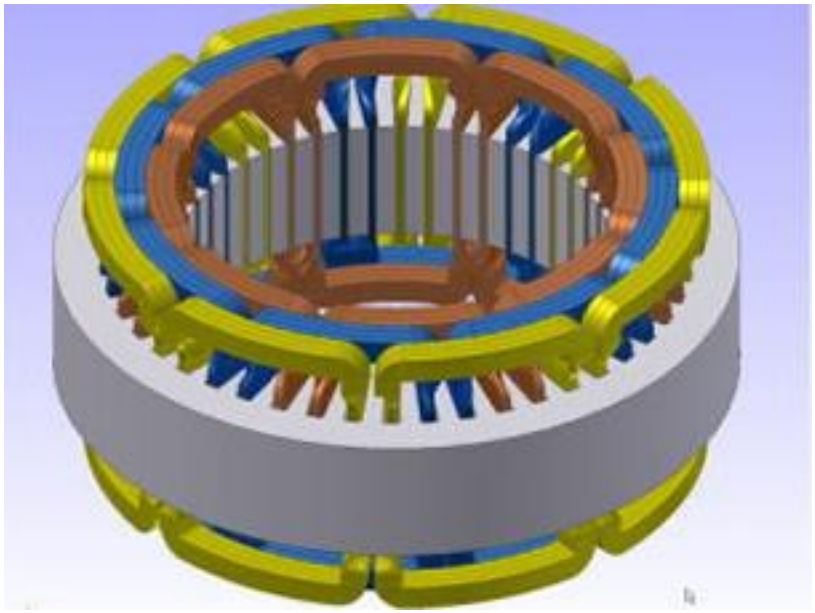
Máquina Cilíndrica

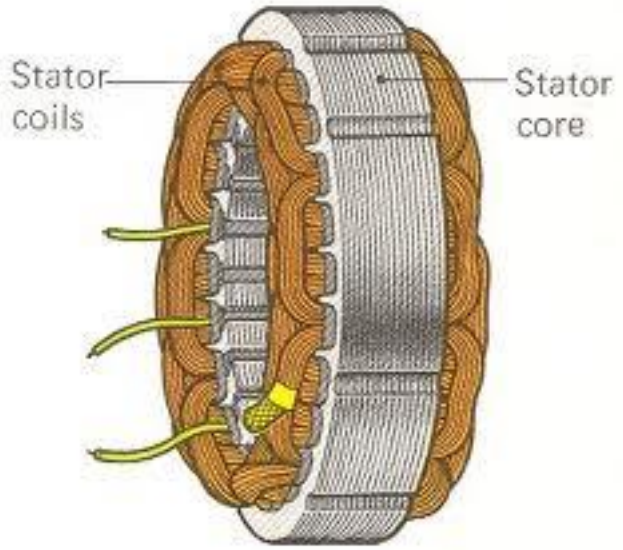
Bobinas en máquinas reales




a
b
c
d
c'
b'
a'
ph2'
ph2
ph3'
ph3
ph1
ph1'
3-ϕ distributed winding


a
b
c
d
ph1'
ph1
Single phase belt




Stator coils
Stator core













End Armor Tape
Gradient Tape
Corona Protection
Ground Wall Tape
Roebel Filler
Crossover Protection
Stack Separator

Otras Máquinas

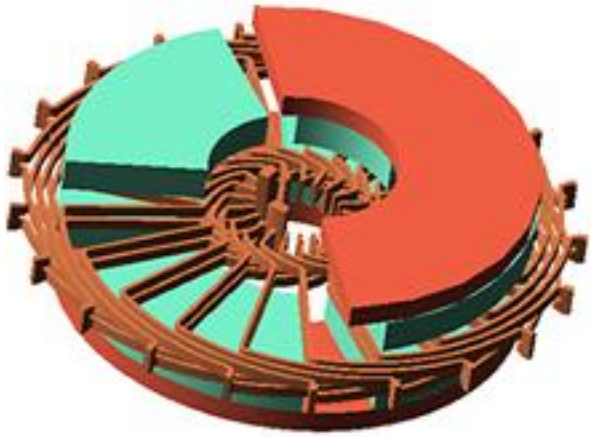
Otros tipos de Bobinas











Máquina Cilíndrica

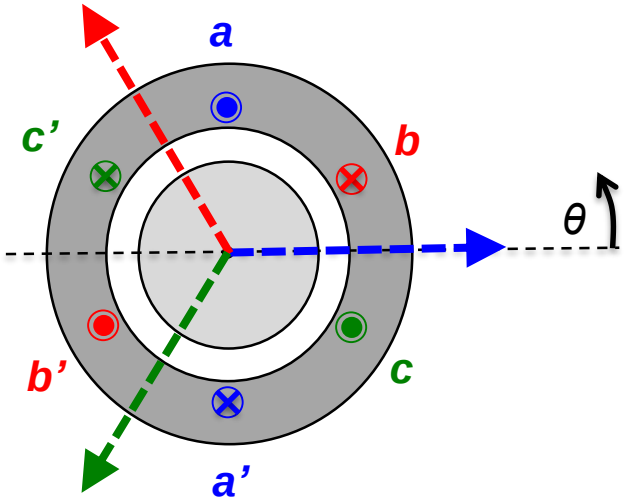
Campo Magnético Rotatorio (CMR)

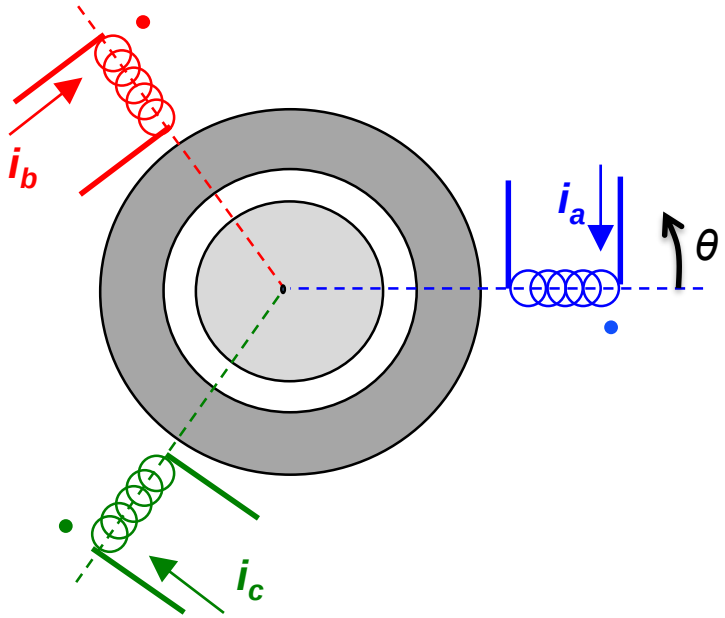
¿Cómo generamos un CMR?:

Se utilizan bobinas trifásicas (cada bobina alimentada por una fase):

$$i_a(t) = I_m \cos\omega t \qquad i_b(t) = I_m \cos(\omega t - 120°) \qquad i_c(t) = I_m \cos(\omega t + 120°)$$

La bobina de una determinada fase debe estar distribuida a 120º "eléctricos" de las bobinas adyacentes. Si tenemos sólo un par de polos, los grados eléctricos son iguales a los geométricos.





Máquina Cilíndrica

Campo Magnético Rotatorio (CMR)

$$\mathfrak{F}_m^1 = K_d \frac{4}{\pi}\frac{NI_m}{2}$$

Si queremos ser precisos este es el valor de F^1_m fundamental con factor de distribución del devanado K_d

$$\mathfrak{F}_m = \frac{NI_m}{2}$$

¿Cómo generamos un CMR?:

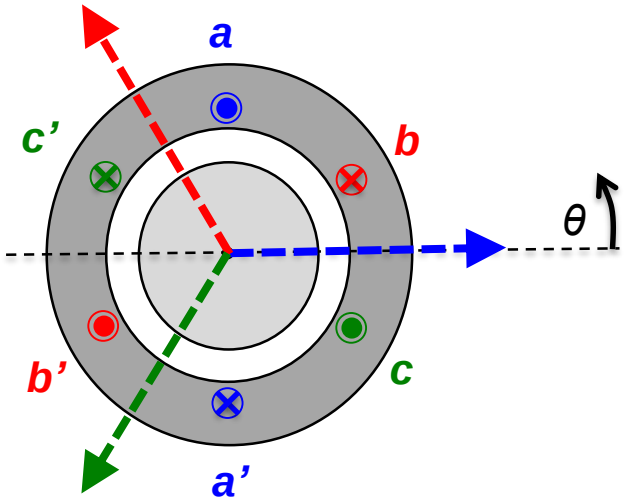
Como se vio en algunas diapositivas anteriores, las f.m.m. De cada fase son:

$$i_a(t) = I_m \cos\omega t \Rightarrow \mathfrak{F}_a(t) = \mathfrak{F}_m \cos\omega t \cos\theta$$

$$i_b(t) = I_m \cos(\omega t - 120°) \Rightarrow \mathfrak{F}_b(t) = \mathfrak{F}_m \cos(\omega t - 120°)\cos(\theta - 120°)$$

$$i_c(t) = I_m \cos(\omega t + 120°) \Rightarrow \mathfrak{F}_c(t) = \mathfrak{F}_m \cos(\omega t + 120°)\cos(\theta + 120°)$$

Además, ya sabemos que las f.m.m cumplen el principio de superposición, por lo tanto la f.m.m resultante del entrehierro está dada por la suma de todas las f.m.m:



$$\mathfrak{F}_s = \mathfrak{F}_a + \mathfrak{F}_b + \mathfrak{F}_c$$

Teorema de Ferraris

$$\mathfrak{F}_s = \frac{3}{2}\mathfrak{F}_m \cdot \cos(\omega t - \theta)$$

Tarea: *Demostrar la ecuación anterior utilizando la siguiente igualdad trigonométrica:*

