IEE 2123 Circuitos Eléctricos
Prof. David Watts, PUC

Clase 24 y 25: Función de Transferencia y Respuesta de Frecuencia y Resonancia (Actualizada)

Contenidos:

Respuesta en frecuencia:

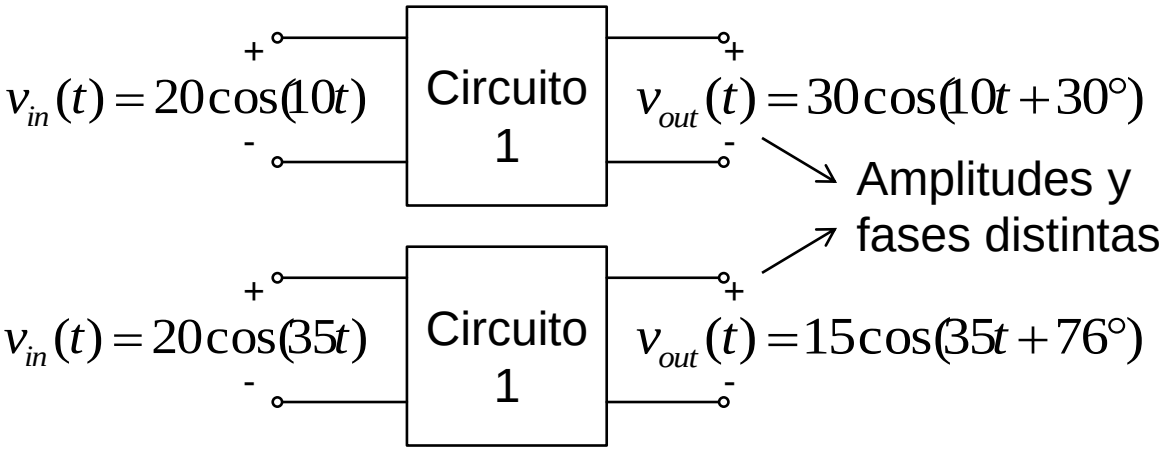
1. Introducción
2. Ganancia y desplazamiento de fase
3. Función de transferencia
4. Diagrama de Bode
5. Filtros
   - 5.1. Polos, ceros y orden del filtro
   - 5.2. Ejemplos
6. Circuitos resonantes (recordar ctos RLC!)

Capítulo 13 Dorf 6ª Edición,

Ayudante: **Enrique Alvarez**

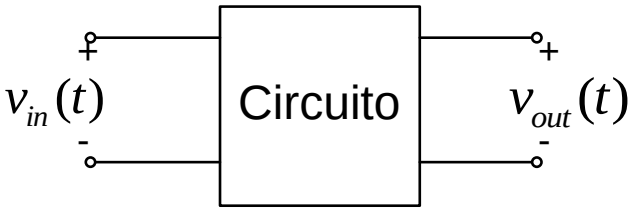
1. Introducción

- Al excitar un circuito con sinusoides de **distintas frecuencias** se obtienen, en régimen permanente, respuestas de distintas amplitudes y fases a la salida de éste.
- Luego los circuitos **actúan distinto** para distintas frecuencias de entrada.
- Corresponde un análisis de circuitos en el **dominio de la frecuencia**. Veremos cómo varían sus parámetros según **variaciones en este dominio**.
  - Ejemplo: Z de cto. R-L y R-L-C serie!



2. Ganancia y desplazamiento de fase

- **Ganancia(G)**: relación entre las **amplitudes de las senoides** de entrada y salida, por ejemplo:



$$v_{in}(t) = A\cos(\omega t)$$

$$v_{out}(t) = B\cos(\omega t + \theta°)$$

$$G = \frac{B}{A}$$

$G < 1 \rightarrow$ Circuito **atenúa** la señal

$G > 1 \rightarrow$ Circuito **amplifica** la señal

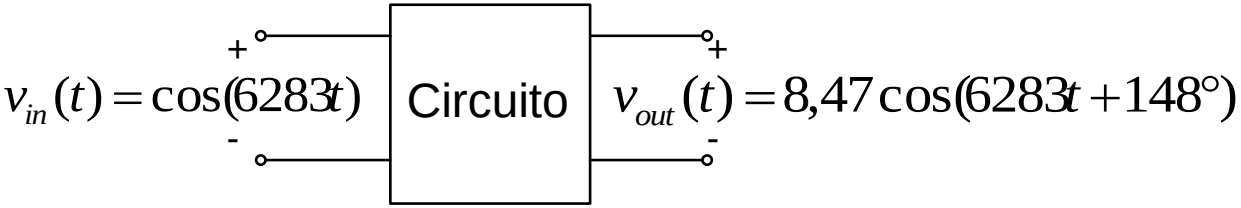
- **Desplazamiento de fase (D.F.)** corresponde a la **relación entre los ángulos de fase** de las senoides de entrada y salida, en el ejemplo anterior:

$$D.F. = \angle v_{out}(t) - \angle v_{in}(t) = \theta°$$

Indica si la salida está **atrasada** o **adelantada** con respecto a la entrada!!

2. Ganancia y desplazamiento de fase

Ejemplo: determine la ganancia y el desplazamiento de fase.



Solución:

Ganancia:

$$G = \frac{8{,}47}{1} = 8{,}47\frac{V}{V}$$

el circuito **amplifica** la señal de entrada a ω=6283 rad/s .

Desplazamiento de fase:

$$D.F. = 148° - 0° = 148° = 2{,}58rad$$

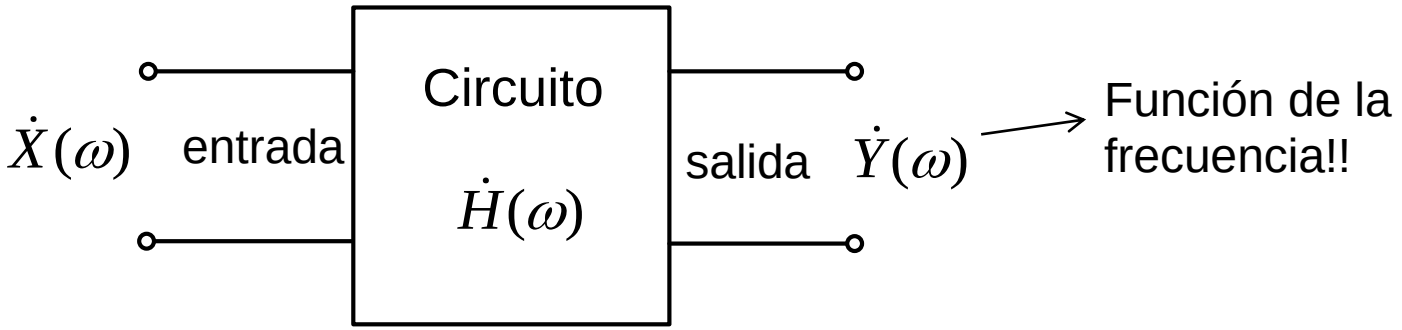
la salida está adelantada en 148° con respecto a la entrada, en términos del tiempo:

$$\frac{D.F.}{\omega} = \frac{2{,}58}{6283} = 410\mu s \longrightarrow$$ Salida adelantada en 410μs con respecto a la entrada

3. Función de transferencia

- **Función de transferencia:**

  Tenemos:



  se define la **función de transferencia** como:

$$\dot{H}(\omega) = \frac{\dot{Y}(\omega)}{\dot{X}(\omega)}$$

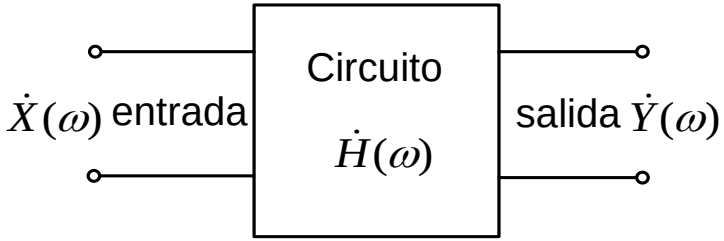
Tanto X(ω) como Y(ω) son fasores (con Magnitud y fase) y pueden ser voltajes o corrientes.

  describe la forma en que el **comportamiento del circuito** depende de la frecuencia.

