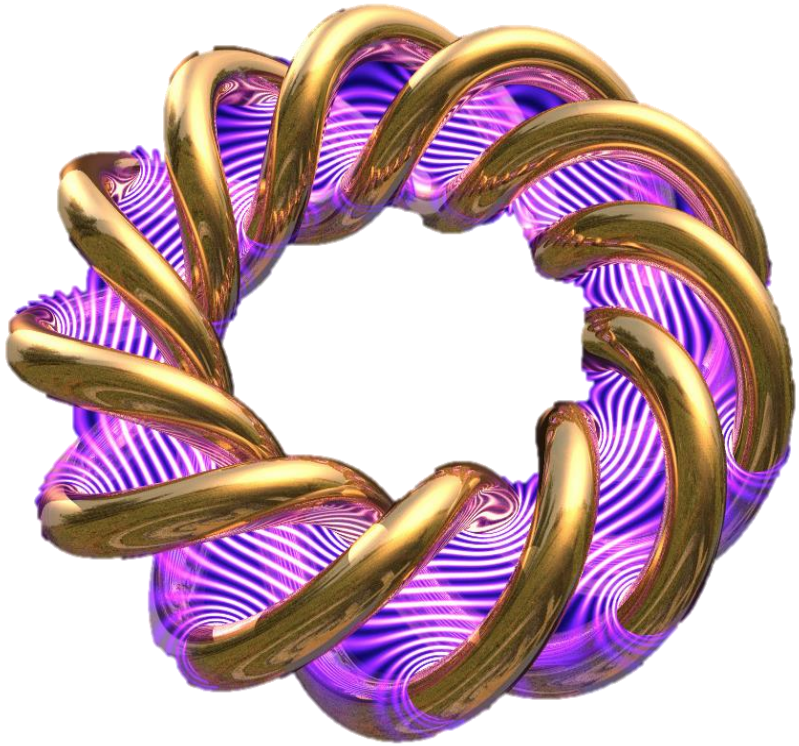
Javier Pereda
Profesor
Departamento de Ingeniería Eléctrica
Pontificia Universidad Católica de Chile

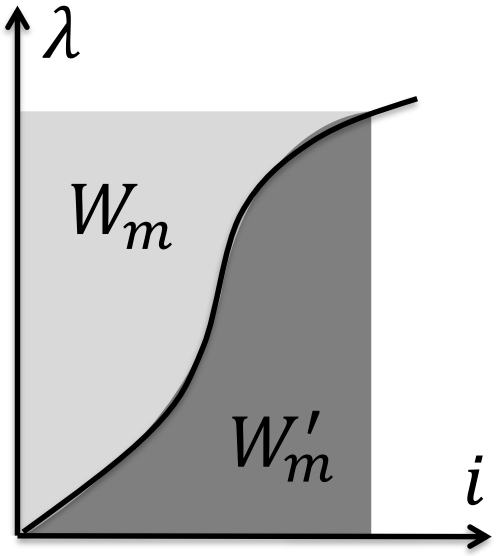


IEE 2213
Máquinas Eléctricas

4. Energía y Conversión Electromecánica

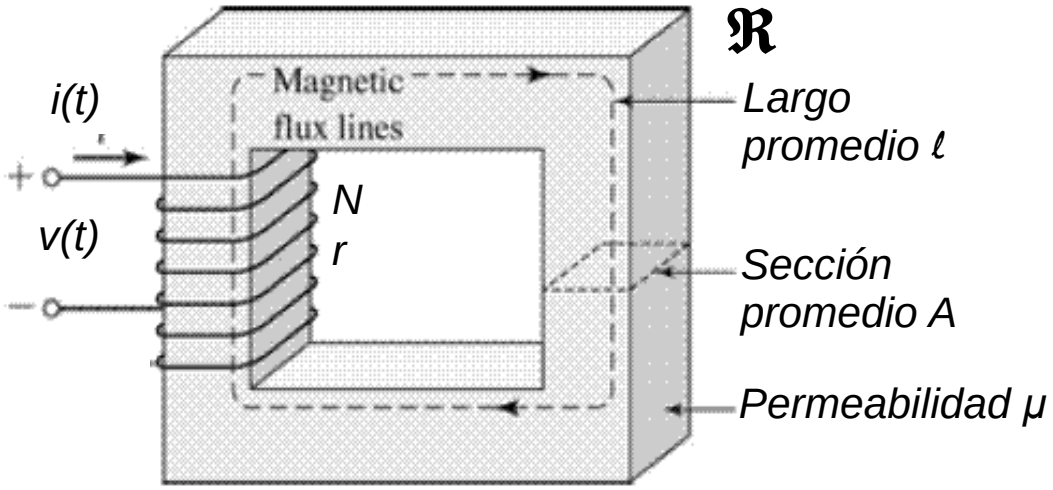
Energía y coenegía magnética: conversión electromecánica de energía; fuerzas y torques electromecánicos.

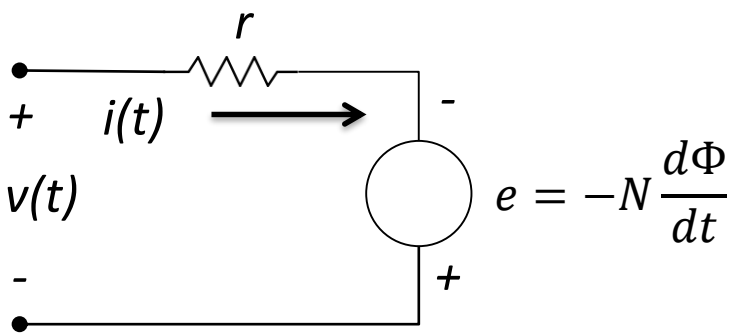
Energía y Coenergía Magnética



Energía Magnética
Circuito Equivalente

Si tomamos en cuenta la resistencia de la bobina podremos diferenciar el voltaje suministrado **v(t)** de la f.e.m inducida en la bobina **e(t)**:





Energía Magnética
Balance de Energía

Calculemos el balance energético del circuito equivalente

i. Aplicamos las leyes de Kirchhoff al circuito equivalente: $v(t) = r \cdot i(t) + N\frac{d\Phi(t)}{dt}$