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$$

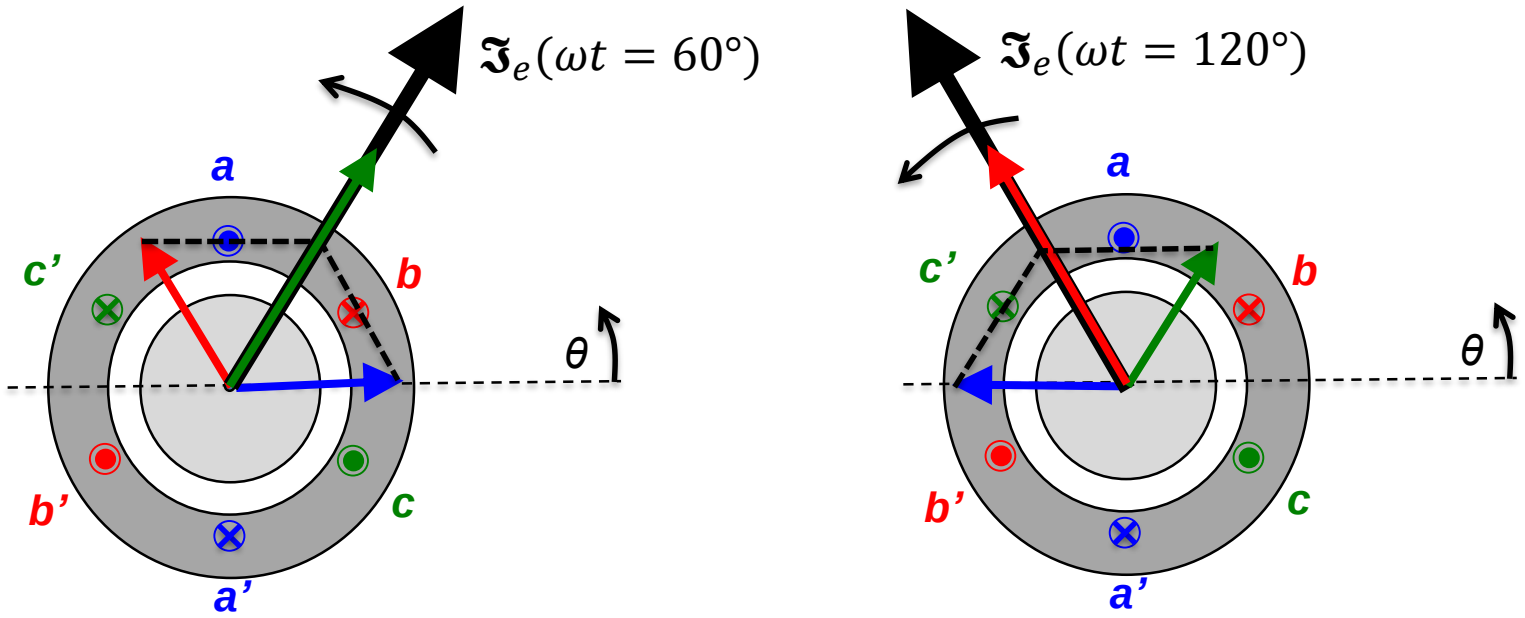
Máquina Cilíndrica

Campo Magnético Rotatorio (CMR)

La f.m.m del entrehierro gira a la velocidad síncrona:

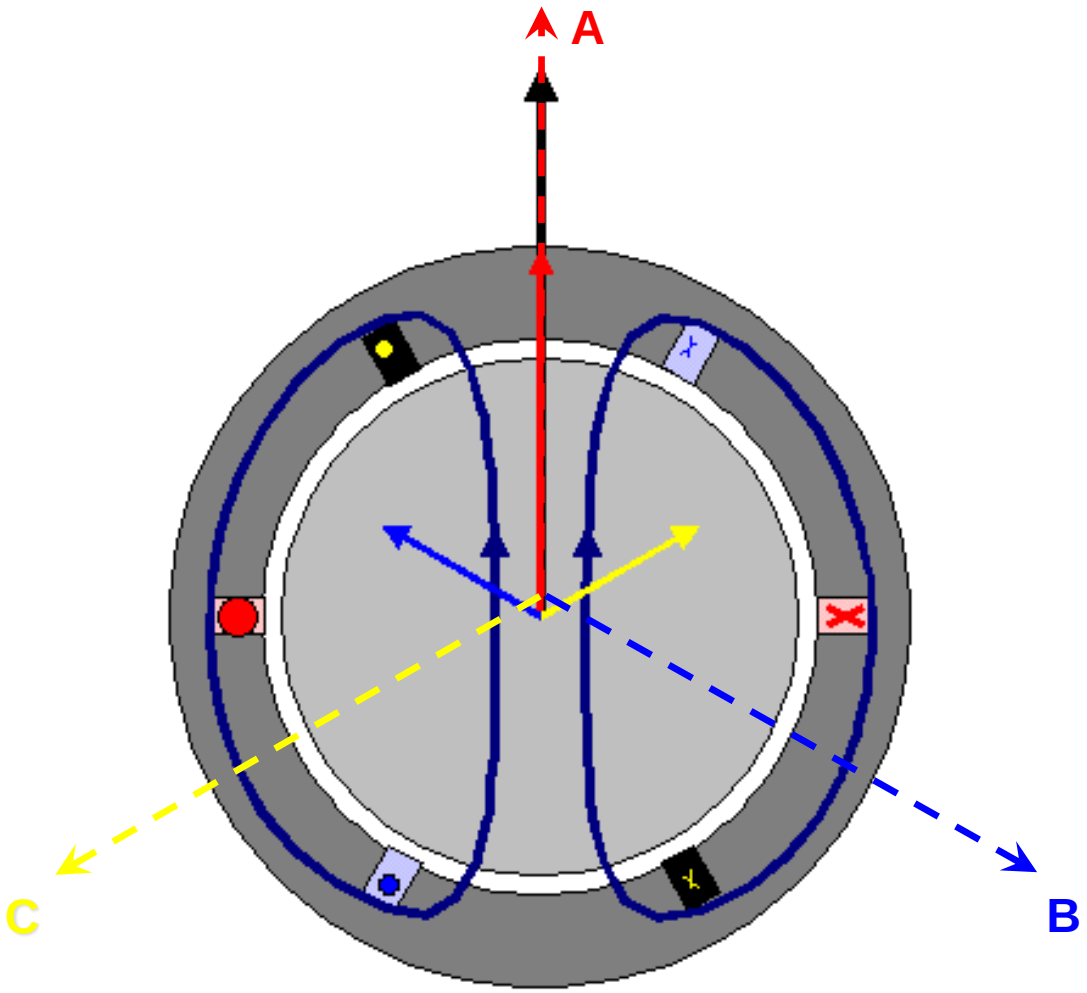
En este ejemplo el f.m.m del entrehierro es producido por las f.m.m. trifásicas del estator, pero falta agregar la f.m.m. generada en el rotor, la cual varia dependiendo el tipo de máquina (este f.m.m se verá en detalle más adelante).

$$\mathfrak{I}_s = \frac{3}{2}\mathfrak{I}_m \cdot \cos(\omega t - \theta)$$



Máquina Cilíndrica

Campo Magnético Rotatorio (CMR)