3. Función de transferencia

- **Ganancia:**

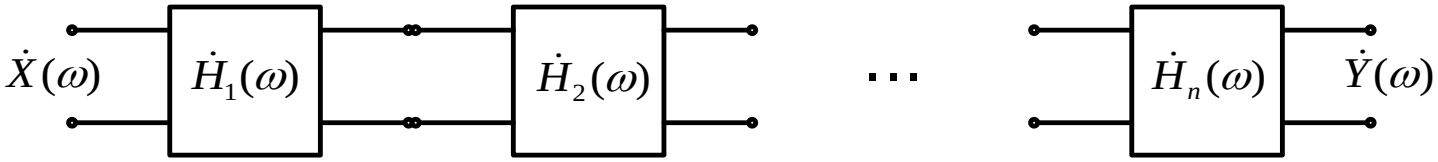
$$G = \left|\dot{H}(\omega)\right| = \frac{\left|\dot{Y}(\omega)\right|}{\left|\dot{X}(\omega)\right|}$$



- **Desplazamiento de fase:**

$$D.F. = \angle\dot{H}(\omega) = \angle\dot{Y}(\omega) - \angle\dot{X}(\omega)$$

- **Circuitos en cascada, Idealmente:**
  - **Cuando esto funciona?**



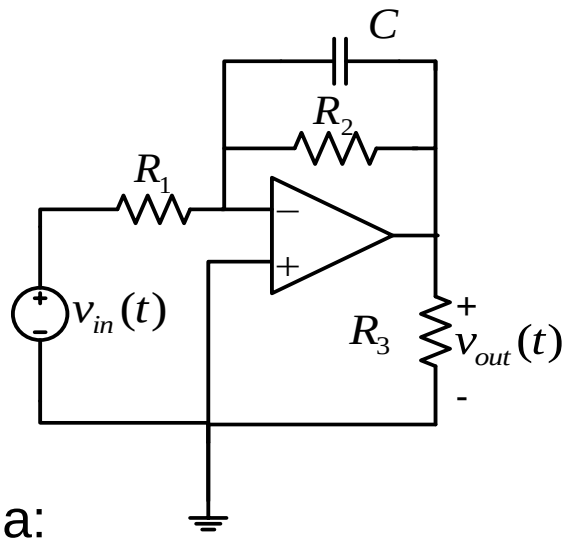
$$\prod_{i=1}^{n} \dot{H}_i(\omega) = \frac{\dot{Y}(\omega)}{\dot{X}(\omega)}$$

Ej: Cto. RC p.567

3. Función de transferencia

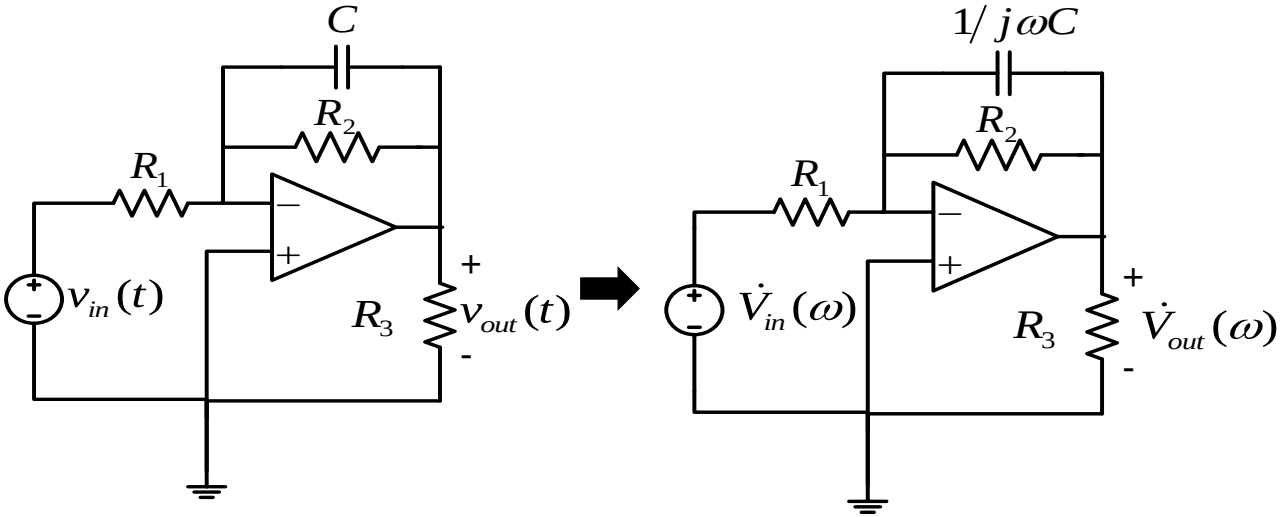
Ejemplo: encontrar |H(ω)| y ∠H(ω)

$$R_1 = 5k\Omega$$
$$R_2 = 50k\Omega$$
$$R_3 = 10k\Omega$$
$$C = 2nF$$



Solución:

Pasamos el circuito al dominio de la frecuencia:

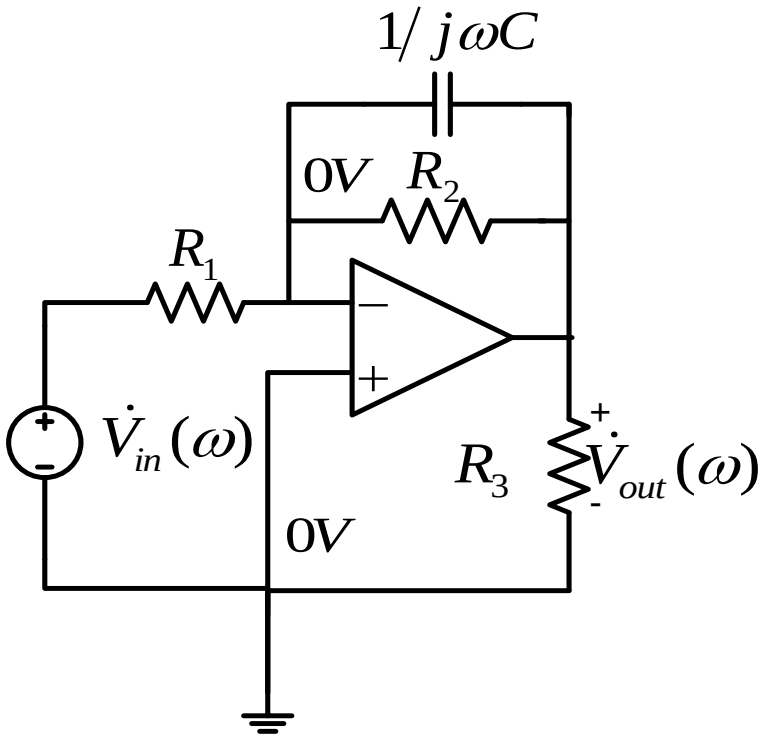


3. Función de transferencia

En la entrada inversora:

$$i_{entran} = \frac{\dot{V}_{in}(\omega)}{R_1} + \frac{\dot{V}_{out}(\omega)}{\left(R_2 \,//\, \frac{1}{j\omega C}\right)} = 0$$

$$\dot{H}(\omega) = \frac{\dot{V}_{out}(\omega)}{\dot{V}_{in}(\omega)} = -\frac{1}{R_1} \cdot \left(\frac{R_2}{1 + j\omega C R_2}\right)$$

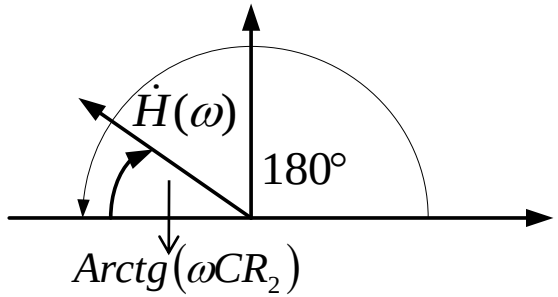


Ganancia:

$$\left|\dot{H}(\omega)\right| = \frac{R_2/R_1}{\sqrt{1+\omega^2 C^2 {R_2}^2}}$$

Desplazamiento de fase:

$$\angle\dot{H}(\omega) = 180° - Arctg(\omega C R_2)$$



3. Función de transferencia

Evaluando:

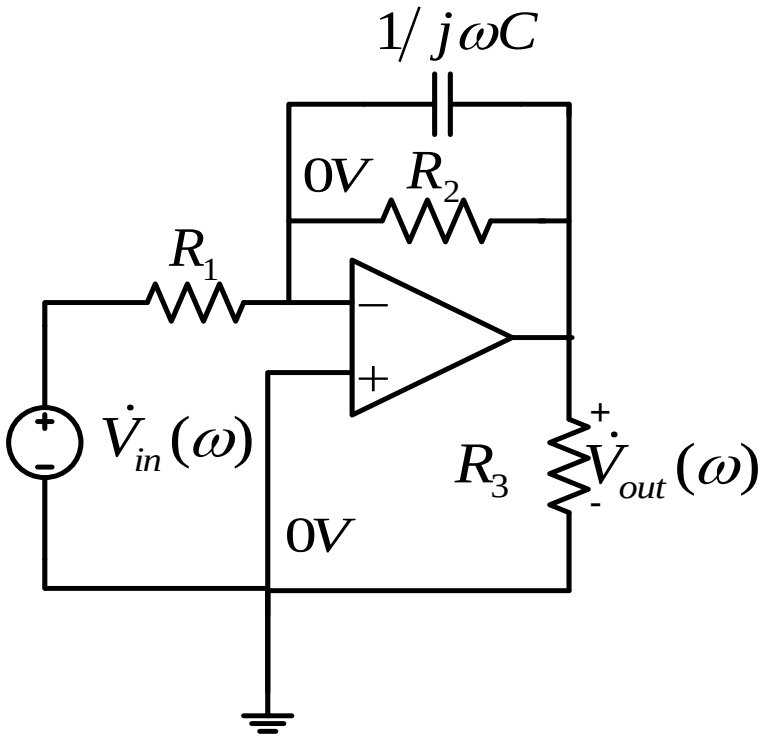
$$\left|\dot{H}(\omega)\right| = \frac{10}{\sqrt{1+\left(\omega^2/10^8\right)}}$$

$$\angle\dot{H}(\omega) = 180° - Arctg\left(\omega/10^4\right)$$

A modo de ejemplo tomamos ω=6283 rad/s:

$$\left|\dot{H}(6283)\right| = \frac{10}{\sqrt{1+\left(6283^2/10^8\right)}} = 8{,}74$$

$$\angle\dot{H}(6283) = 180° - Arctg\left(6283/10^4\right) = 148°$$



4. Diagrama de Bode

- **Diagrama de Bode:** corresponde a los **gráficos** de la Ganancia en decibeles y de la fase en grados contra el logaritmo (base 10) de la frecuencia, es decir:

  - $A)\ 20log_{10}(Ganancia)$ v/s $log_{10}(frecuencia)$
  - $B)\ Fase°$ v/s $log_{10}(frecuencia)$

  Donde $20log_{10}(Ganancia)$ es la ganancia medida en dB(decibeles).

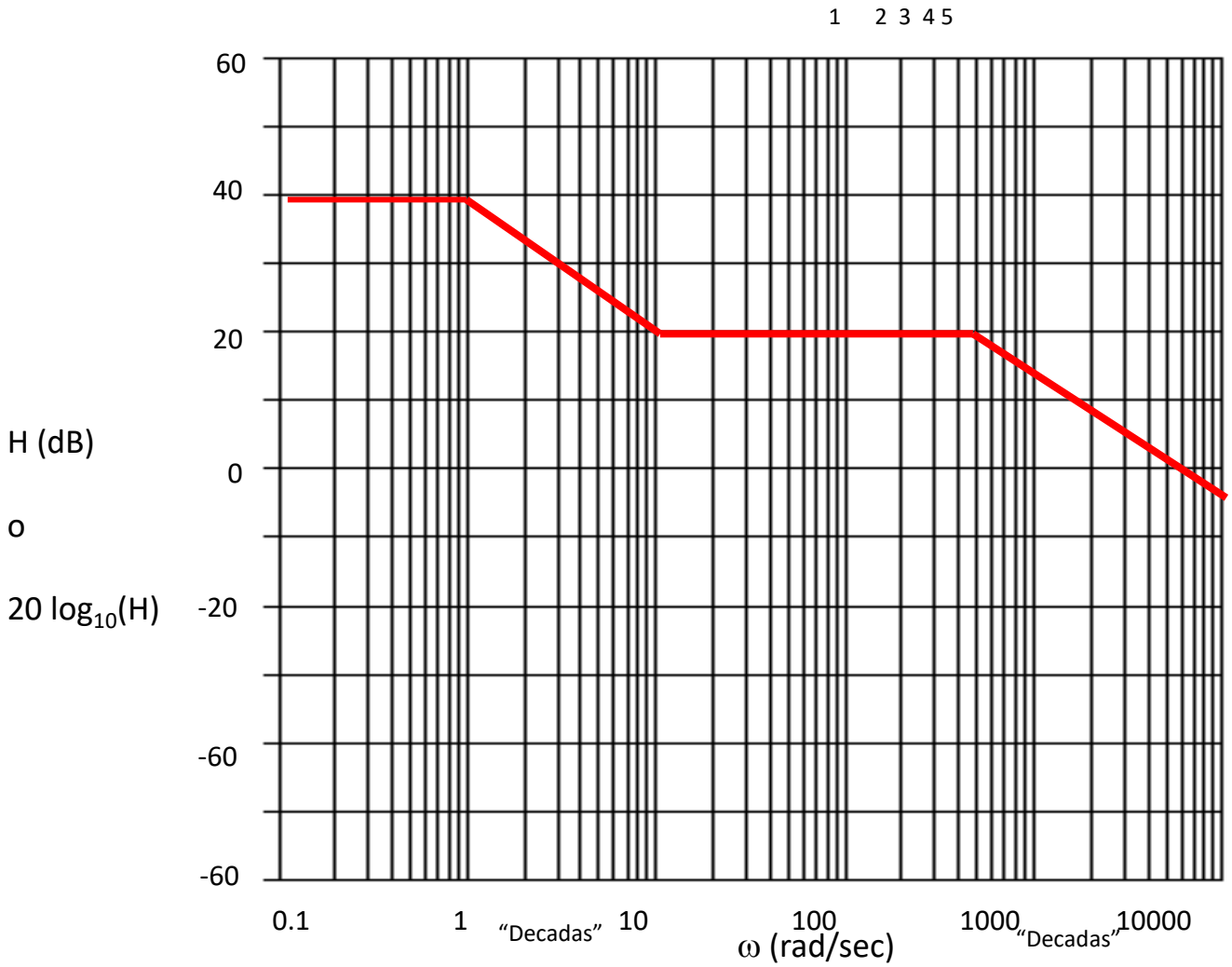
- **Eje de las abscisas:** se acostumbra escribir la frecuencia y no $log_{10}(f)$, manteniendo el escalamiento propio del logaritmo.

- Muy útil para analizar el comportamiento de circuitos para **distintas frecuencias**, en especial el caso de los **filtros**.

4. Diagrama de Bode

Diagrama de Bode (de Magnitud) para la función H

$H = 100(1 + j\omega/10)/[(1 + j\,\omega\,/1)(1 + j\,\omega\,/500)]$



Fuente: EECS.UTK.edu

4. Diagrama de Bode

- **Ejemplo:** bosquejar el Diagrama de Bode de la función de transferencia H:

$$\dot{H}(\omega) = \frac{1}{1 + j(\omega/\omega_0)}$$

Ej. Cto. RC Serie ω_0=?

- **Solución:**

$$\dot{H}(\omega) = \frac{1}{1 + j(\omega/\omega_0)} = H\angle\phi \begin{cases} H = \dfrac{1}{\sqrt{1+(\omega/\omega_0)^2}} \\ \phi = -\tan^{-1}(\omega/\omega_0) \end{cases}$$

Para valores pequeños de ω($\omega << \omega_0$):

$$H = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega/\omega_0)^2}} \cong 1 \rightarrow 20\log_{10}(H) = 20\log_{10}(1) = 0dB$$

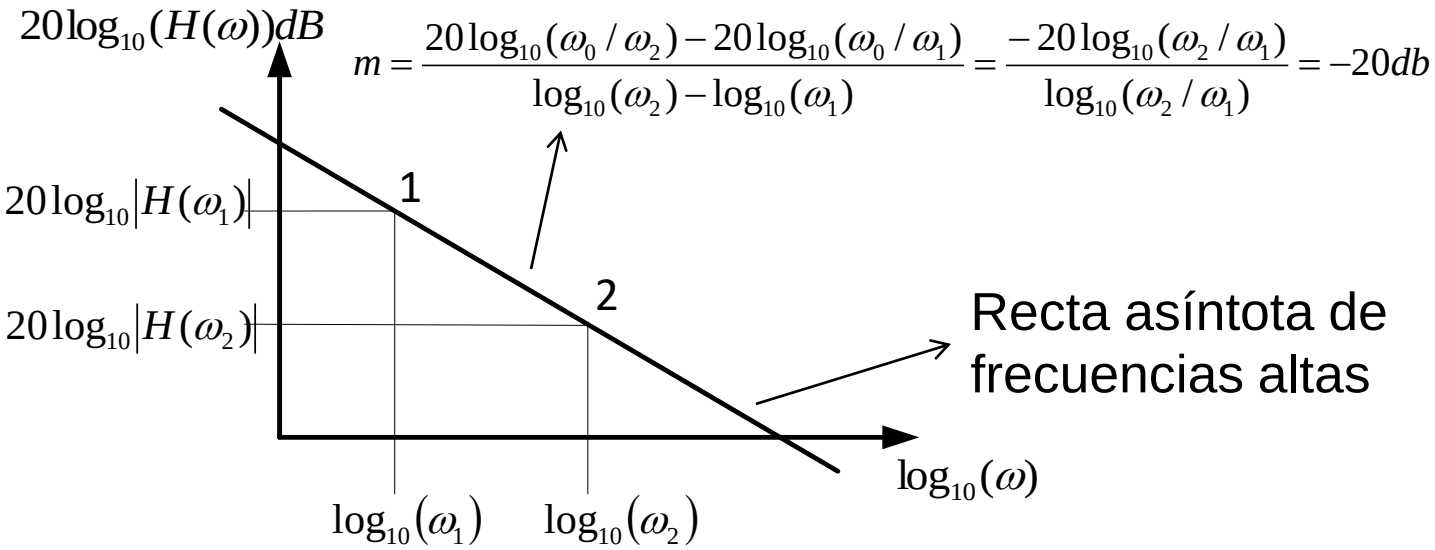
$\downarrow$

Recta asíntota de frecuencias bajas

4. Diagrama de Bode

Para valores grandes de ω(ω>>ω_0):

$$H = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega/\omega_0)^2}} \cong \frac{1}{\sqrt{(\omega/\omega_0)^2}} \rightarrow 20\log_{10}\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right) = 20\log_{10}(\omega_0) - 20\log_{10}(\omega)$$