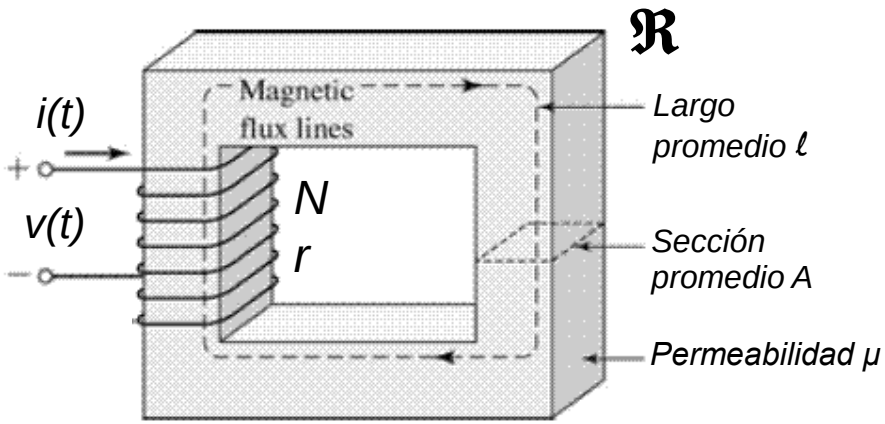
ii. Multiplicamos por *i(t)dt* para obtener el Δ de energía: $v \cdot idt = r \cdot i^2 dt + N \cdot id\Phi(t)$

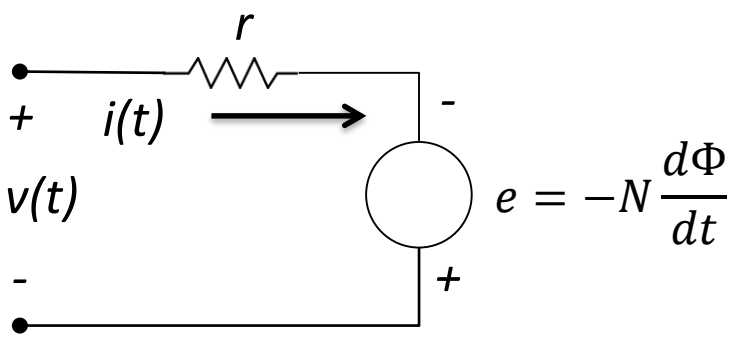
iii. En términos de variación de energía:

$$dW_e = dW_R + dW_m$$

Balance de Energía

dW_e: *diferencial de energía eléctrica en el circuito*
dW_r: *diferencial de energía disipada en r por efecto Joule*
dW_m: *diferencial de energía magnética suministrada al núcleo*





Energía Magnética
Energía

$$dW_e = dW_R + dW_m$$
Balance de Energía

Calculemos el balance energético del circuito equivalente

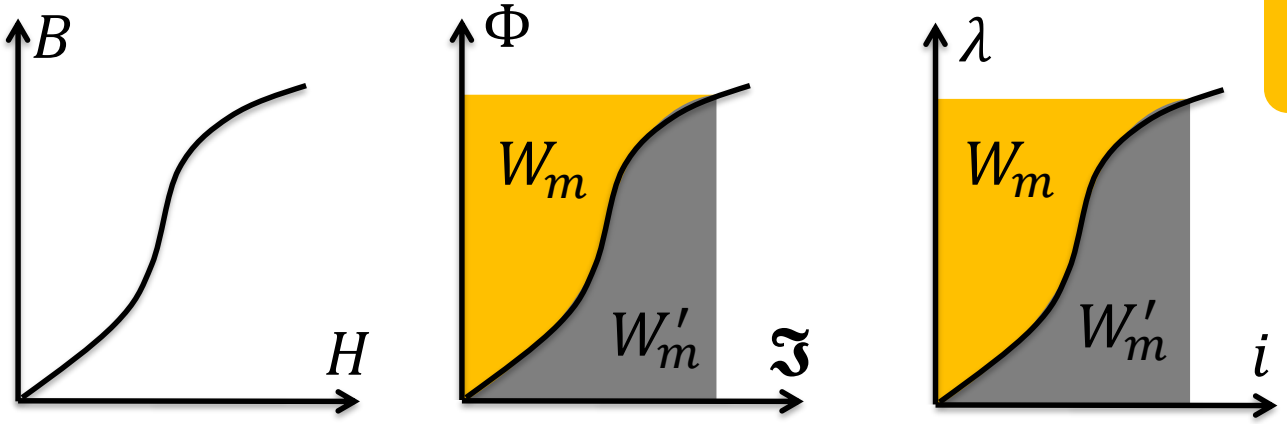
iv. Por lo tanto tenemos que: $dW_m = Nid\Phi = \mathfrak{I}d\Phi$

v. Suponiendo condiciones iniciales nulas (i=0 y Φ=0 en t=0), la energía magnética suministrada al núcleo dependerá de i y Φ en el tiempo:

$$W_m = \int_0^{\Phi} \mathfrak{I}d\Phi$$

vi. La energía suministrada al núcleo es transferida directamente desde la fuente de voltaje y depende del flujo mantenido en el núcleo. Está energía también puede ser expresada en términos de la corriente y el flujo de enlace $\lambda=N\Phi$ (*linkage flux*):

$$W_m = \int_0^{\lambda} id\lambda$$



Energía Magnética
Coenergía

$$W_m = \int_0^{\Phi} \mathfrak{I} d\Phi$$

$$W_m = \int_0^{\lambda} i d\lambda$$

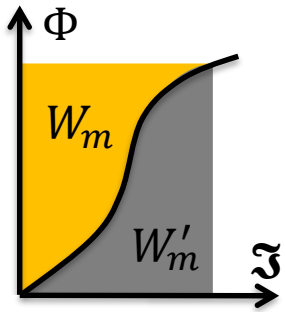
Coenergía: magnitud sin sentido físico en unidades de energía, pero muy útil para el análisis de energía en sistemas conservativos. Sin embargo debe ser aplicada en sistemas lineales (su uso supone linealizar o aproximar el sistema).

vii. La coenergía está definida como el reciproco de energía: $$W'_m = \int_0^{\mathfrak{I}} \Phi d\mathfrak{I}$$

viii. Al igual que la energía, la coenergía puede ser expresada en términos de la corriente y el flujo de enlace λ=NΦ (*linkage flux*):

$$W'_m = \int_0^{i} \lambda di$$

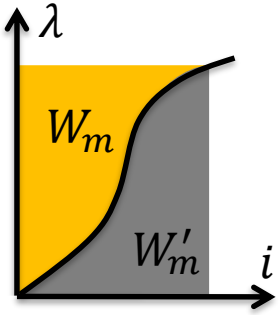
ix. Gráficamente es claro que: $$W_m + W'_m = \lambda \cdot i = \mathfrak{I} \cdot \Phi = \mathfrak{R} \cdot \Phi^2 = \frac{\mathfrak{I}^2}{\mathfrak{R}}$$



$$W_m = \int_0^{\Phi} \mathfrak{I} d\Phi$$

$$W'_m = \int_0^{\mathfrak{I}} \Phi d\mathfrak{I}$$

$$W_m + W'_m = \mathfrak{I} \cdot \Phi$$



$$W_m = \int_0^{\lambda} i d\lambda$$

$$W'_m = \int_0^{i} \lambda di$$

$$W_m + W'_m = \lambda \cdot i$$

Energía Magnética

Energía y Coenergía

$$W_m = \int_0^{\Phi} \mathfrak{I}\, d\Phi \qquad W'_m = \int_0^{\mathfrak{I}} \Phi\, d\mathfrak{I}$$

$$W_m = \int_0^{\lambda} i\, d\lambda \qquad W'_m = \int_0^{i} \lambda\, di$$

Energía y coenergía pueden ser expresadas en términos de B y H.