Fase A

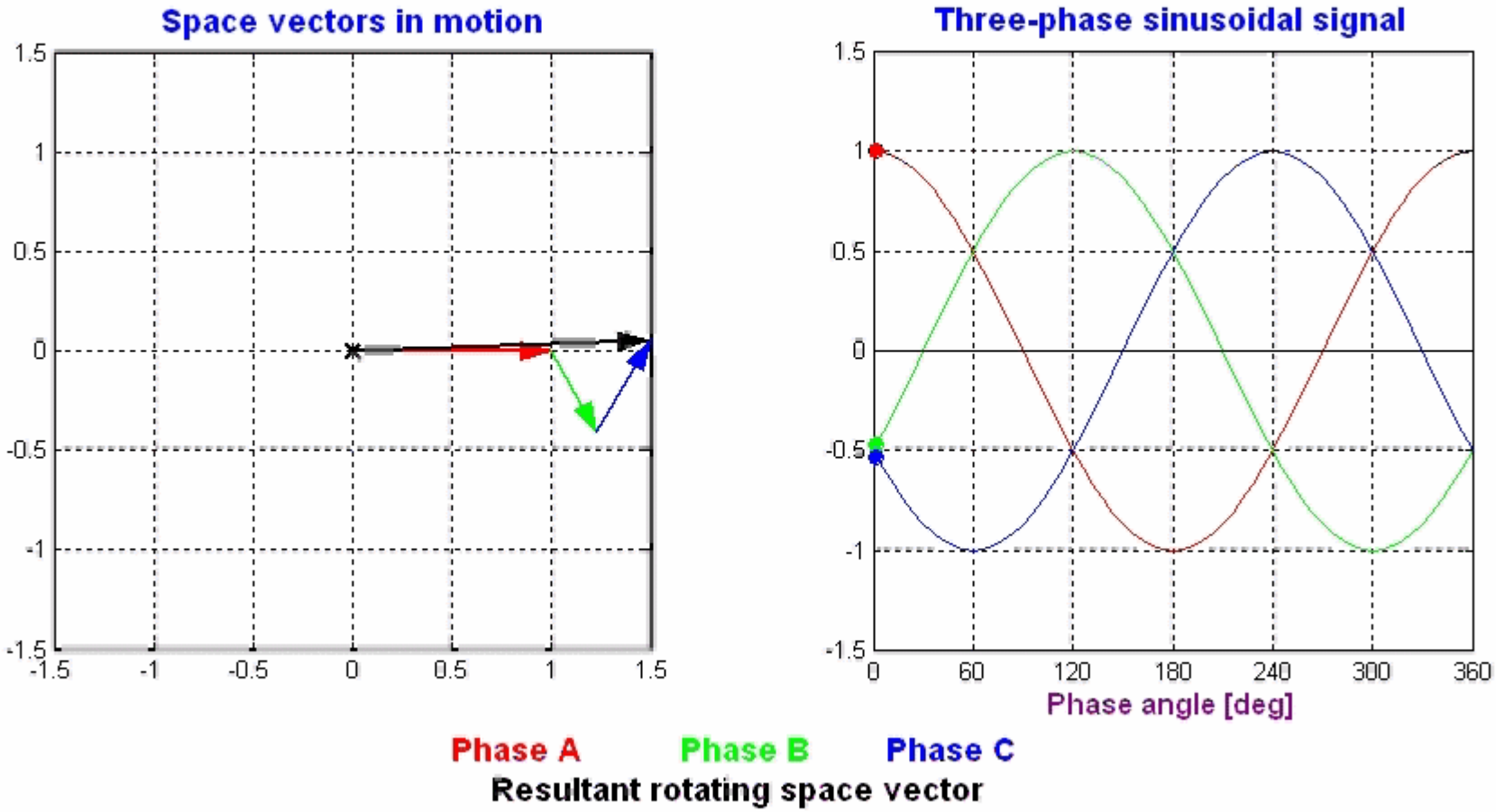
Fase B

Fase C

Resultante

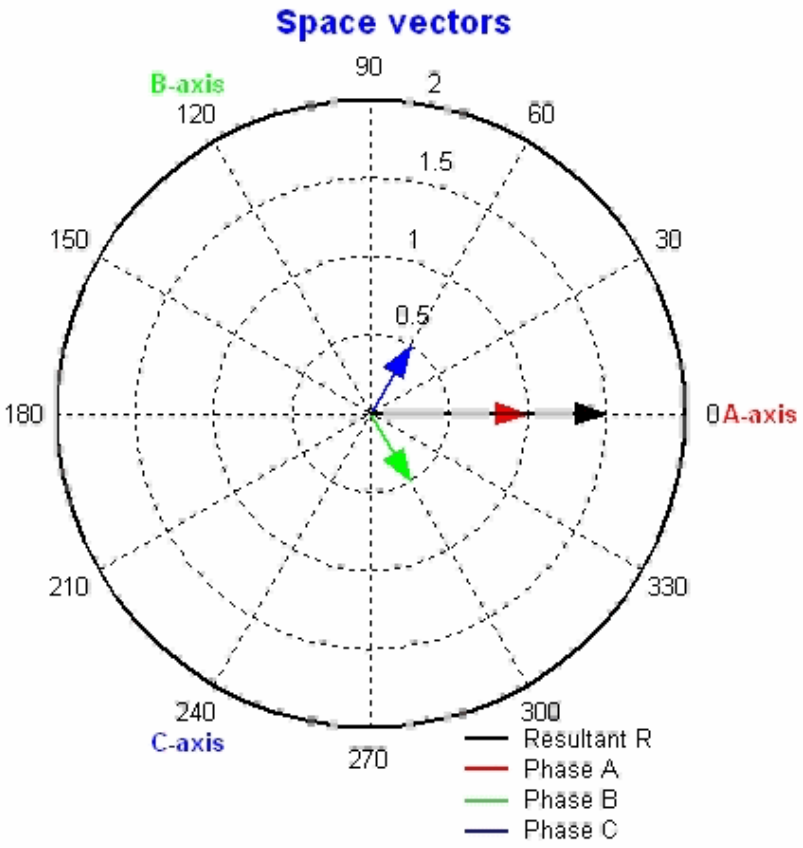
Máquina Cilíndrica

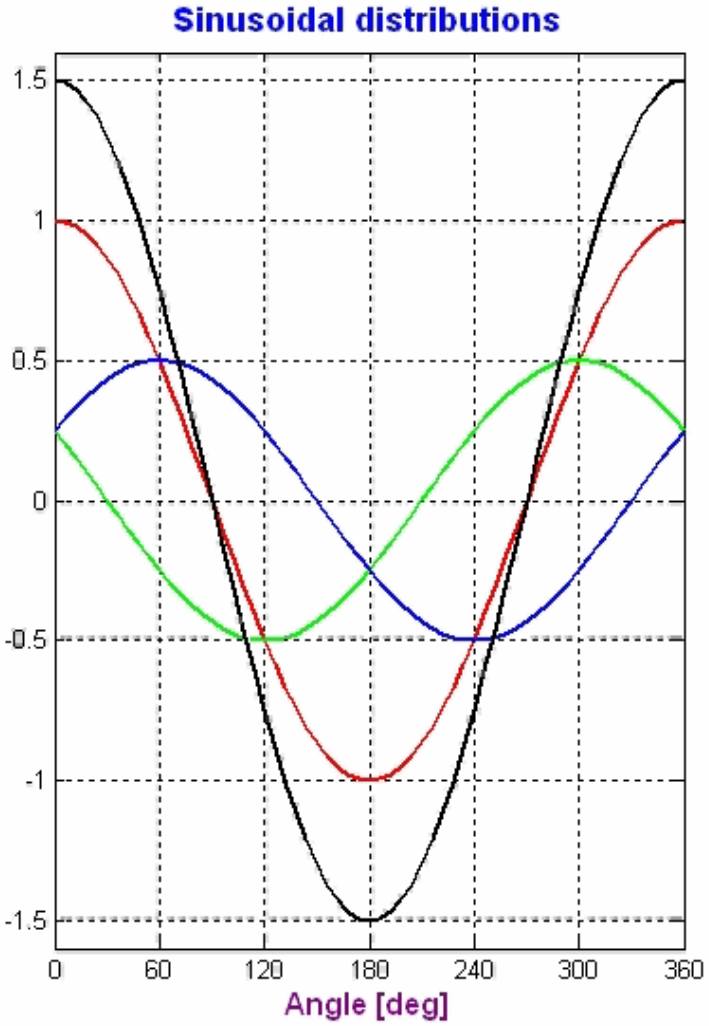
Campo Magnético Rotatorio (CMR)



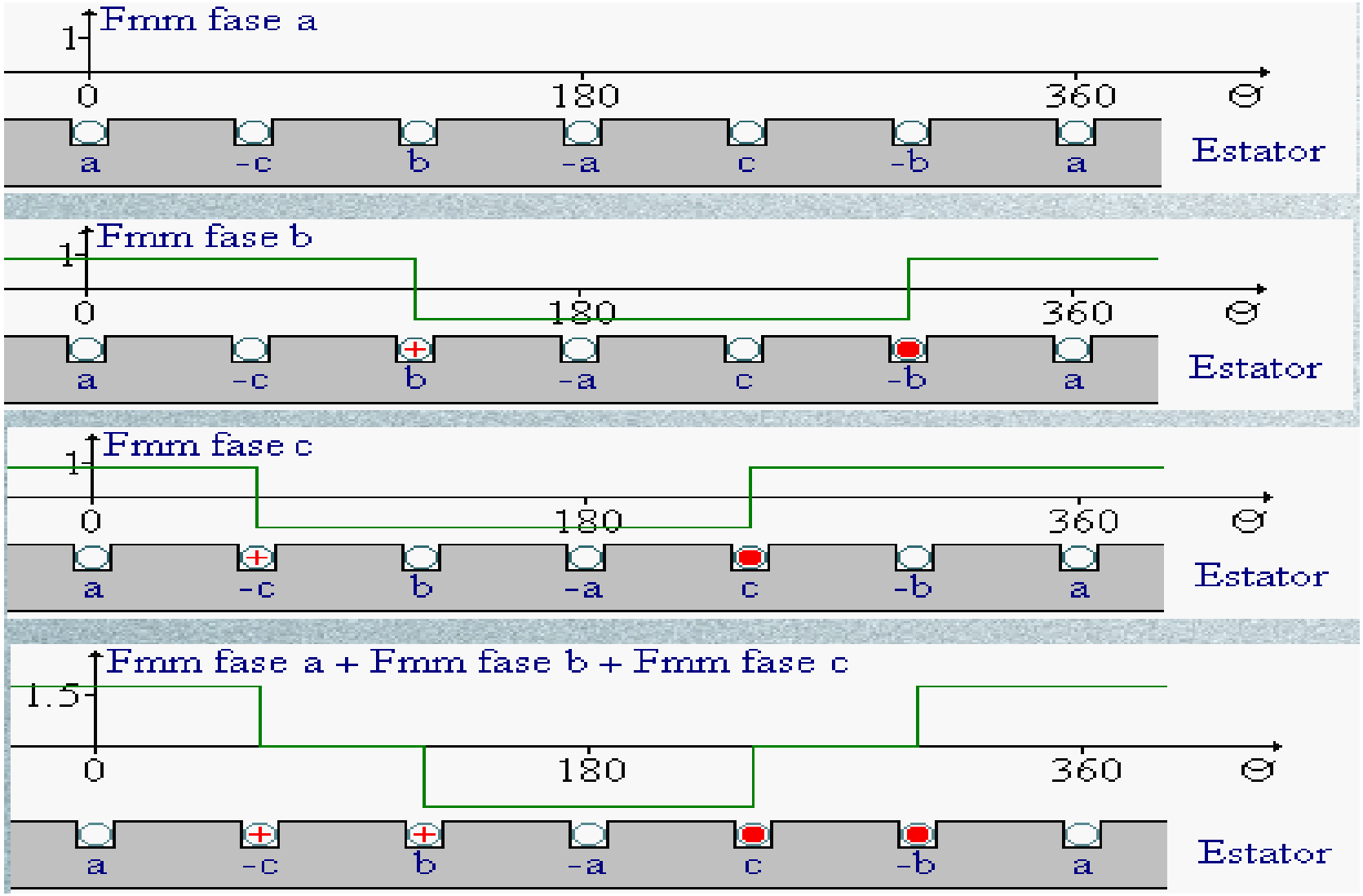
Máquina Cilíndrica

Campo Magnético Rotatorio (CMR)





Estator de una máquina expandido sin enrollados distribuídos



En este ejemplo simplificado de fuerzas magnetomotrices rectangulares, se puede apreciar el efecto combinado (abajo) que genera una onda viajera.