Los gráficos logarítmicos nos permiten graficar $20log_{10}(H)$ como una recta!!

4. Diagrama de Bode

Para $\omega=\omega_0$:

$$H=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\omega_0/\omega_0\right)^2}}\cong\frac{1}{\sqrt{2}}\rightarrow 20\log_{10}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-3{,}01dB$$

luego cuando $\omega=\omega_0$ las asíntotas bajas y altas forman un quiebre (donde se produce una **caída de *3dB***)

ω_0 ⟶ **Frecuencia de quiebre o corte**

Observación: un circuito puede tener **más de una frecuencia de quiebre**, por ejemplo uno con la siguiente función de transferencia:

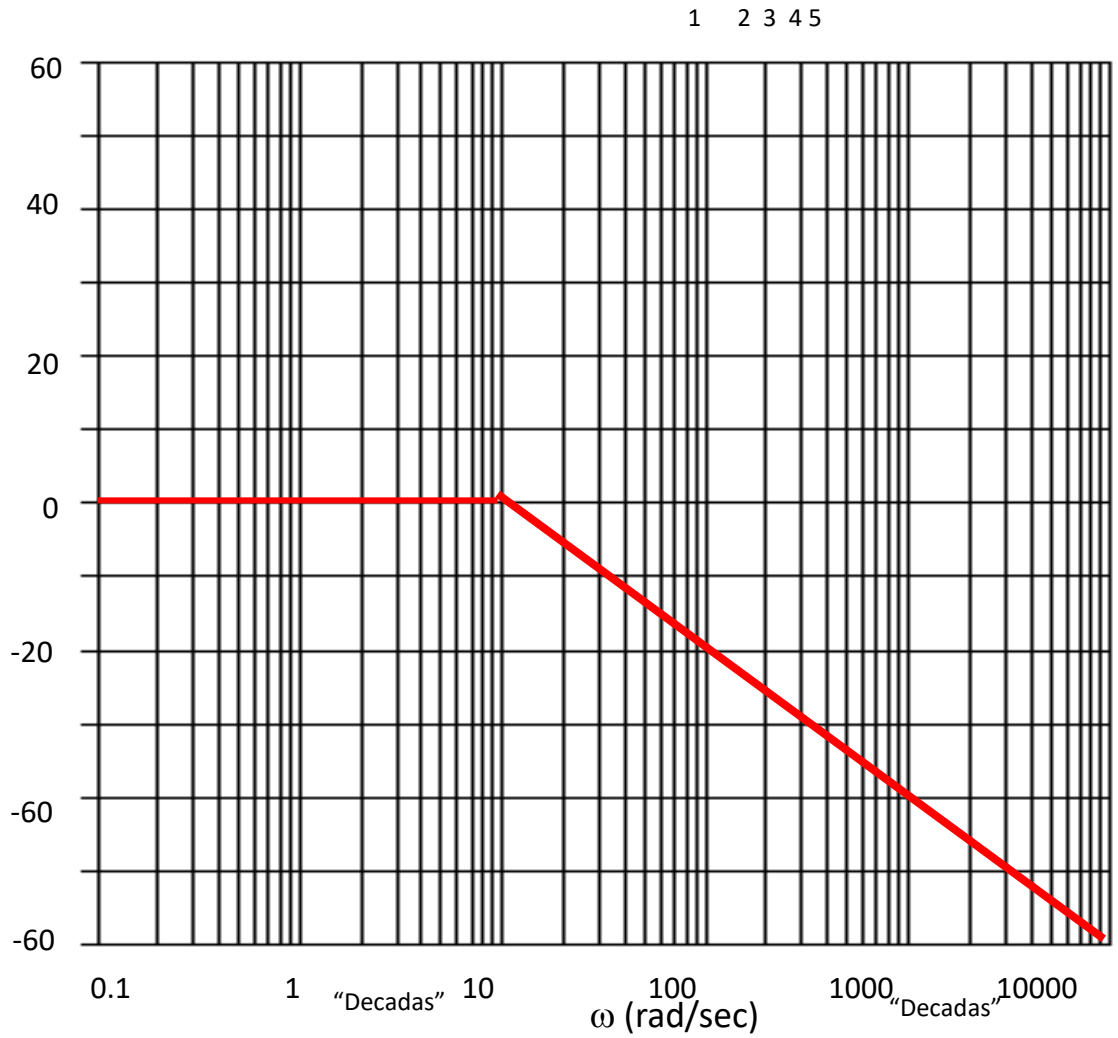
$$H=\frac{1+j\left(\omega/\omega_1\right)}{1+j\left(\omega/\omega_2\right)}$$

Dibujar!

4. Diagrama de Bode

Diagrama de Bode (de Magnitud **aproximado**) para la función H

$H = 1/(1 + j\,\omega/10)$



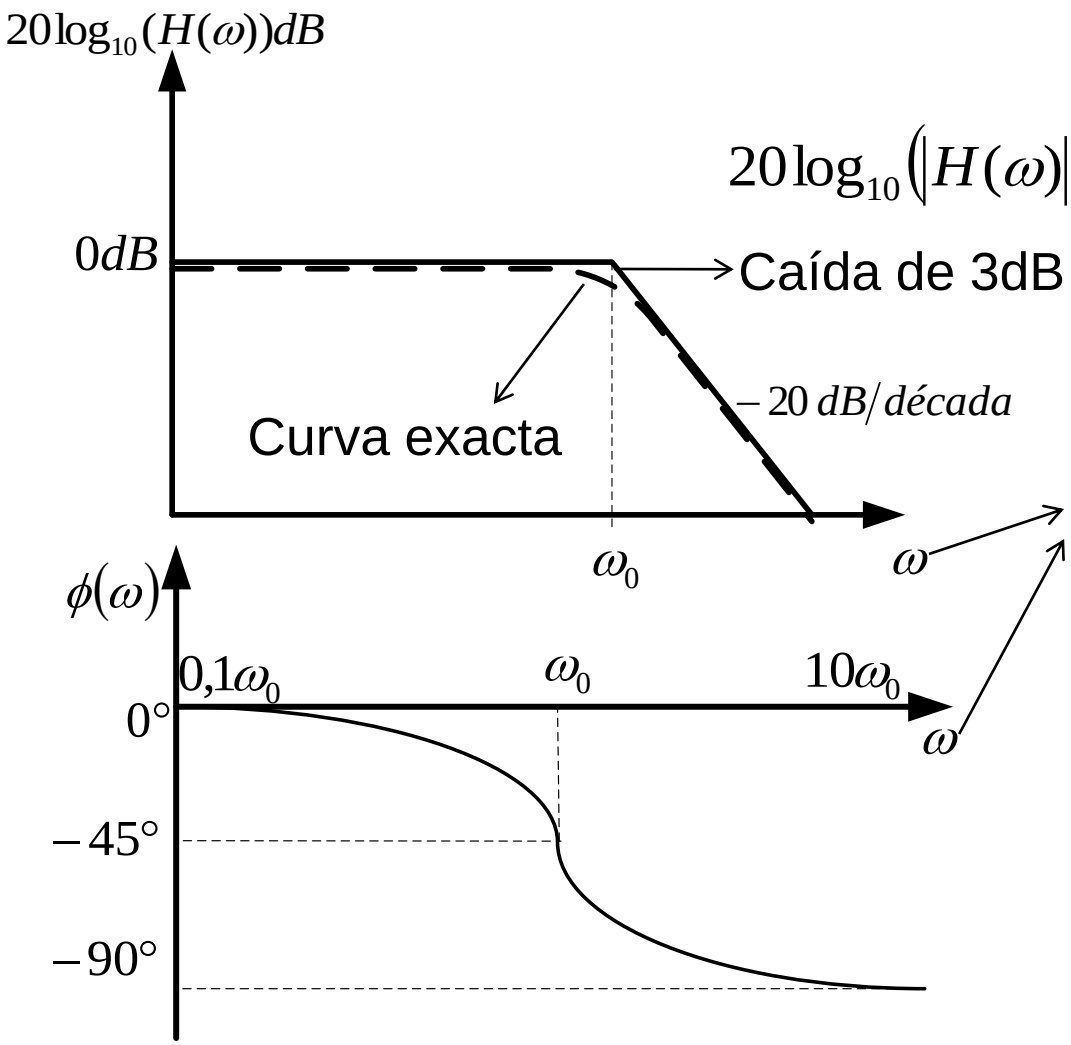
Caida a 20dB/decada

4. Diagrama de Bode

Luego el Diagrama de Bode queda:

$$\dot{H}(\omega) = \frac{1}{1 + j(\omega/\omega_0)}$$

$$20\log_{10}\left(\left|H(\omega)\right|\right) \cong \begin{cases} 1 & \omega < \omega_0 \\ 20\log_{10}(\omega_0/\omega) & \omega > \omega_0 \end{cases}$$



Ej. Cto. RC Serie sirve de filtro pasa bajos!

En escala logarítmica!!

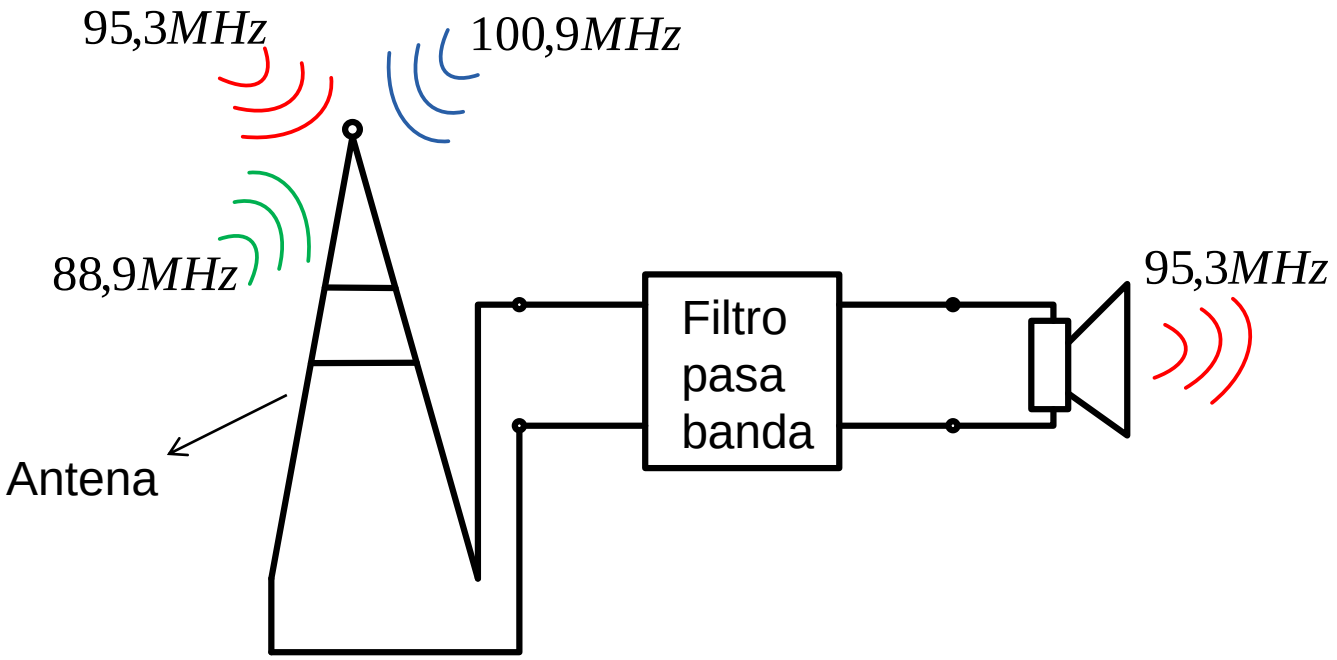
Década: intervalo entre una frecuencia f y $10f$ (ej: $1kHz$ a $10kHz$ o $10Hz$ a $100Hz$)

Diagrama de Bode

5. Filtros

- **Filtros:** consisten en circuitos que **filtran** (dejan pasar) sólo **ciertas componentes de frecuencias** de la señal de entrada (atenuando el resto de las frecuencias).

Podemos encontrar filtros pasa bajos (como el del ejemplo anterior), pasa altos, pasa banda y rechaza banda.



5.1. Polos, ceros y orden del filtro

Para una función de transferencia cualquiera tenemos:

$$\dot{H}(\omega) = \frac{1 + j(\omega/\omega_1)}{(1 + j(\omega/\omega_2))(1 + j(\omega/\omega_3))}$$

- **Polos:** frecuencias de quiebre que aparecen en el **denominador** (ω_2 y ω_3).
- **Ceros:** frecuencias de quiebre que aparecen en el **numerador** (ω_1).
- **Orden del filtro:** corresponde a la suma del número de polos y ceros que tiene el filtro.

Al saber de qué tipo de filtro se trata y su orden, se puede saber cuál es la **caída de decibeles por década** en el rango de frecuencias que atenúa.

4. Diagrama de Bode

Función de Transferencia:

$$H(\omega) = G_0 (j\omega)^K \frac{(1+ j\omega\tau_{z1})(1+ j\omega\tau_{z2})\cdots(1+ j\omega\tau_{zn})}{(1+ j\omega\tau_{p2})(1+ j\omega\tau_{p2})\cdots(1+ j\omega\tau_{pm})}$$

Frecuencias de corte:

$$\omega_i = \frac{1}{\tau_i}$$

Fuente: Prof. Niknejad, Berkeley

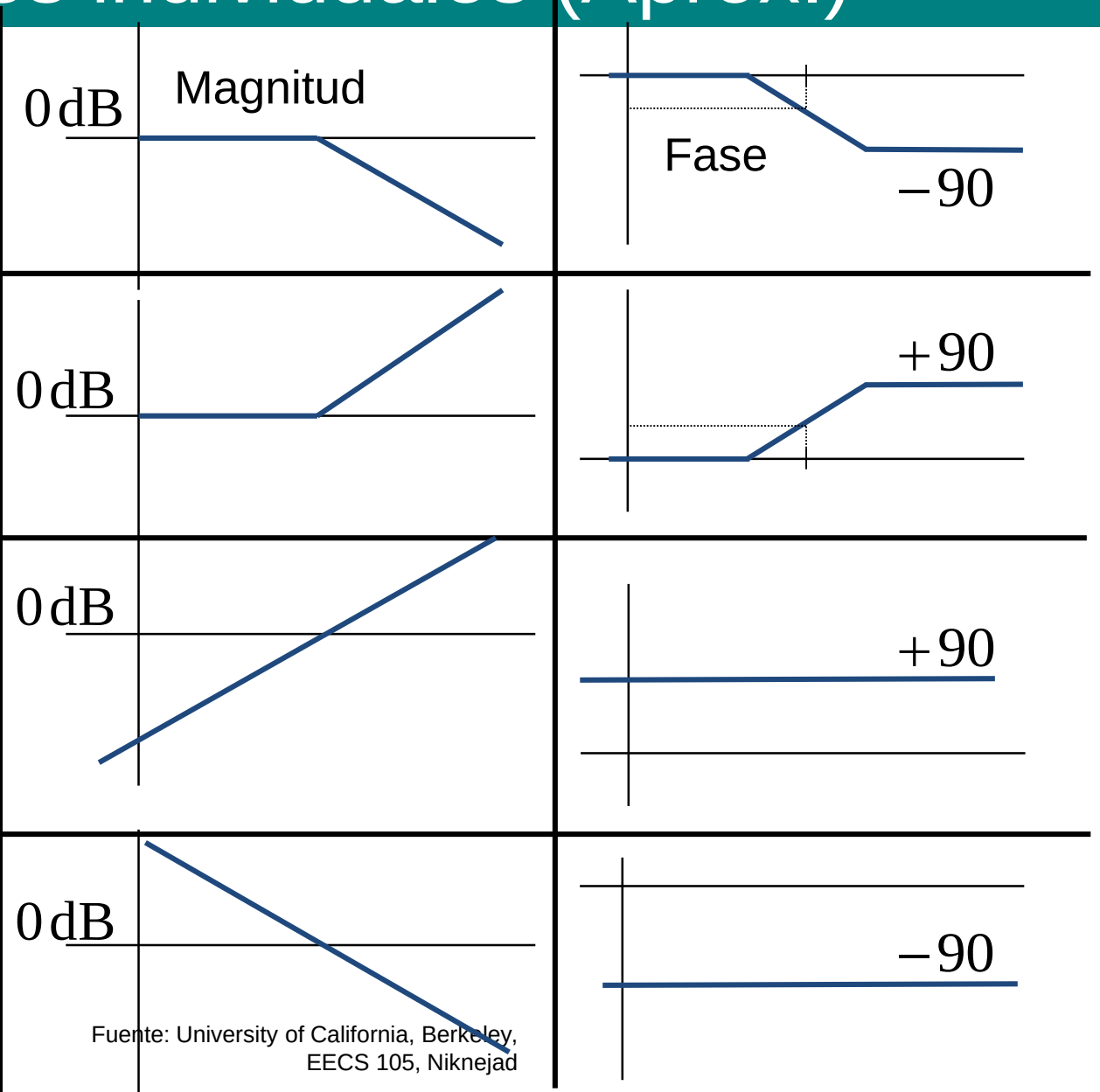
4. Diagrama de Bode: Factores individuales (Aprox.)