x. La sección *A* y largo ℓ promedio del núcleo se ven en la figura del sistema:

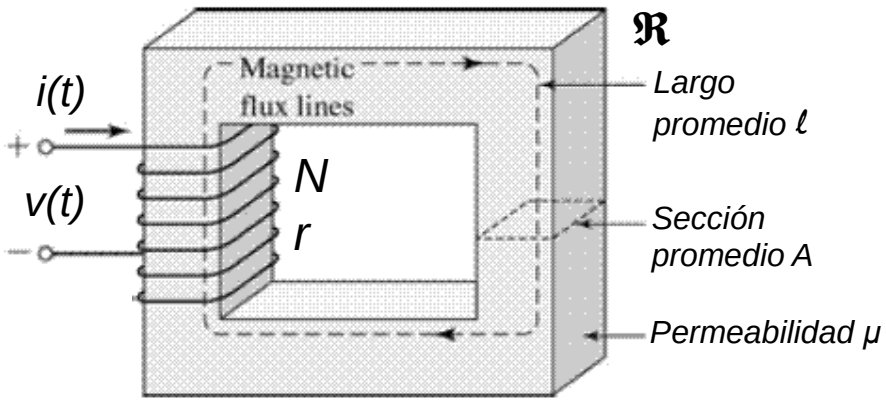
$$\Phi = B \cdot A \qquad \mathfrak{I} = H \cdot \ell$$

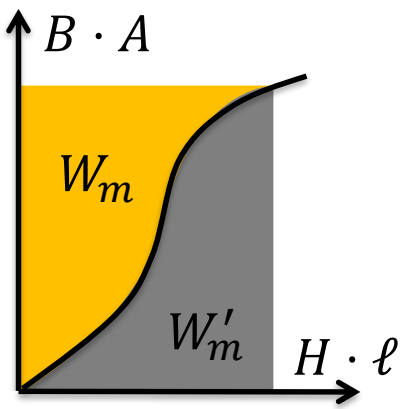
xi. Remplazando en las ecuaciones de energía y coenergía tenemos:

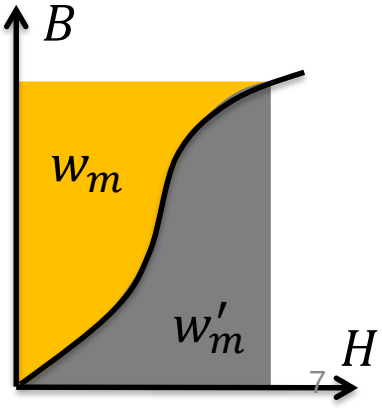
$$W'_m = A \cdot \ell \int_0^H B\, dH \qquad W_m = A \cdot \ell \int_0^B H\, dB$$

xii. Ahora también podemos calcular la densidad de energía magnética por m^3:

$$w'_m = \int_0^H B\, dH \qquad w_m = \int_0^B H\, dB$$







Energía Magnética
Energía y Coenergía **Lineal**

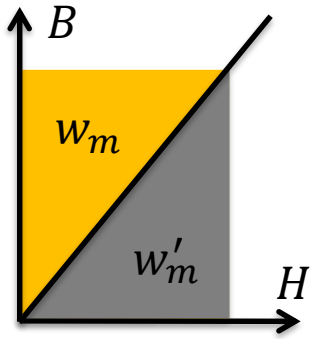
$$w_m = \int_0^B \mathrm{H}\,dB$$

$$w'_m = \int_0^H \mathrm{B}\,dH$$

Si suponemos la curva de imantación como lineal tenemos:

xiii. La energía y coenergía son iguales:

$$W_m = W'_m = \frac{1}{2}\lambda \cdot i = \frac{1}{2}\mathfrak{I} \cdot \Phi = \frac{1}{2}\mathfrak{R} \cdot \Phi^2 = \frac{1}{2}\frac{\mathfrak{I}^2}{\mathfrak{R}}$$



xiv. La densidad de energía y coenergía magnética también:

$$w_m = w'_m = \frac{1}{2}HB = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu} = \frac{1}{2}\mu H^2$$

xv. En la práctica es útil ocupar la inductancia en la ecuación de energía y coenergía. La inductancia en un medio lineal (núcleo paramagnético como el aire) viene dada por:

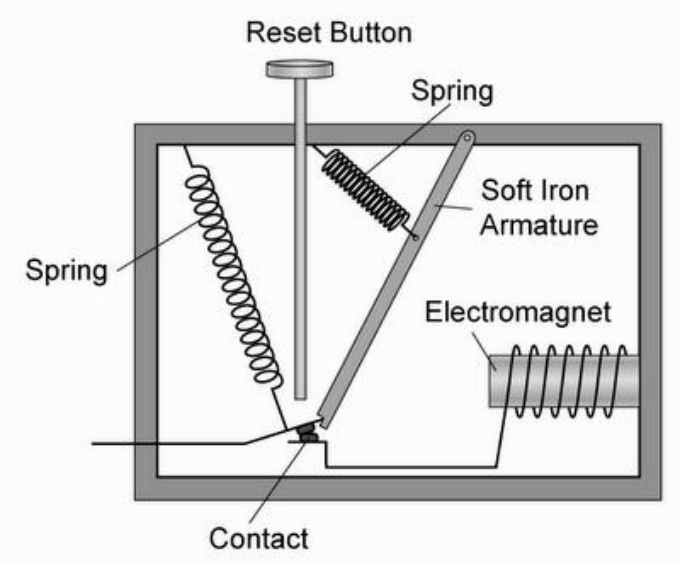
$$-e = L\frac{di}{dt} = N\frac{d\Phi}{dt} \quad \Leftarrow \quad \lambda = L \cdot i \quad \Rightarrow \quad L = N^2\frac{\Phi}{\mathfrak{I}} \quad \Rightarrow \quad L = \frac{N^2}{\mathfrak{R}}$$

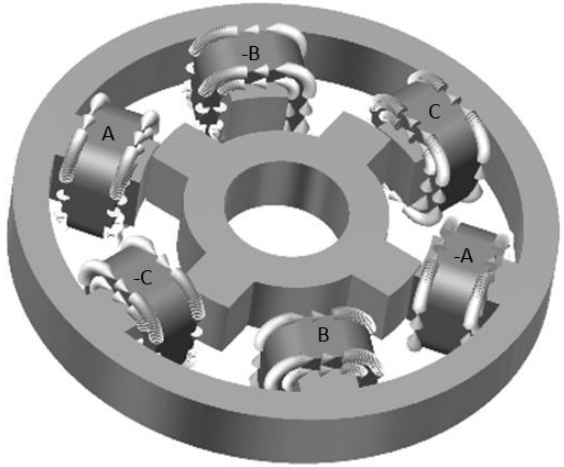
xvi. Finalmente podemos asociar la energía y coenergía a la inductancia:

$$W_m = W'_m = \frac{1}{2}\lambda \cdot i \quad \Rightarrow \quad W_m = W'_m = \frac{1}{2}Li^2$$