Máquina Cilíndrica

Torque y f.m.m

Rotor y estator cilíndrico: Según lo visto anteriormente para que exista torque en una maquina cilíndrica se requiere una excitación en el estator y el rotor, ya que el torque de reluctancia es nulo (la reluctancia no varia con la posición):

$$T_e(i,\theta) = \frac{1}{2} i_1^2 \frac{dL_{11}}{d\theta} + i_1 \cdot i_2 \frac{dL_{12}}{d\theta} + \frac{1}{2} i_2^2 \frac{dL_{22}}{d\theta}$$

($\frac{dL_{11}}{d\theta}$ y $\frac{dL_{22}}{d\theta}$ tienden a 0)

$$\Rightarrow \quad T_e(i,\delta) = i_1 \cdot i_2 \frac{dL_{sr}}{d\delta}$$

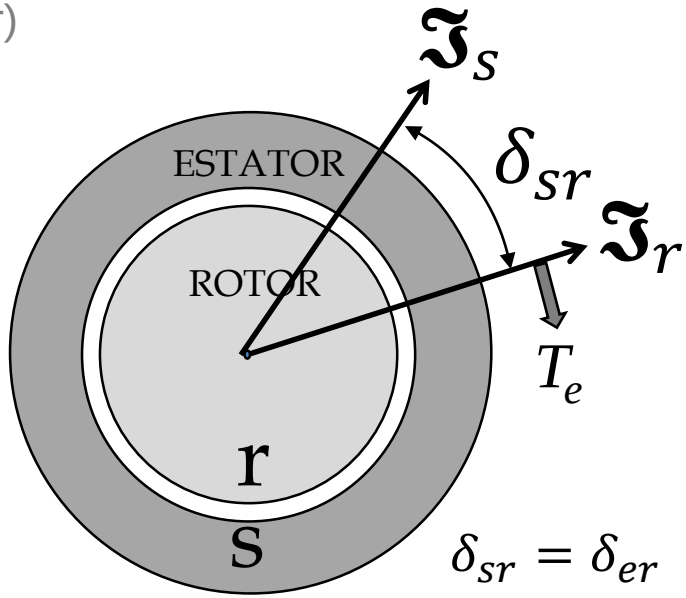
Si los flujos magnéticos del rotor y estator son sinusoidalmente rotatorios (distribución especial de las bobinas en el estator y rotor)

$$L_{sr}(\delta) = L_{sr}^{max} \cos\delta_{sr}$$

$$L_{sr}^{max} = \frac{N_s \cdot N_r}{\Re_{sr}} \qquad L = \frac{N^2}{\Re}$$

$$T_e = -i_s \cdot i_r \frac{N_s \cdot N_r}{\Re_{sr}} \sin\delta_{sr}$$

$$T_e = -\frac{\mathfrak{I}_s \cdot \mathfrak{I}_r}{\Re_{sr}} \sin\delta_{sr}$$



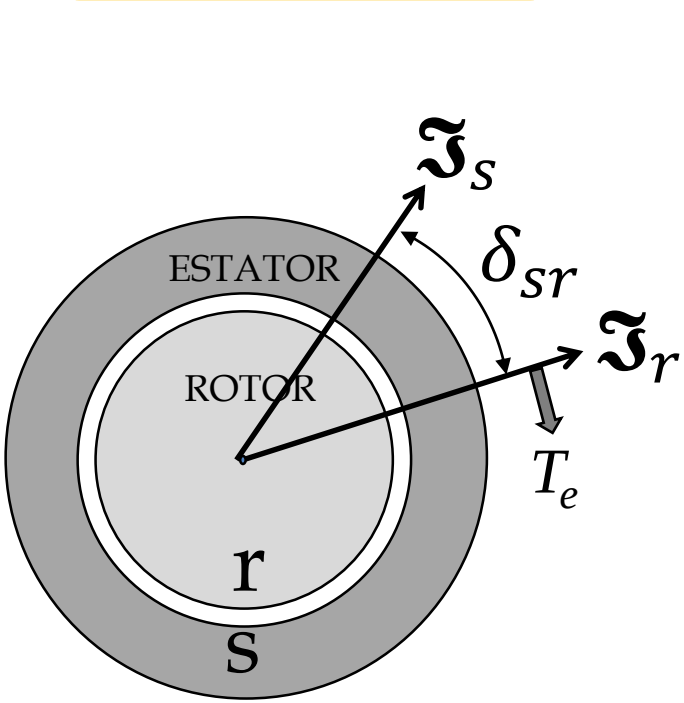
Máquina Cilíndrica

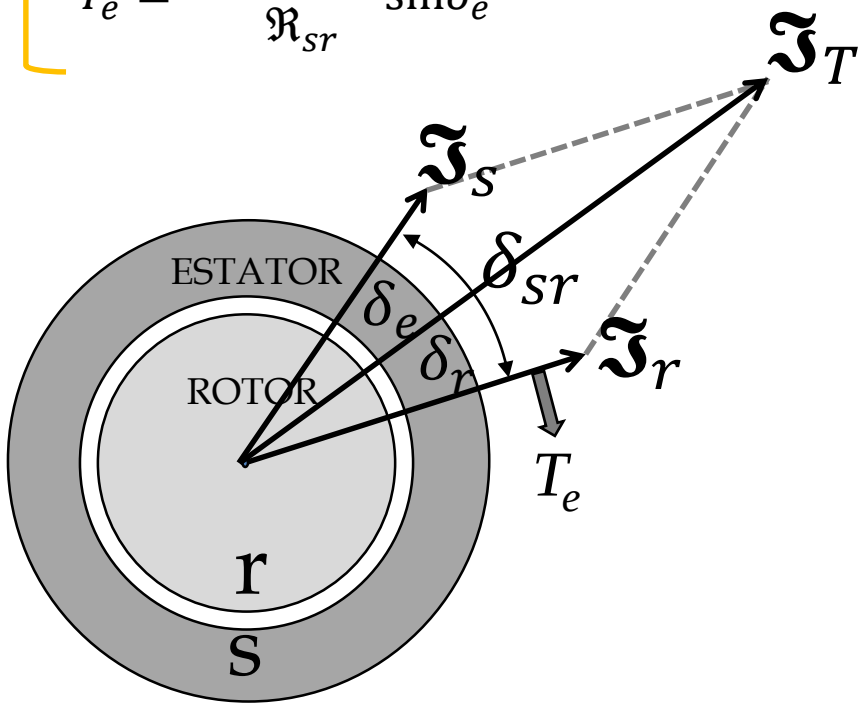
Torque y f.m.m

Rotor y estator cilíndrico: Según el principio de superposición se pueden sumar la f.m.m del estator y del rotor para obtener la f.m.m total del entrehierro:

$$T_e = -\frac{\mathfrak{F}_s \cdot \mathfrak{F}_r}{\Re_{sr}} \sin\delta_{sr}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} T_e = -\dfrac{\mathfrak{F}_T \cdot \mathfrak{F}_r}{\Re_{sr}} \sin\delta_r \\ T_e = -\dfrac{\mathfrak{F}_e \cdot \mathfrak{F}_T}{\Re_{sr}} \sin\delta_e \end{cases}$$





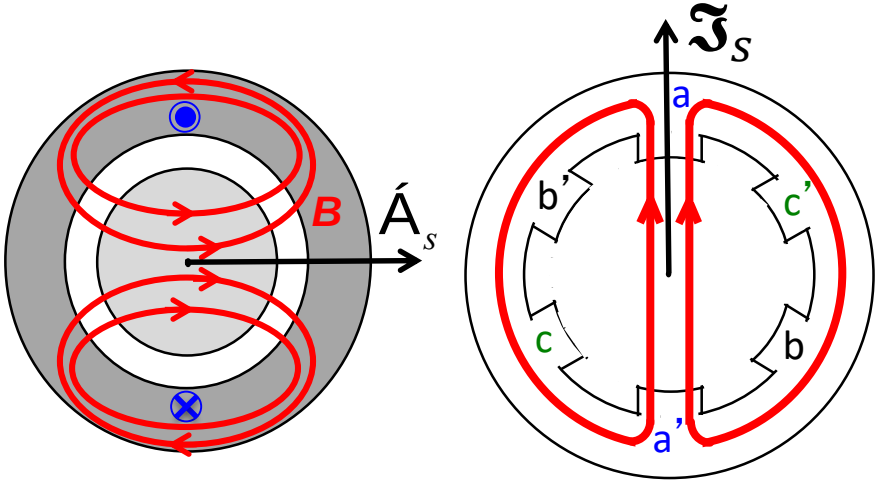
Máquina Cilíndrica

Pares de Polos

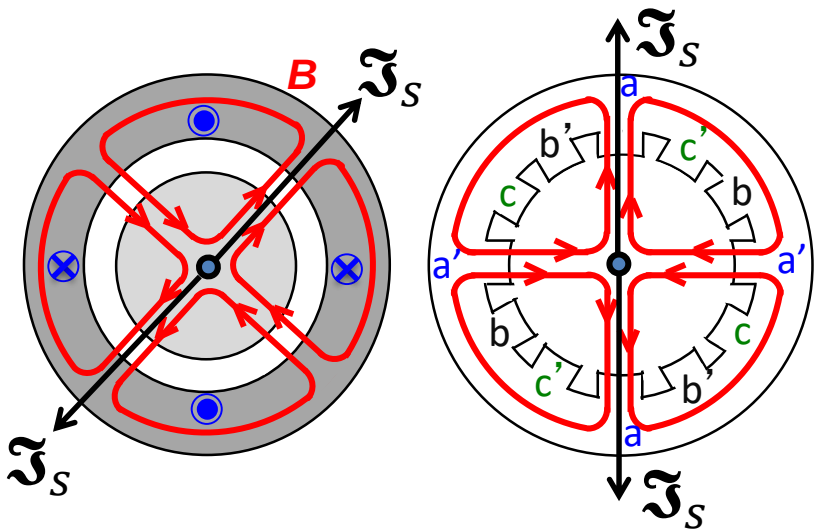
1 par de polos: En general, hasta ahora se han visto máquinas con 1 par de polos (CMR gira a la misma frecuencia que la alimentación AC ➔ $\omega_s=\omega$).