Polo simple: $\frac{1}{1+j\omega\tau}$

Cero simple: $1+j\omega\tau$

Cero en .. $j\omega\tau$

Polo en … $\frac{1}{j\omega\tau}$



Fuente: University of California, Berkeley, EECS 105, Niknejad

4. Diagrama de Bode: Ejemplo

Función de Transferencia:

$$H(j\omega) = \frac{10^{-5}\, j\omega(1+ j\omega\tau_2)}{(1+ j\omega\tau_1)(1+ j\omega\tau_3)}$$

$$\tau_1 = 100\,\text{ns}$$
$$\tau_2 = 10\,\text{ns}$$
$$\tau_3 = 100\,\text{ps}$$

Frecuencias de corte: (constantes de tiempo invertidas)

$$\omega_1 = 10\,\text{Mrad/s} \qquad \omega_2 = 100\,\text{Mrad/s} \qquad \omega_3 = 10\,\text{Grad/s}$$

$$H(j\omega) = \frac{\frac{j\omega}{10^5}(1+ j\frac{\omega}{\omega_2})}{(1+ j\frac{\omega}{\omega_1})(1+ j\frac{\omega}{\omega_3})}$$

Fuente: Prof. Niknejad, Berkeley

4. Diagrama de Bode: Ejemplo Ganancia y Fase

1. Producto = suma de logs…
2. Dibujar cada uno por separado

$$\left|H(j\omega)\right|_{\text{dB}} = 20\log\left|\frac{\frac{j\omega}{10^5}(1+j\frac{\omega}{\omega_2})}{(1+j\frac{\omega}{\omega_1})(1+j\frac{\omega}{\omega_3})}\right|$$

$$= 20\log\left|\frac{j\omega}{10^5}\right| + 20\log\left|1+j\frac{\omega}{\omega_2}\right|$$

$$-20\log\left|1+j\frac{\omega}{\omega_1}\right| - 20\log\left|1+j\frac{\omega}{\omega_3}\right|$$

3. Sumar gráficamente!

Ángulos se suman

$$\angle a\cdot b = \angle a + \angle b$$

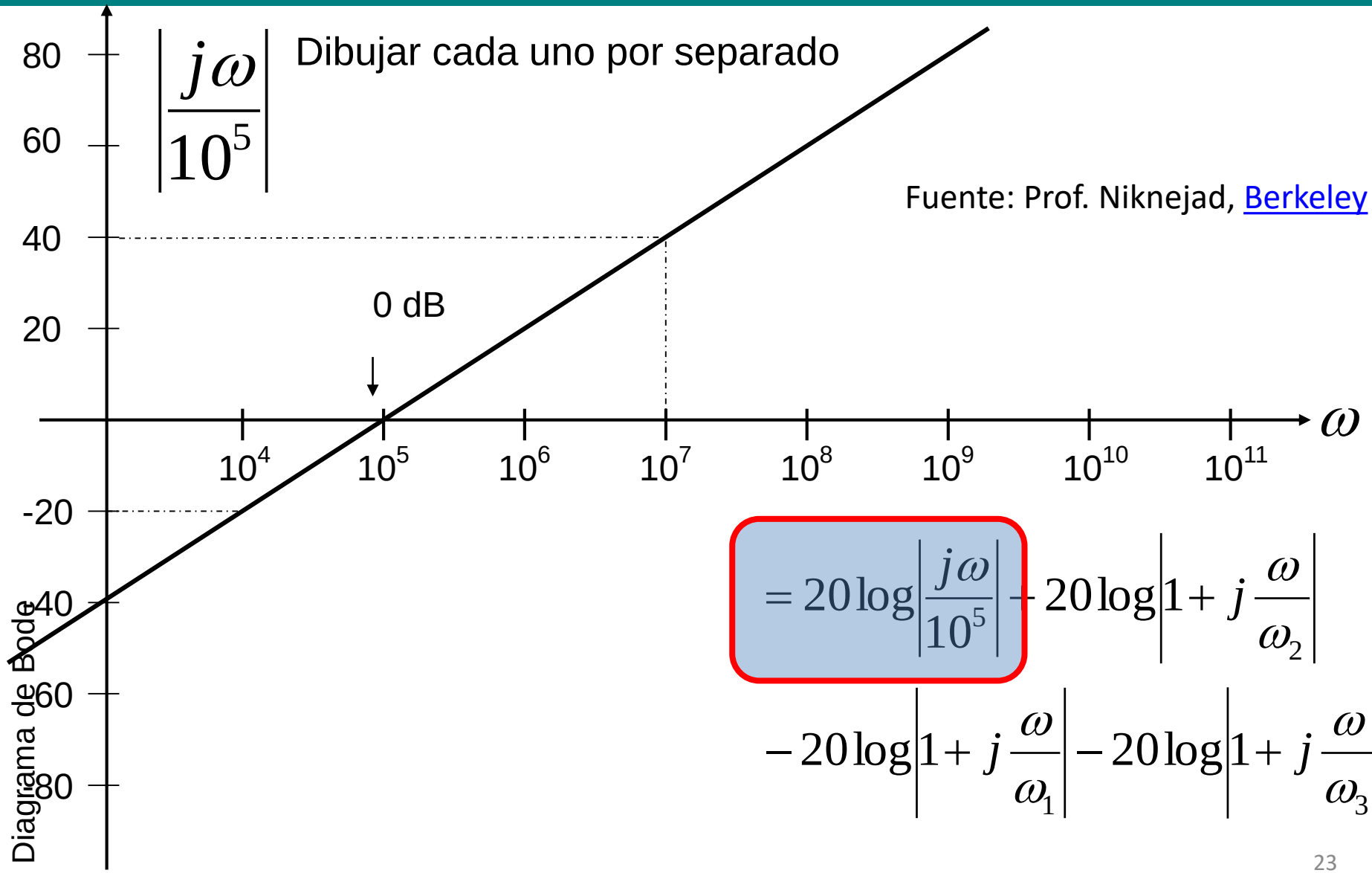
$$\angle H(j\omega) = \angle\frac{10^{-5}\, j\omega(1+j\omega\tau_2)}{(1+j\omega\tau_1)(1+j\omega\tau_3)}$$

$$\angle H(j\omega) = \angle\frac{j\omega}{10^5} + \angle 1+j\frac{\omega}{\omega_2}$$