Nota: *el mercado de materiales ferromagnéticos como imanes utilizan el HB_{max} ($2*w_m$) como índice de calidad del material*

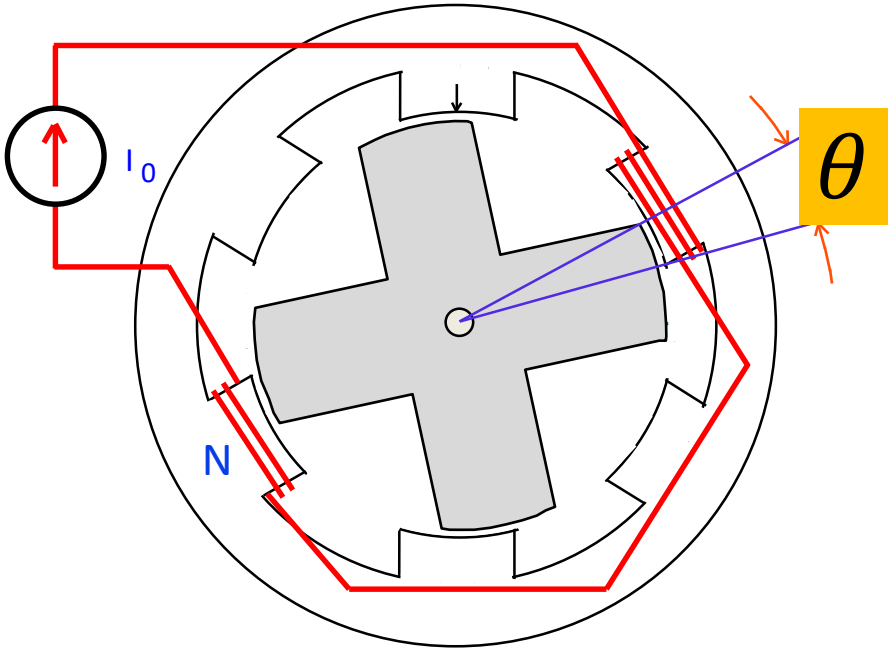
Conversión de Energía
Electromecánica

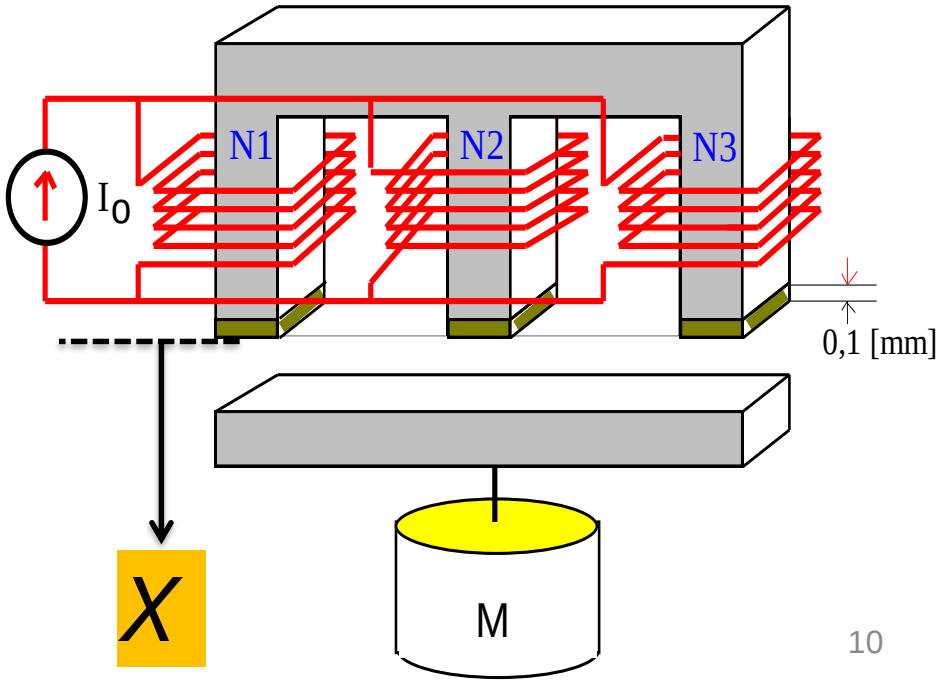




Sistema Electromecánico
Ejemplos

Ejemplos





Sistema Electromecánico

Principio de Conservación de la Energía

Balance de energía en un sistema electromecánico

Según la ley de conservación de la energía en un sistema aislado tenemos para un intervalo infinitesimal de tiempo que:

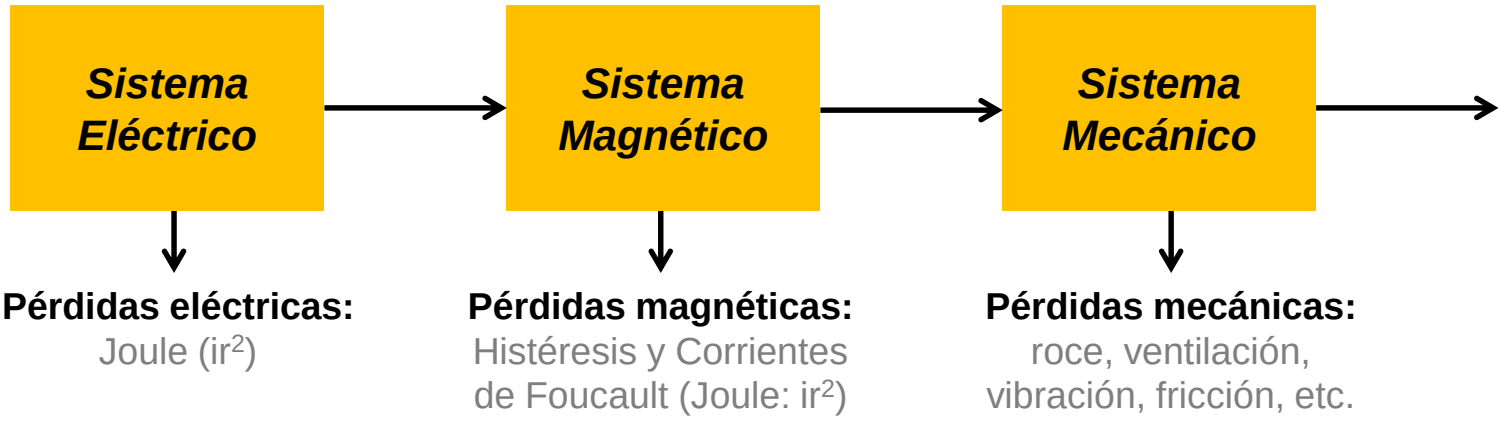
$$dW_e = dW_m + dW_{mec} + dW_p$$

dW_e: Cambio en la **energía eléctrica** entregada por la fuente.