2 o más pares de polos: La teoría y fórmulas son prácticamente las mismas, pero como se vio en la diapositiva 9, ***al aumentar el número de pares de polos, aumenta el torque y disminuye la velocidad mecánica en igual proporción***. la relación entre frecuencia mecánica (geométrica) y eléctrica varía.
(CMR gira a una frecuencia distinta a la de alimentación AC ➔ $\omega_s=\omega/p$ donde *p* es el número de pares de polos).

Pares de Polos: 1



Pares de Polos: 2

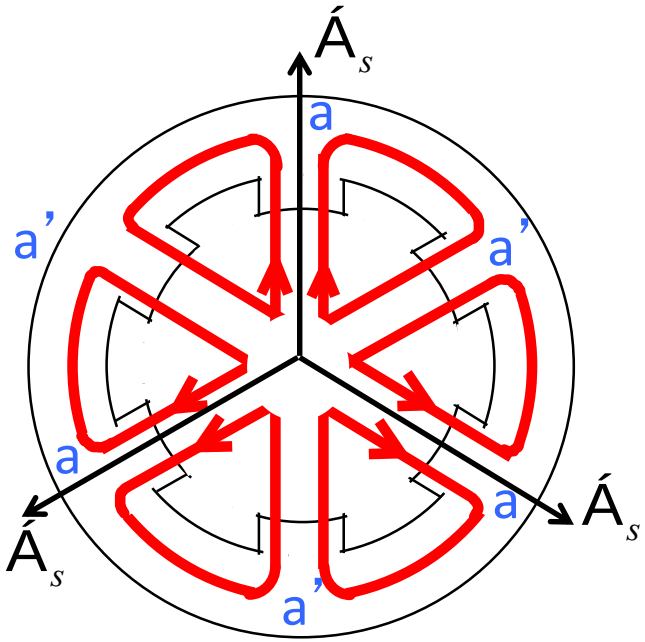


Máquina Cilíndrica

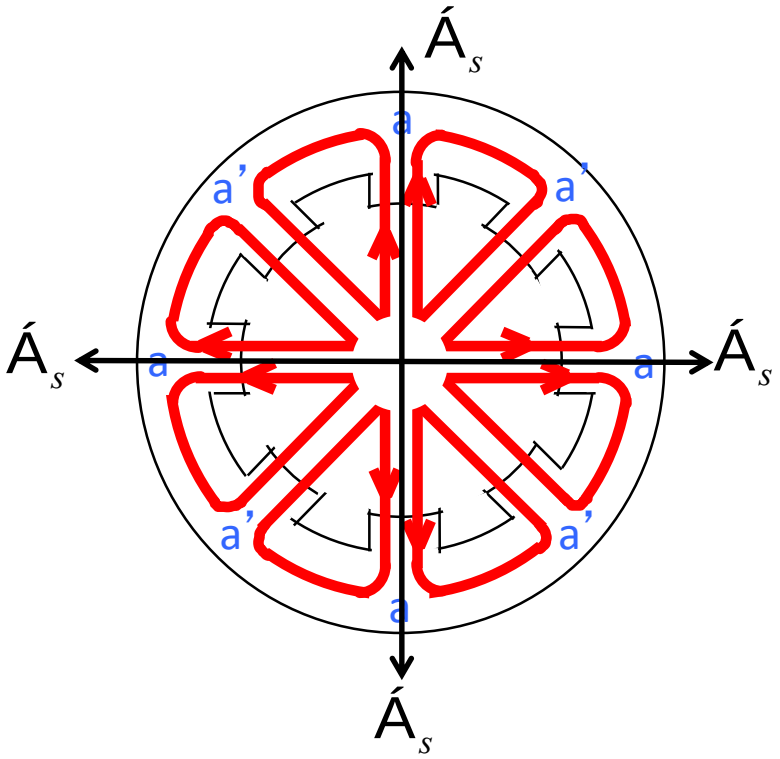
Pares de Polos

Por simplificación grafica sólo se ilustra la fase a

Pares de Polos: 3



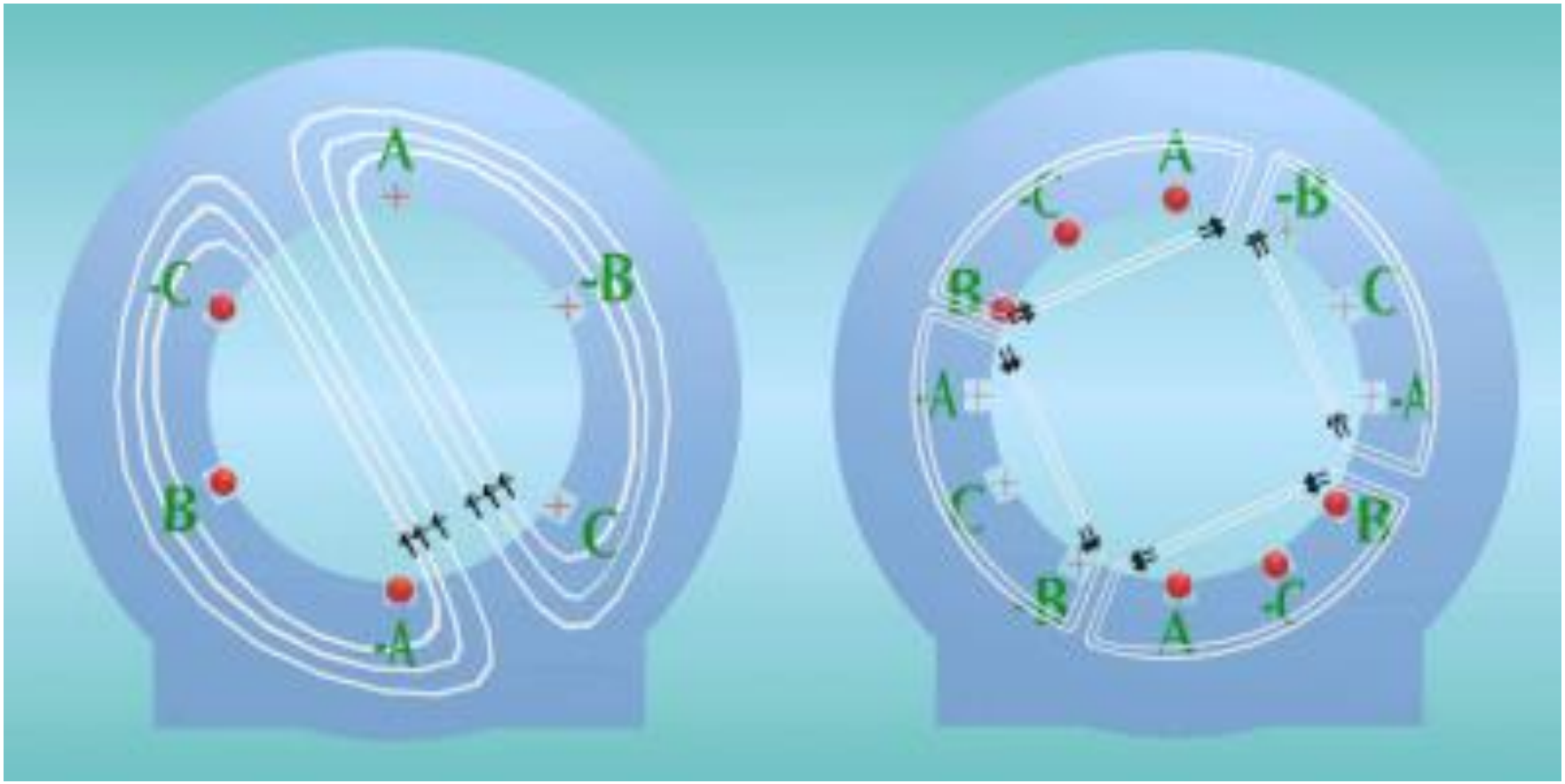
Pares de Polos: 4



Máquina Cilíndrica

Campo Magnético Rotatorio (CMR)

Un par de polos ***Dos pares de polos***



Máquina Cilíndrica
Número de Polos

Definiciones importantes:

- **Frecuencia de alimentación o red ($\omega = 2\pi f$):** frecuencia del voltaje y corriente de alimentación.
- **Velocidad Síncrona (ω_s):** velocidad angular de la f.m.m. (CMR).
- **Nº de polos (p):** siempre vienen en pares y cada fase tiene el mismo número de pares de polos (2p).