$$-\angle 1+j\frac{\omega}{\omega_1} - \angle 1+j\frac{\omega}{\omega_3}$$

Fuente: Prof. Niknejad, Berkeley

4. Diagrama de Bode: Ejemplo

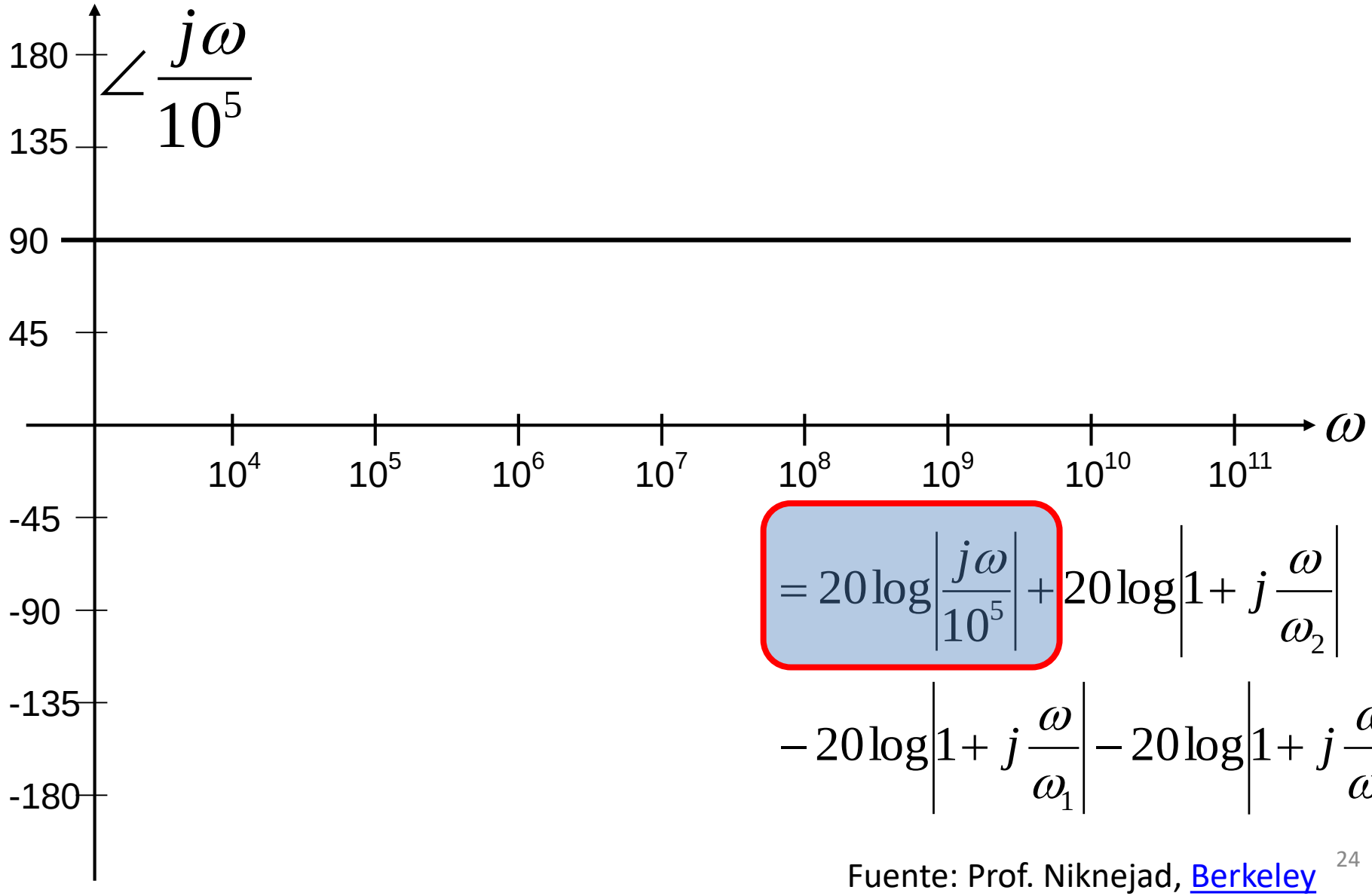


Fuente: Prof. Niknejad, Berkeley

$$= 20\log\left|\frac{j\omega}{10^5}\right| + 20\log\left|1 + j\frac{\omega}{\omega_2}\right|$$

$$- 20\log\left|1 + j\frac{\omega}{\omega_1}\right| - 20\log\left|1 + j\frac{\omega}{\omega_3}\right|$$

4. Diagrama de Bode: Ejemplo

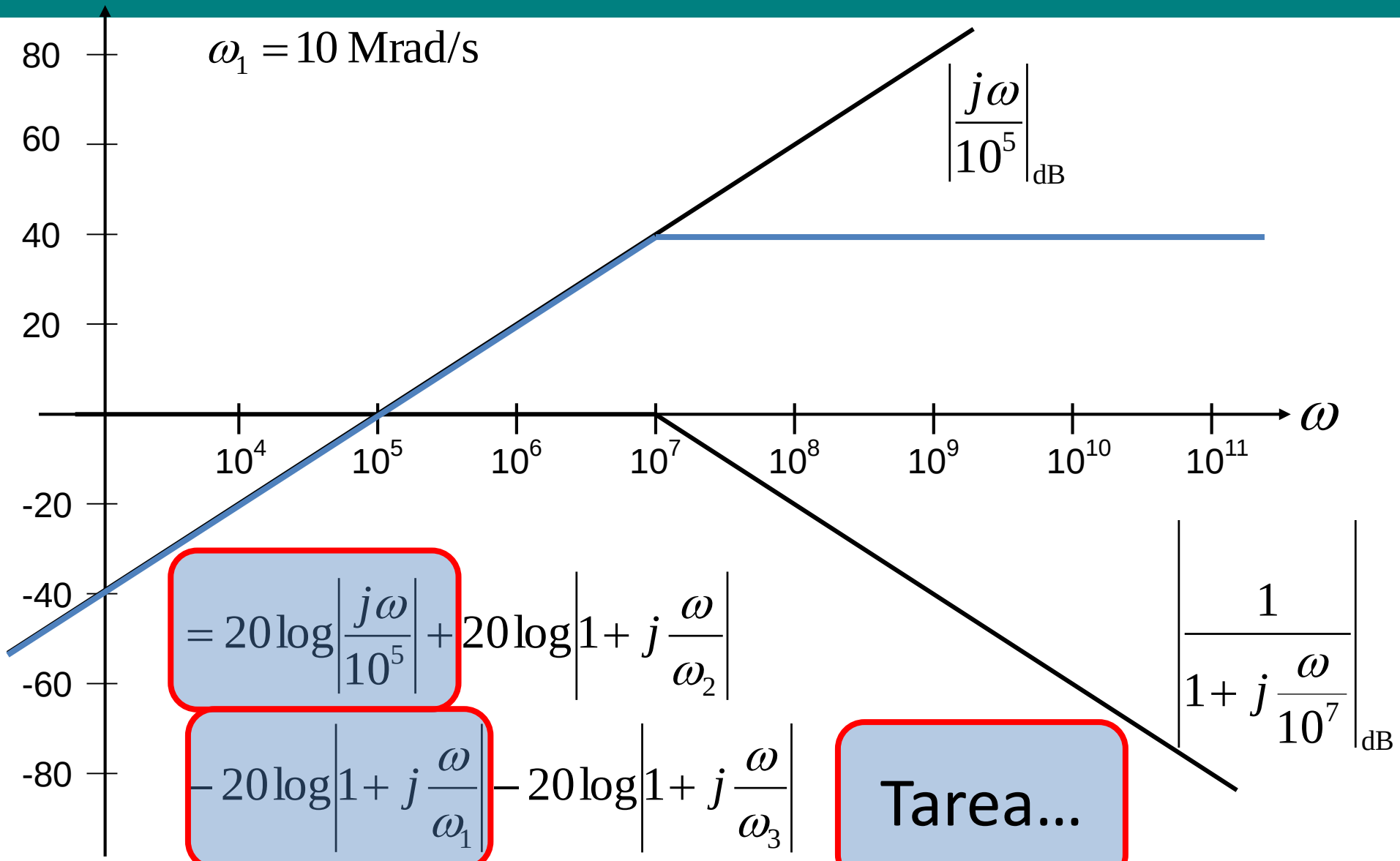


$$= 20\log\left|\frac{j\omega}{10^5}\right| + 20\log\left|1 + j\frac{\omega}{\omega_2}\right|$$

$$- 20\log\left|1 + j\frac{\omega}{\omega_1}\right| - 20\log\left|1 + j\frac{\omega}{\omega_3}\right|$$