dW_m: Cambio en la **energía magnética** almacenada en el sistema.

dW_{mec}: Cambio en la **energía mecánica** de salida de sistema

dW_p: Cambio en la **energía perdida** (eléctrica, magnética y mecánica)



Sistema Electromecánico

Principio de Conservación de la Energía

Balance de energía en un sistema electromecánico

Si ahora despreciamos las pérdidas tenemos:

$$dW_e = dW_m + dW_{mec}$$

$$dW_m = ?$$

$$\begin{cases} dW_{mec} = F_m dx \\ dW_{mec} = T_m d\theta \end{cases}$$

$$dW_e = eidt \quad \Rightarrow \quad e = N\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d\lambda}{dt} \quad \Rightarrow \quad dW_e = id\lambda$$

Convención de signos (flujo de energía)



Sistema Electromecánico
Fuerza y Torque

Resumiendo, para un sistema lineal o rotatorio sin pérdidas tenemos que:

$$dW_e = dW_m + dW_{mec} \quad (0) \Rightarrow \begin{cases} dW_m(\lambda, x) = i d\lambda - F_m dx \\ dW_m(\lambda, \theta) = i d\lambda - T_m d\theta \end{cases} \quad (1)$$

$W_m(\lambda, x \text{ ó } \theta)$ es función de una variable mecánica (x ó θ) y una variable eléctrica (λ), luego por derivadas parciales (diferencial total):

$$dW_m(\lambda, x) \Rightarrow dW_m = \frac{\partial W_m}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial W_m}{\partial x} dx \quad (2)$$

Remplazamos (2) en (1) :

$$F_m dx = \left[i - \underbrace{\frac{\partial W_m}{\partial \lambda}}_{x \text{ cte}} \right] d\lambda - \underbrace{\left[\frac{\partial W_m}{\partial x} \right]}_{\lambda \text{ cte}} dx \quad (3)$$

Si x es constante (dW_{mec}=0) y por lo tanto según (1):

$$dW_m = i d\lambda$$

(3) ⇓

$$F_m dx = -\left[\frac{\partial W_m}{\partial x} \right] dx \Rightarrow \boxed{F_e = -\frac{\partial W_m(\lambda, x)}{\partial x} \quad T_e = -\frac{\partial W_m(\lambda, \theta)}{\partial \theta}} \Big|_{\lambda \text{ cte}}$$

Sistema Electromecánico
Fuerza y Torque

Demostrar lo anterior es más intuitivo:

Suponemos flujo constante: $e = N\frac{d\Phi}{dt} = 0$

$$dW_e = eidt = 0$$

$$0 = dW_m + dW_{mec}$$

$$dW_m = -F_m dx$$

$$F_m dx = -\left[\frac{\partial W_m}{\partial x}\right] dx$$

¡Cuidado!
Se evalúa con flujo cte pero…
NO significa que sea constante en la realidad

$$F_e = -\frac{\partial W_m(\lambda, \boldsymbol{x})}{\boldsymbol{\partial x}} \qquad T_e = -\frac{\partial W_m(\lambda, \boldsymbol{\theta})}{\boldsymbol{\partial \theta}} \Bigg|_{\lambda \text{ cte}}$$

Sistema Electromecánico
Fuerza y Torque

También podemos obtener la fuerza y torque en función de la corriente usando la coenergía:

$$W_m + W'_m = \lambda \cdot i \quad \Rightarrow \quad dW_m + dW'_m = i \cdot d\lambda + \lambda \cdot di$$

1

$$i \cdot d\lambda + \lambda \cdot di - dW'_m = i \cdot d\lambda - F_m dx \quad \Rightarrow \quad dW'_m(i,x) = \lambda \cdot di + F_m dx \qquad \textbf{1'}$$

La ecuación **1'** es la equivalente a la ecuación **1** de la diapositiva anterior:

$$dW'_m(i,x) \quad \Rightarrow \quad dW'_m = \frac{\partial W'_m}{\partial i} di + \frac{\partial W'_m}{\partial x} dx \qquad \textbf{2'}$$

Remplazamos **2'** en **1'**:

$$F_m dx = \left[\underbrace{\frac{\partial W'_m}{\partial \boldsymbol{i}}}_{x \text{ cte}} - \lambda\right] di + \left[\underbrace{\frac{\partial W'_m}{\partial \boldsymbol{x}}}_{i \text{ cte}}\right] dx \qquad \textbf{3'}$$

Si *x* es constante (dW_{mec}=0) y por lo tanto según **1'**:

$$dW'_m = \lambda di \quad \Rightarrow \quad F_m dx = \left[\frac{\partial W'_m}{\partial x}\right] dx \quad \Rightarrow$$

3'

$$F_e = \frac{\partial W'_m(i,\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}} \qquad T_e = \frac{\partial W'_m(i,\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \Bigg|^{i \text{ cte}}$$

Sistema Electromecánico
Fuerza y Torque

Demostrar lo anterior es más intuitivo:

$$dW'_m = \lambda \cdot di + F_m dx \quad (1')$$

Suponemos corriente constante:

$$\downarrow \; i \text{ cte}$$

$$dW'_m = F_m dx$$

$$\downarrow$$

$$F_m dx = \left[\frac{\partial W'_m}{\partial x}\right] dx$$

$$\downarrow$$

¡Cuidado!
Se evalúa con corriente cte pero…
NO significa que sea constante en la realidad

$$F_e = \frac{\partial W'_m(i, \boldsymbol{x})}{\boldsymbol{\partial x}} \qquad T_e = \frac{\partial W'_m(i, \boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \Bigg|_{i \text{ cte}}$$

Sistema Electromecánico
Flujo Constante (Energía)

I. Ejemplo aplicado: Suponiendo proceso a **flujo constante** y en dt.

i. Partimos desde x_1=x y terminamos en x_2=x-dx.

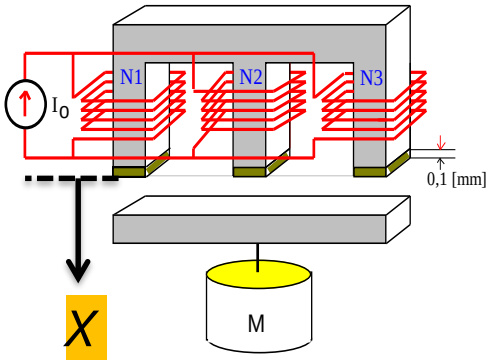
ii. La curva de imantación depende de x (reluctancia proporcional a x).