$$\omega_s = \frac{\omega}{p} = \frac{2\pi f}{p}\left[\frac{rad}{s}\right] \qquad \omega_s = \frac{60f}{p}[rpm]$$

- **Grados geométricos ó mecánicos (θ_m):** Son los grados que representan un giro completo del rotor (360º).
- **Grados eléctricos ó magnéticos (θ_e):** Son los grados que representan un periodo completo de la alimentación AC ó f.e.m. (360º).

$$\theta_e[°eléctricos] = \theta_m \cdot p[°mecánicos]$$

Máquina Cilíndrica

Condición de Torque Medio

Existe **Torque Medio** si la velocidad relativa media entre las f.m.m del rotor y estator es nula: El ángulo de torque puede variar pero la frecuencia promedio de las f.m.m debe ser la misma (No hay torque pulsante).

$$T_e = -\frac{\mathfrak{I}_s \cdot \mathfrak{I}_r}{\mathfrak{R}_{sr}} \sin\delta_{sr}$$

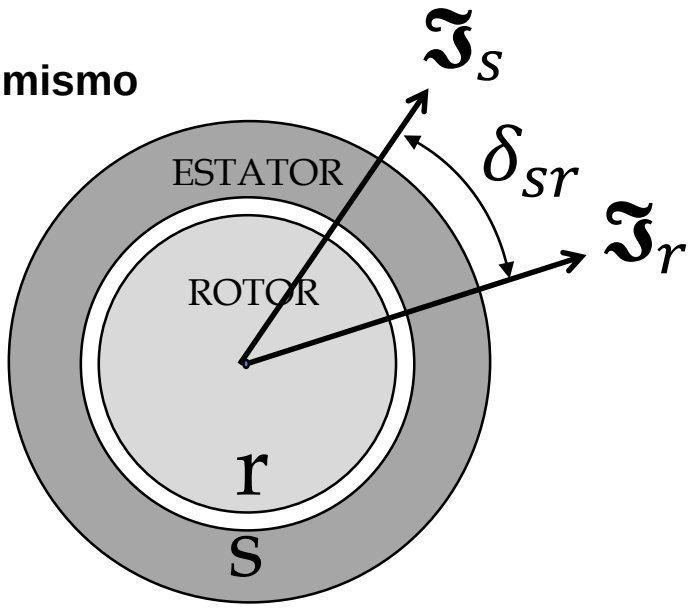
En una máquina eléctrica existen tres velocidades angulares:

- ω_m **velocidad angular mecánica del rotor**
- ω_s **velocidad angular del CMR del estator**
- ω_r **velocidad angular del CMR del rotor respecto de si mismo**

Por lo tanto, para que exista torque medio se debe cumplir

La siguiente relación entre ángulos:

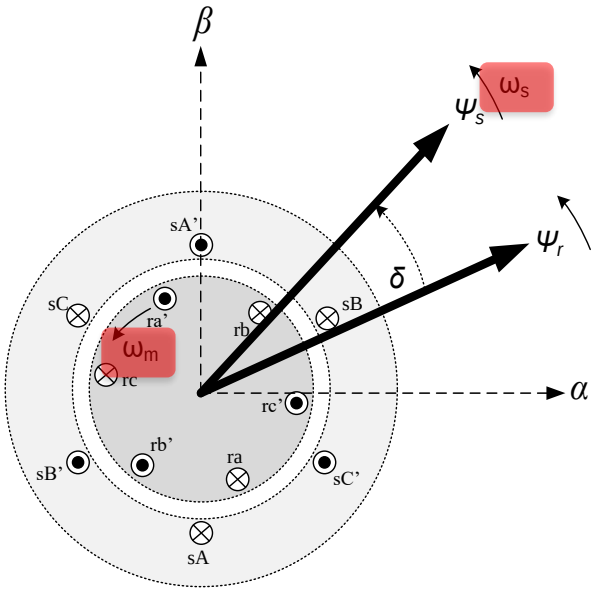
$$\omega_s = \omega_m + \omega_r$$



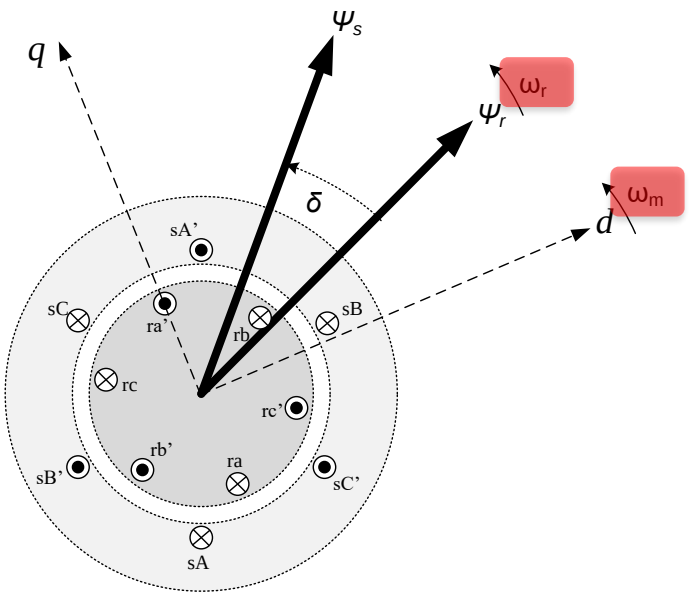
Máquina Cilíndrica

Condición de Torque Medio

$$\omega_s = \omega_m + \omega_r$$



Sistema de Referencia Estatórico (Estacionario)

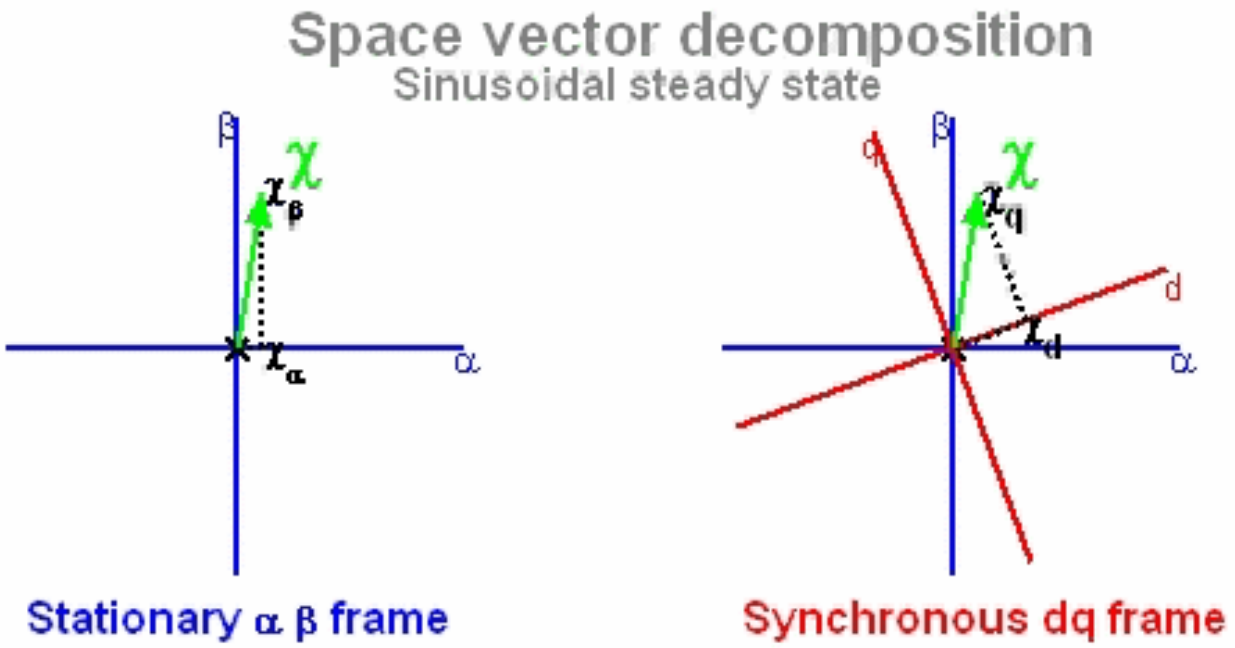


Sistema de Referencia Rotórico

Máquina Cilíndrica

Condición de Torque Medio

$$\omega_s = \omega_m + \omega_r$$



Máquina Cilíndrica

Fuerza electromotriz (f.e.m) inducida

El flujo magnético variante en la máquinas genera una f.e.m en las bobinas (Ley de Faraday). La f.e.m resultante tiene un origen en el flujo variable y en el movimiento relativo entre el inducido y el flujo generado. Las características de la f.e.m dependen de la máquina y la distribución de sus bobinas.