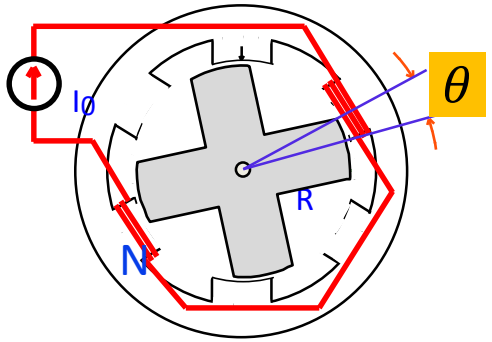
iii. Si vamos de x_1 a x_2 con flujo constante tenemos:

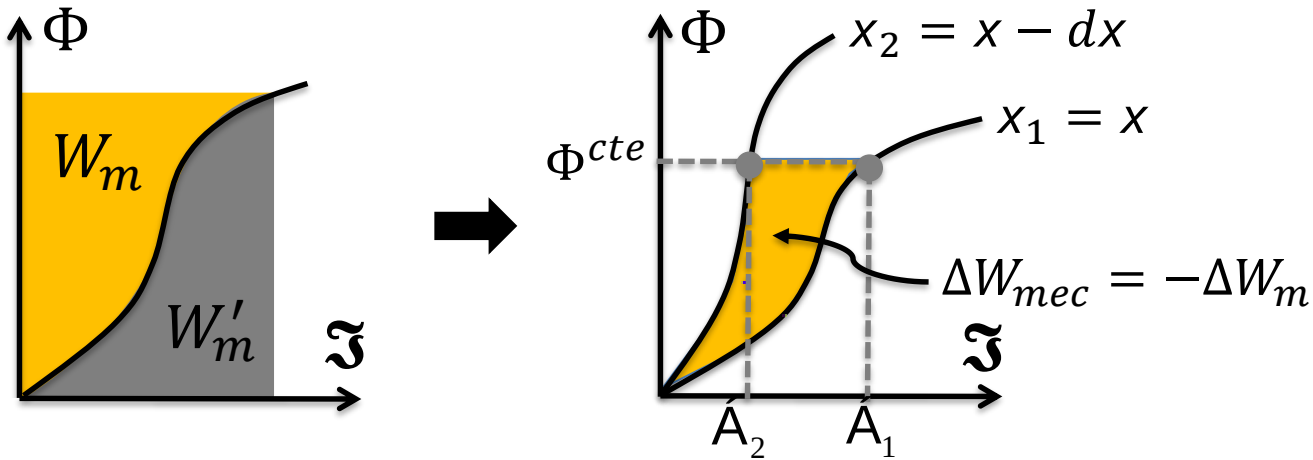
$$F_e = -\frac{\partial W_m(\lambda, \boldsymbol{x})}{\boldsymbol{\partial x}}$$

iv. La ecuación nos dice que el trabajo mecánico se realiza por la transferencia (disminución) de energía desde el campo magnético.

v. Notar que la fuerza generada siempre tiende a reducir la reluctancia del sistema (atractiva) ya que de esta forma se entrega energía.







Flujo constante: *se produce cuando la corriente se controla durante el proceso o cuando el movimiento es muy rápido (el flujo no alcanza a variar)*

Sistema Electromecánico
Corriente Constante (Coenergía)

II. Ejemplo aplicado: Suponiendo proceso a **corriente constante** y en dt.

i. Partimos desde x_1=x y terminamos en x_2=x-dx.

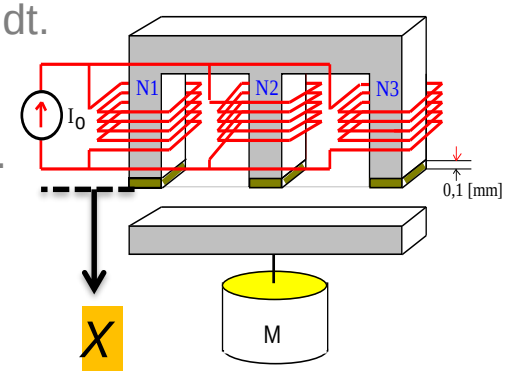
ii. La curva de imantación depende de x (reluctancia proporcional a x).

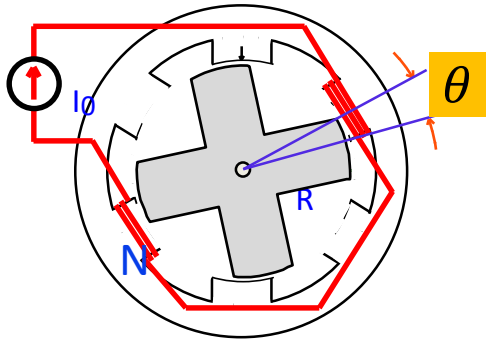
iii. Si vamos de x_1 a x_2 con corriente constante tenemos:

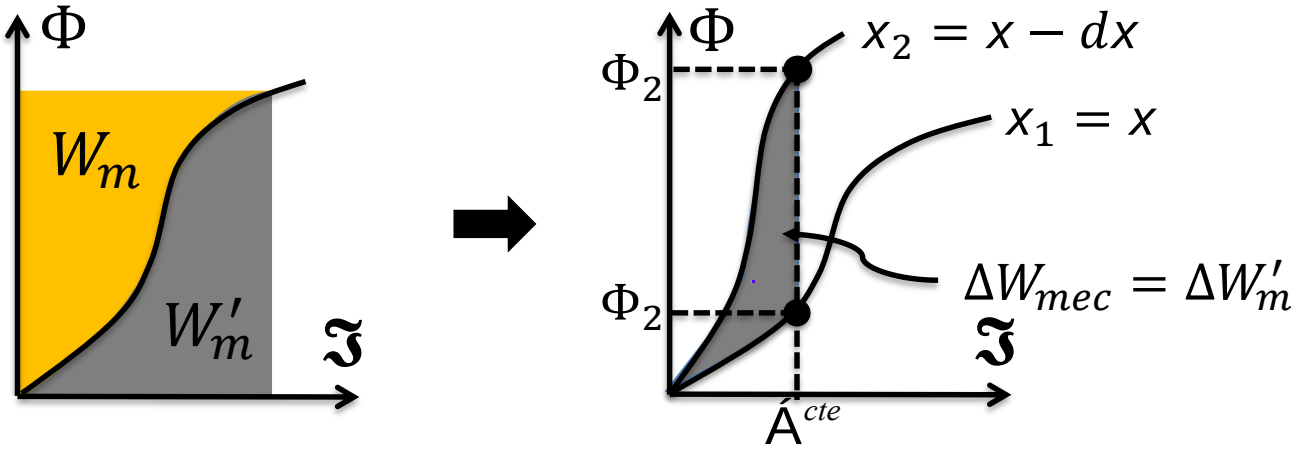
$$F_e = \frac{\partial W'_m(i, \boldsymbol{x})}{\boldsymbol{\partial x}}$$

iv. La ecuación nos dice que el trabajo mecánico se realiza por la transferencia (aumento) de coenergía desde el campo magnético

v. Notar que la fuerza generada siempre tiende a reducir la reluctancia del sistema (atractiva) ya que de esta forma se entrega energía.



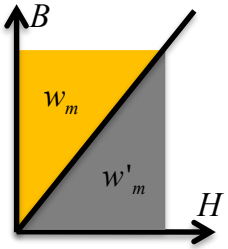




Corriente constante: *se produce cuando la corriente se controla durante el proceso o cuando el movimiento es muy lento.*

Sistema Electromecánico
Simplificación Lineal

Simplificación: Como se vio en la sección de energía y coenergía, si asumimos el sistema como lineal (lo que sucede al tener entrehierros grandes) tenemos que la energía y coenergía son iguales:



$$W_m = W'_m = \frac{1}{2} L i^2$$

Ya vimos que nn la práctica es útil ocupar la inductancia en la ecuación de energía y coenergía suponiendo un medio lineal (núcleo paramagnético como el aire). Finalmente podemos asociar la energía y coenergía a la inductancia:

$$F_e = \frac{\partial W'_m(i, \boldsymbol{x})}{\boldsymbol{\partial x}} \qquad T_e = \frac{\partial W'_m(i, \boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \Bigg|^{i \text{ cte}}$$

$$F_e = \frac{1}{2} i^2 \frac{dL}{dx} \qquad T_e = \frac{1}{2} i^2 \frac{dL}{d\theta}$$

Sistema Electromecánico
Resumen

Resumiendo para un sistema lineal, tenemos que:

$$W'_m(i,x) = \frac{1}{2}L(x)i^2 \quad \Leftrightarrow \quad W'_m(i,x) = \frac{1}{2}[i]^T[L(x)][i]$$

$$W'_m(i,\theta) = \frac{1}{2}L(\theta)i^2 \quad \Leftrightarrow \quad W'_m(i,\theta) = \frac{1}{2}[i]^T[L(\theta)][i]$$

$$F_e(i,x) = \frac{1}{2}i^2\frac{dL(x)}{dx} \quad \Leftrightarrow \quad F_e(i,x) = \frac{1}{2}[i]^T\frac{d}{dx}[L(x)][i]$$

$$T_e(i,\theta) = \frac{1}{2}i^2\frac{dL(\theta)}{d\theta} \quad \Leftrightarrow \quad T_e(i,\theta) = \frac{1}{2}[i]^T\frac{d}{d\theta}[L(\theta)][i]$$

Esto nos dice que la fuerza tiende a incrementar el valor de la inductancia.

Sistema Electromecánico
Ejemplo

Ejemplo aplicado: Dispositivo de triple excitación (suponiendo sistema lineal).

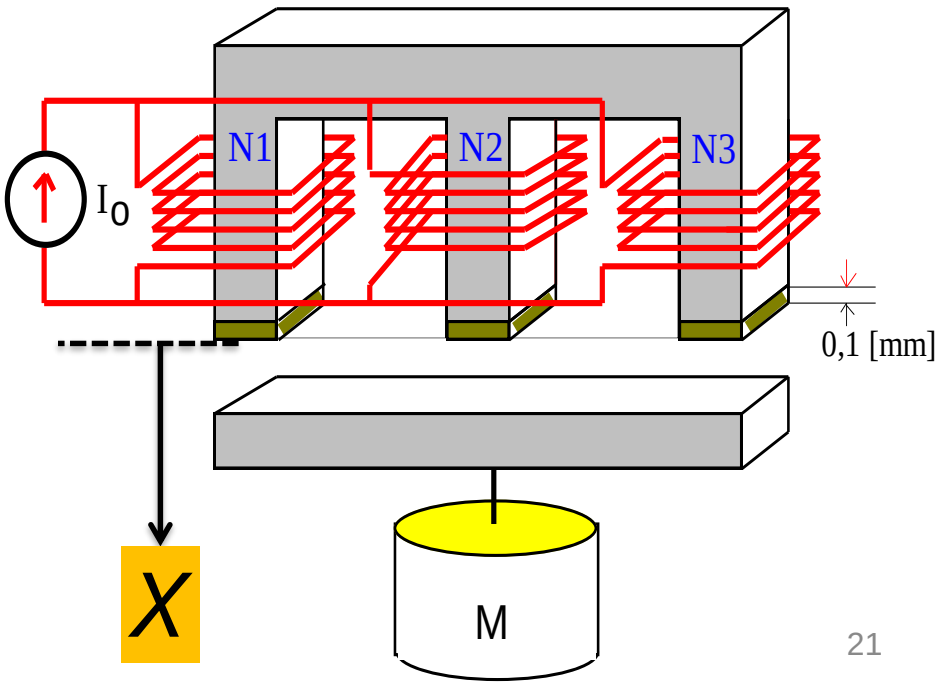
$$L = N\frac{\Phi}{i} \Rightarrow [\lambda] = [L(x)][i]$$

$$\lambda_1 = L_{11}i_1 + L_{12}i_2 + L_{13}i_3$$
$$\lambda_2 = L_{21}i_1 + L_{22}i_2 + L_{23}i_3$$
$$\lambda_3 = L_{31}i_1 + L_{32}i_2 + L_{33}i_3$$

$$L(x) = \begin{bmatrix} L_{11}(x) & L_{12}(x) & L_{13}(x) \\ L_{21}(x) & L_{22}(x) & L_{23}(x) \\ L_{31}(x) & L_{32}(x) & L_{33}(x) \end{bmatrix}$$

$$W'_m(i,x) = \frac{1}{2}[i]^T[L(x)][i]$$

$$F_e(i,x) = \frac{1}{2}[i]^T\frac{d}{dx}[L(x)][i]$$



Sistema Electromecánico
Ejemplo

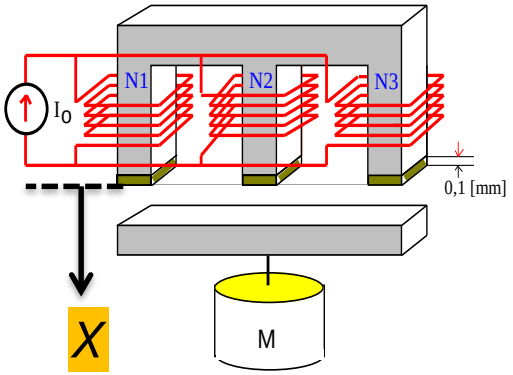
Obs: Este caso es AC (VOFI), así que efectivamente el flujo no depende de $\mathfrak{R}$ o x. Sin embargo, esto es un requisito matemático (derivadas parciales ∂) y se podría aplicar a sistemas VIFO también donde el en realidad $\boldsymbol{\lambda}$ varia con x.