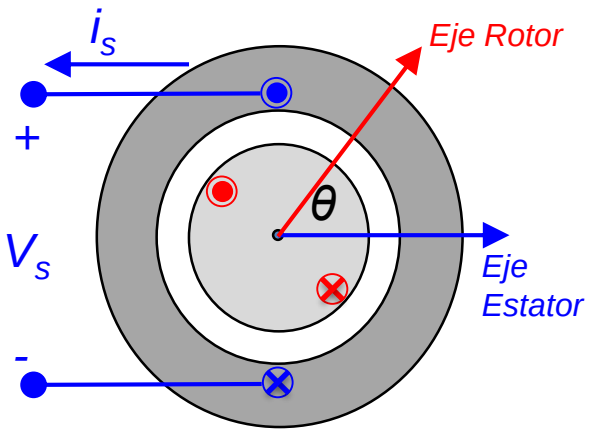
Analizamos la f.e.m generada en la máquina ilustrada considerando:

- v_s i_s y Φ_s son sinusoidales con frecuencia f (ω) y la máquina tiene *p* pares de polos.
- El flujo del entrehierro se distribuye sinusoidalmente y es pulsante.
- El eje del rotor tiene un ángulo “eléctrico” respecto al estator dado por $\theta=p\omega_m t+\theta_0$
- La bobina del rotor está en circuito abierto (corriente nula) y su frecuencia es f_r (ω_r).

$$\Phi_s = \Phi_m \cdot \cos\omega t \cdot \cos\theta \qquad e_r = -N_r \frac{d\Phi_s}{dt}$$

$$e_r = N_r\Phi_m\omega\sin(\omega t)\cos(p\omega_m t + \theta_0) + N_r\Phi_m p\omega_m \cos(\omega t)\sin(p\omega_m t + \theta_0)$$

$$e_r = \begin{cases} N_r\Phi_m p\omega_m \sin(p\omega_m t + \theta_0) & \text{Alimentación DC del estator} \\ N_r\Phi_m\omega\sin(\omega t)\cos(\theta_0) & \text{Rotor bloqueado} \end{cases}$$

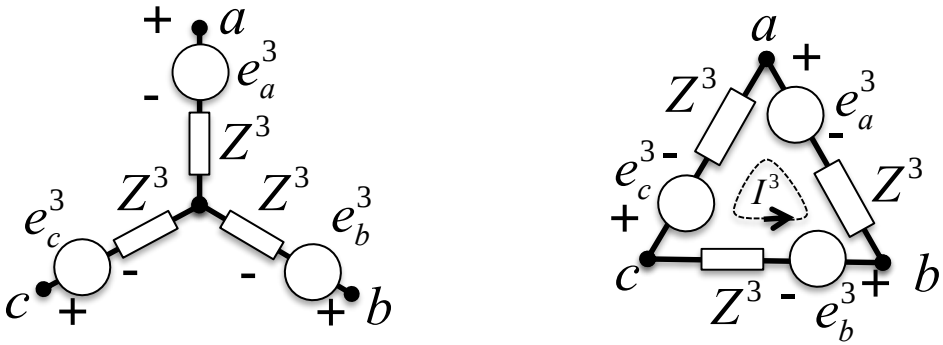


Máquina Cilíndrica
Armónicos de la f.e.m

En el principió de esta sección se vio que la f.m.m del entrehierro no es sinusoidal (incluso con devanados distribuidos y de paso cortado), por lo tanto contiene armónicos (impares) que son traspasados a las f.e.m inducidas y han sido despreciados para trabajar con fasores.

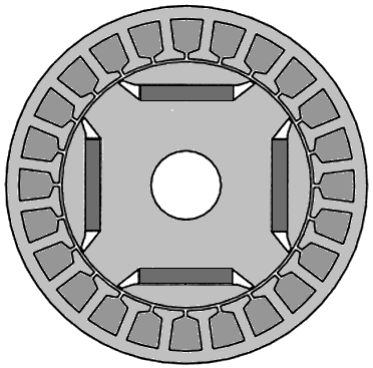
Para obtener una f.e.m sinusoidal se deben eliminar los armónicos más relevantes. Como la magnitud de un armónico de orden x es 1/x, lo ideal es al menos eliminar los armónicos 3ro y 5to para que la onda sea prácticamente sinusoidal. En una máquina trifásica tenemos que:

- Las f.e.m inducidas de **3ra armónica** e^3_a, e^3_b y e^3_c están en fase y son identicas (e^3).
  - **Si la máquina está en Y** e^3 se anula en los bornes de la máquina ($e^3_{ab}=e^3_a-e^3_b=0$)
  - **Si la máquina está en Δ** se genera una corriente circulante I^3 en el circuito Δ (en fase), la cual es generada por las f.e.m ($I^3=3e^3/3Z^3$). Esta corriente genera una caida de tensión en cada fase que anula la f.e.m e^3 ($e^3_{ab}=e^3-I^3Z^3=0$).

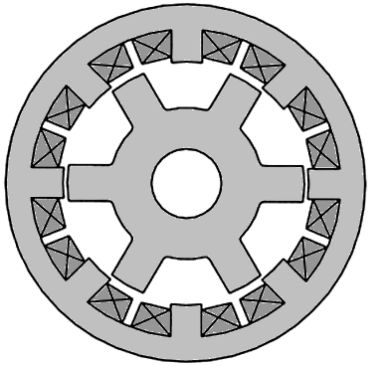


Nota: La tercera armónica es eliminada con la conexión Y o Δ de la máquina, lo mismo sucede para todos los armónicos que están en fase (multiplos impares de 3: 9, 15, 21, etc.). Si se desea eliminar el 5to armónico se debe realizar una distribución y acortamiento de las bobinas de forma adecuada.

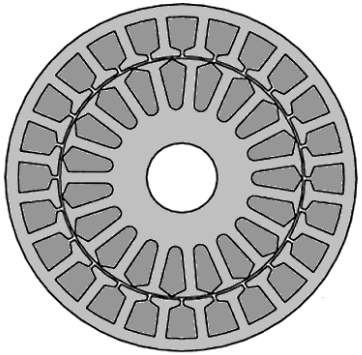
Principales Tipos de Máquinas: Síncrona, Inducción y Continua



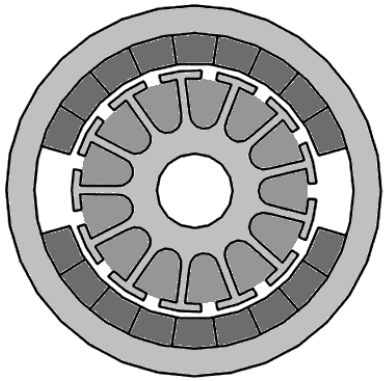
Síncrona



SRM



MI



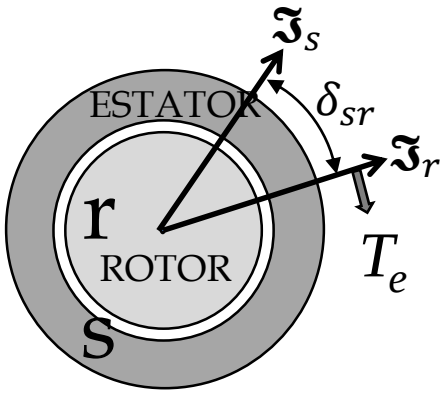
DC

Máquina Cilíndrica

Campo Magnético Rotatorio del Rotor

Los flujos rotóricos se pueden clasificar en tres tipos:

1. **Flujo sin deslizamiento:** El flujo rotórico es solidario al rotor (e.g. bobina en el rotor alimentada con C.C. o imanes permanentes montados en el rotor). Por lo tanto, el flujo rotórico es rotatorio sólo si el rotor gira (**Máquina Síncrona**).
2. **Flujo con deslizamiento:** El flujo rotórico tiene una velocidad respecto al rotor (e.g. Bobinas alimentadas o inducidas con C.A.). (**Máquina de Inducción**)
3. **Flujo estático:** El flujo rotórico tiene una velocidad nula mirado desde el estator. Por lo tanto, mirado del rotor el flujo tiene una velocidad igual a la mecánica pero inversa. ***En este caso, el flujo del estator también debe ser estacionario para obtener un torque no pulsante. (**Máquina DC**)



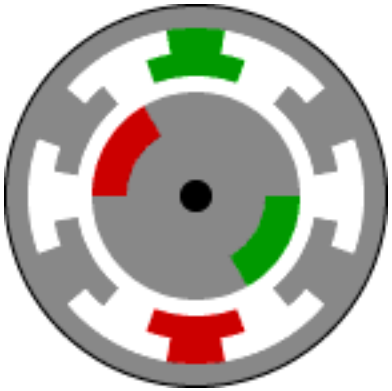
Donde están los CMR:

1. **Mirado desde el estator:** Se genera un CMR en el estator y sólo hay CMR en el rotor cuando gira.
   Mirado desde el rotor: No hay CMR en el rotor y tampoco hay CMR en el estator a menos que gire a velocidad asíncrona (funcionamiento anómalo).
2. **Mirado desde el estator:** Se genera un CMR en el estator y en el rotor.
   Mirado desde el rotor: hay CMR en el estator sólo a velocidad asíncrona y hay CMR e el rotor si existe deslizamiento.
3. .***Mirado desde el estator:** No hay CMR.
   .***Mirado desde el rotor:** Sólo hay CMR (del estator y rotor) cuando gira.