Ejemplo aplicado:

¿Qué sucede si la alimentación de las bobinas es AC?

La fuerza será pulsante y de doble frecuencia respecto a la fuente, produciendo vibraciones ($\Phi=\Phi_m \sin\omega t$).

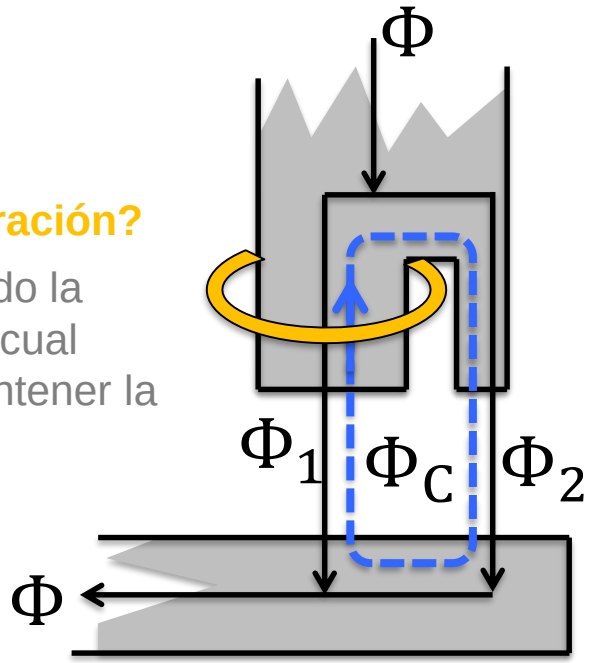
$$F_e = -\frac{\partial W_m(\boldsymbol{\lambda}, x)}{\partial \boldsymbol{x}}\Big|^{\Phi_{cte}} \qquad W_m = \frac{1}{2}\mathfrak{R}\cdot\Phi^2 \qquad \Rightarrow \quad F_e = -\frac{1}{2}\Phi^2\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial x}$$



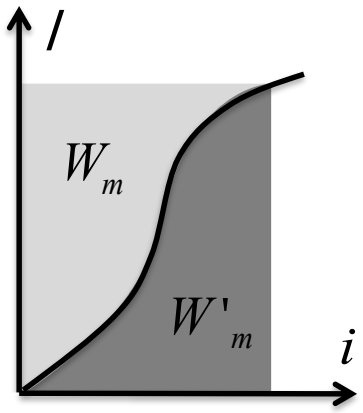
¿Cómo se puede solucionar este problema de la vibración?

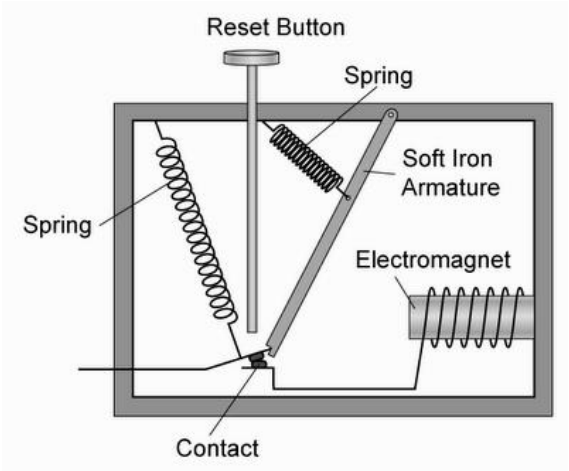
Agregar una espira sombra adecuada, ya que aún cuando la fuerza siga siendo pulsante, tendrá un offset positivo, el cual debe ser superior a la fuerza mínima requerida para mantener la masa acoplada al electroimán para eliminar la vibración.

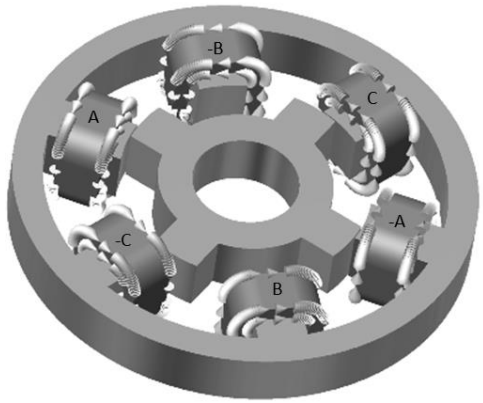
$$\Phi_{1\,Total} = \Phi_1 - \Phi_C = k_1\cos(\omega t + \alpha)$$
$$\Phi_{2\,Total} = \Phi_2 + \Phi_C = k_2\cos(\omega t)$$



Fin Lectura 4







Resumen

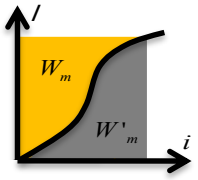
Energía y conversión Electromecánica

I. Energía almacenada en un material o circuito ferromagnético (núcleo)

Energía y Coenergía
(W_m) (W'_m)

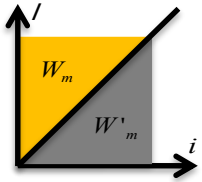
Caso no lineal

$$W_m + W'_m = \lambda \cdot i$$



Caso lineal

$$W_m = W'_m = \frac{1}{2}\lambda \cdot i = \begin{cases} \frac{1}{2} L \cdot i^2 \\ \frac{1}{2} \mathfrak{R} \cdot \Phi^2 \end{cases}$$



II. Conversión de Energía Electromecánica

Caso lineal

$$F_e = -\frac{\partial W_m(\lambda, x)}{\partial x} \qquad W_m = \frac{1}{2}\mathfrak{R} \cdot \Phi^2 \qquad F_e = -\frac{1}{2}\Phi^2 \frac{d\mathfrak{R}}{dx}$$

$$F_e = \frac{\partial W'_m(i, x)}{\partial x} \qquad W'_m = \frac{1}{2} L \cdot \mathrm{i}^2 \qquad F_e = \frac{1}{2}\mathrm{i}^2 \frac{dL}{dx}$$

Conclusiones

Energía y conversión Electromecánica

Energía y Coenergía Magnética

La energía y coenergía dependen de la curva de magnetización del material utilizado y del entrehierro. En sistemas lineales ambas son iguales y se pueden asociar a la inductancia del sistema.

Conversión de Energía Electromecánica

La fuerza o torque mecánico obtenido se puede obtener de la derivada de la energía o coenergía dependiendo de cómo se lleve acabo el proceso. Además, se pueden asociar a la inductancia en sistemas lineales.

Próxima Lectura

Lectura 5

Máquinas y Campos Magnéticos Rotatorios