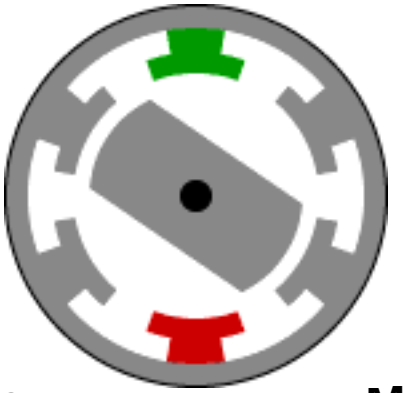
Máquinas Electromecánicas

Principales tipos de Máquinas Eléctricas

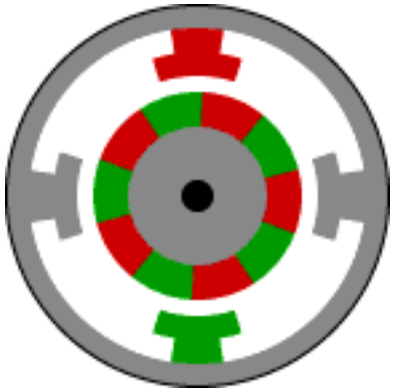
Máquina Síncrona



Máquina de Reluctancia (Síncrona)



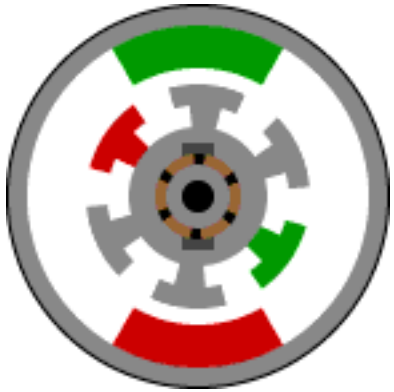
Máquina Paso-paso (Síncrona)



Máquina de Inducción



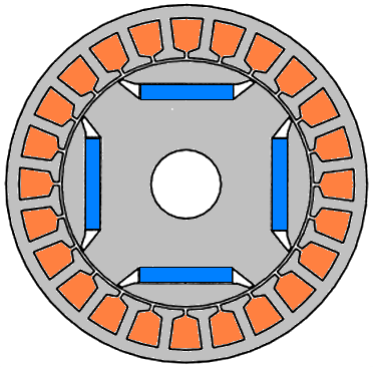
Máquina DC (corriente continua)

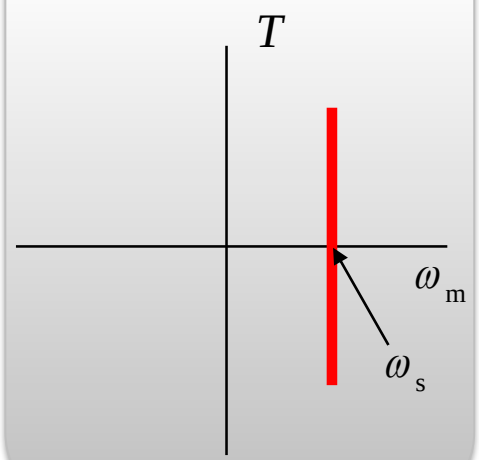


Principales Máquinas Eléctricas

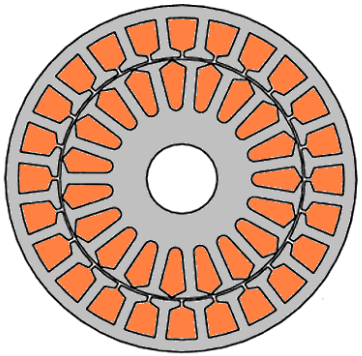
Resumen: Característica Torque-Velocidad

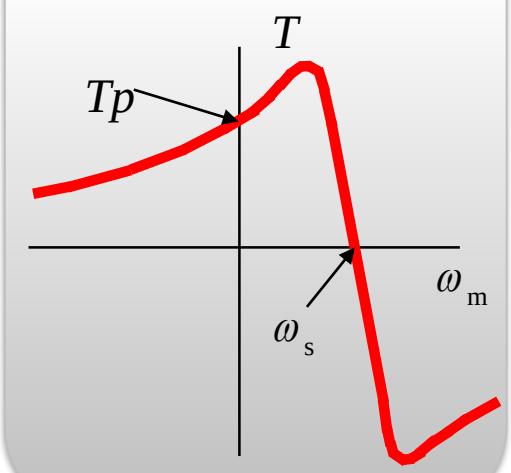
SINCRONA



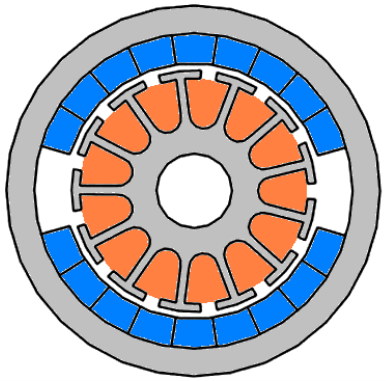


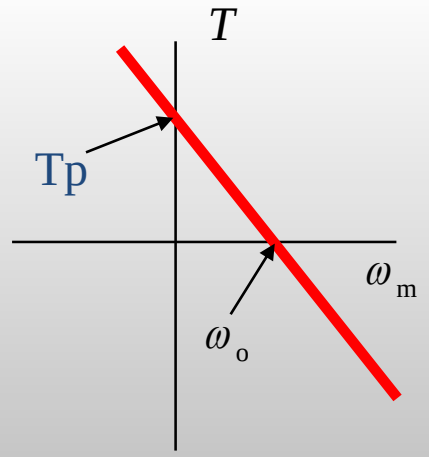
INDUCCION





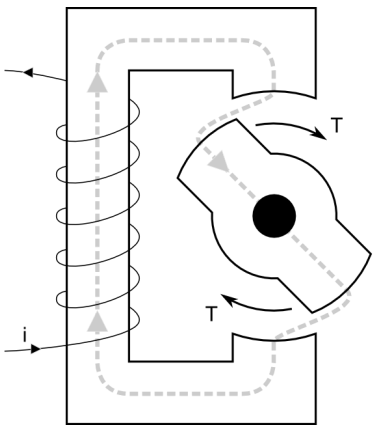
CONTINUA

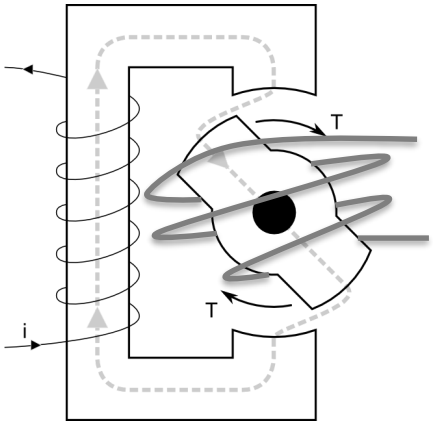


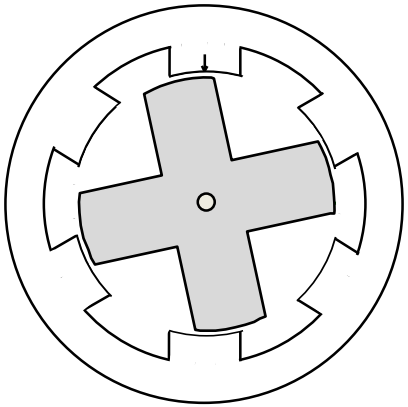


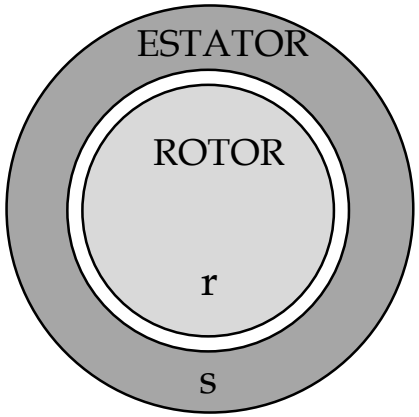
(exc. separada y shunt)

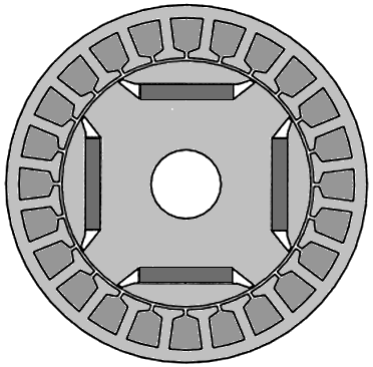
Fin Lectura 5

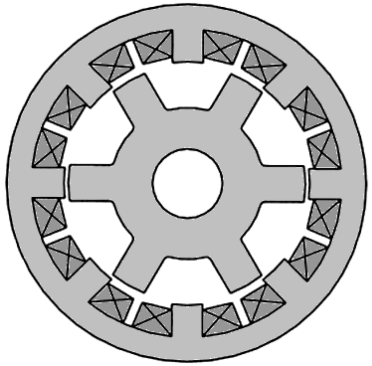


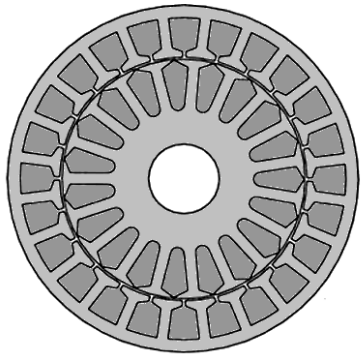


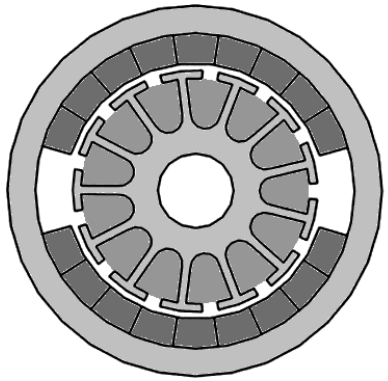












Conclusiones

Lectura 5: Máquinas y Campos Magnéticos Rotatorios

Máquina Básica

El torque de una máquina se genera porque está tiende a aumentar la autoinductancia (disminuir la reluctancia) y la inductancia mutua.

Máquina de Reluctancia

Es un tipo de máquina síncrona y en algunas configuraciones su sentido de giro es inverso al CMR (e.g. 6/4). Su torque se debe exclusivamente a la reluctancia variable (autoinductancia) del entrehierro.

Máquina Cilíndrica

Tiene reluctancia uniforme a lo largo del entrehierro, por lo tanto su torque se debe exclusivamente a la inductancia mutua (f.m.m en rotor y estator).

Campo Magnético Rotatorio (CMR)

El uso de bobinas polifásicas distribuidas en el estator genera un CMR, ya que las f.m.m pulsantes de cada fase se suman (principio de superposición).

Principales Máquinas Eléctricas

Las máquinas más utilizadas se clasifican en Síncronas, Asíncronas (Inducción) y de Corriente Continua (C.C ó DC).

Próxima Lectura

Lectura 6
Máquina Síncrona