Fuente: Prof. Niknejad, Berkeley

4. Diagrama de Bode: Ejemplo



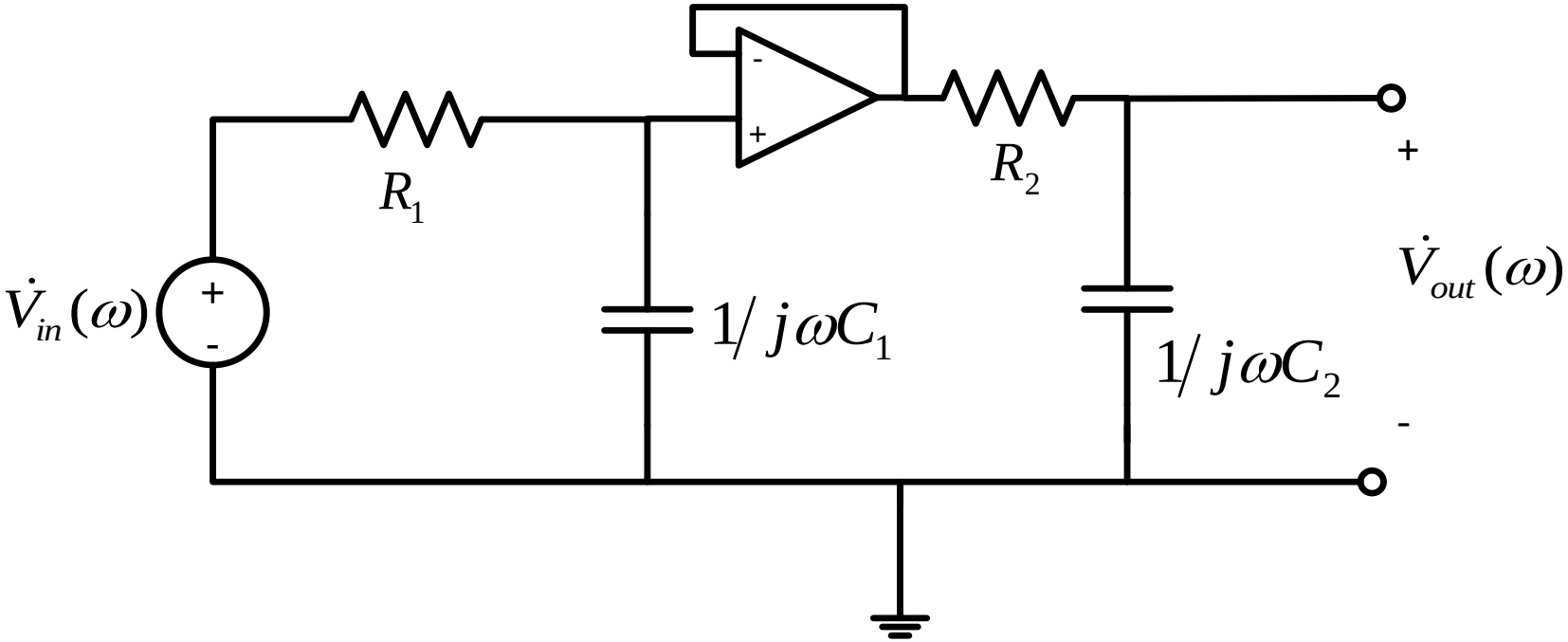
Fuente: Prof. Niknejad, Berkeley

5.1. Polos, ceros y orden del filtro

Graficar la ganancia de:

$$G(j\omega) = \frac{10^4 (j\omega + 2)}{(j\omega + 10)(j\omega + 100)}$$

5.2. Ejemplos:
Filtro pasa bajos.



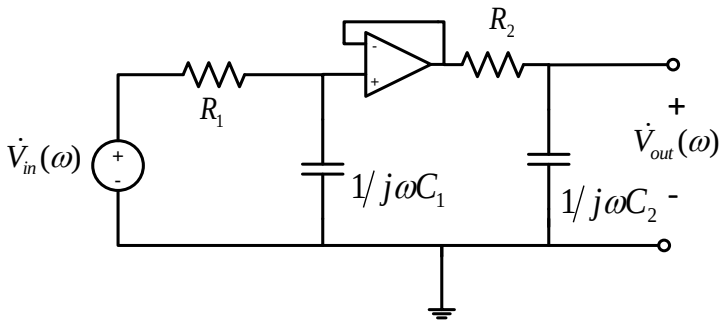
$$\frac{\dot{V}_{out}}{\dot{V}_{in}} = \frac{1}{(1+j\omega R_1 C_1)(1+j\omega R_2 C_2)}$$

Función de transferencia filtro R_1C_1

Función de transferencia filtro R_2C_2

5.2. Ejemplos:
Filtro pasa bajos.

Como podemos ver se trata de un **filtro de segundo orden**, ya que tiene dos polos:



$$\omega_1 = 1/R_1C_1 \quad \text{y} \quad \omega_2 = 1/R_2C_2$$

A modo de ejemplo tomamos los valores:

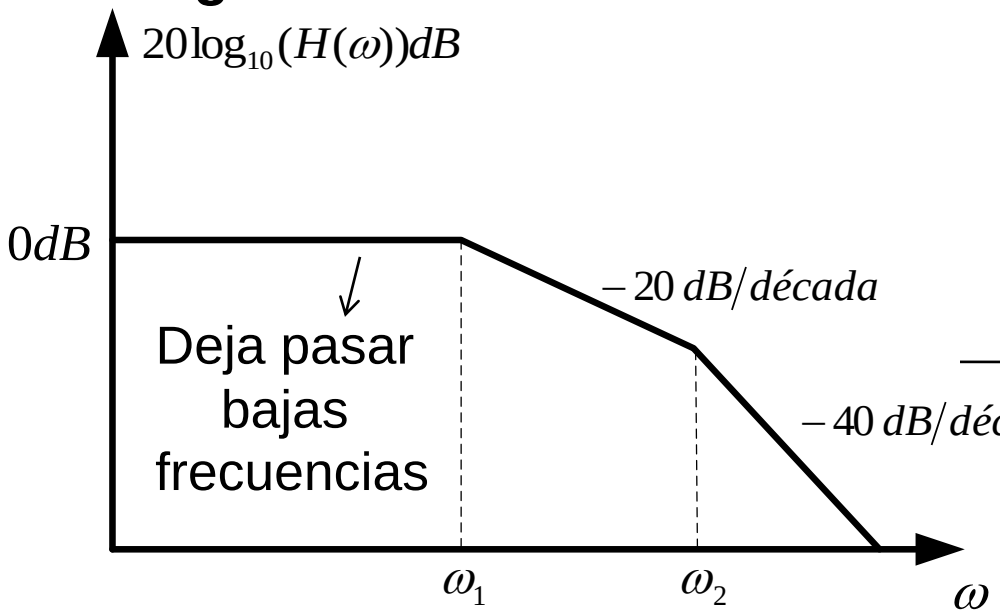
$$R_1 = R_2 = 10k\Omega$$
$$C_1 = 1nF$$
$$C_2 = 1pF$$

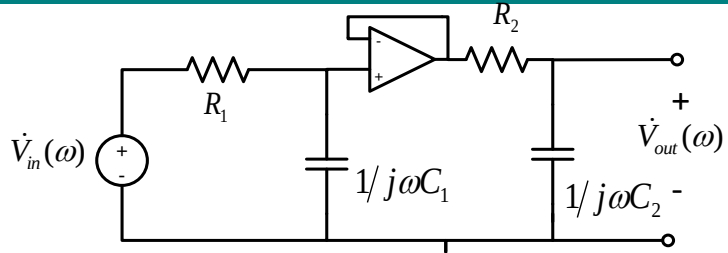
$$\dot{H}(\omega) = \frac{1}{\left(1 + j\omega \cdot 10^{-5}\right)\left(1 + j\omega \cdot 10^{-8}\right)}$$

$$\omega_1 = 10^5 \quad \text{y} \quad \omega_2 = 10^8$$

5.2. Ejemplos:
Filtro pasa bajos.

Diagrama de Bode:





$$\dot{H}(\omega) = \frac{1}{(1 + j\omega \cdot 10^{-5})(1 + j\omega \cdot 10^{-8})}$$

Atenúa altas frecuencias

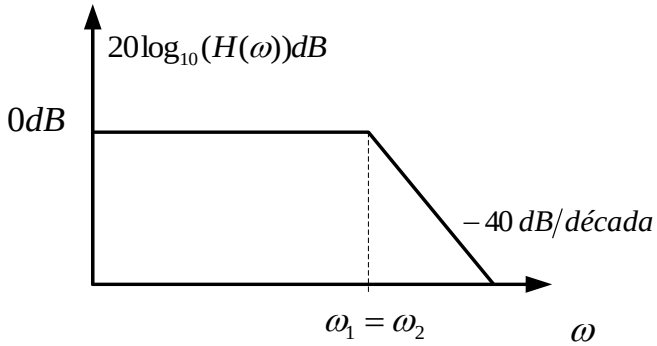
Para un pasa bajos de orden “n”, la caída de decibeles por década está dada por:

$$-20dB/década \quad \omega_1 < \omega < \omega_2$$
$$-40dB/década \quad \omega_2 < \omega < \omega_3$$
$$\vdots$$
$$-n \cdot 20dB/década \quad \omega_n < \omega$$

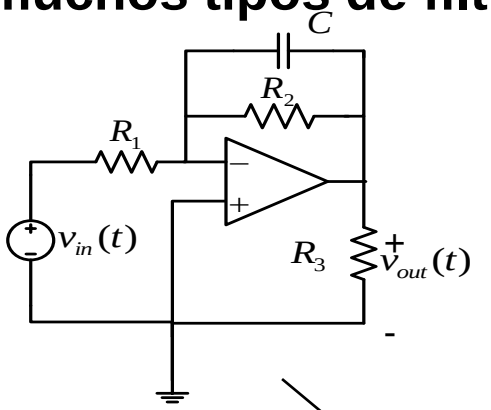
5.2. Ejemplos:
Filtro pasa bajos.

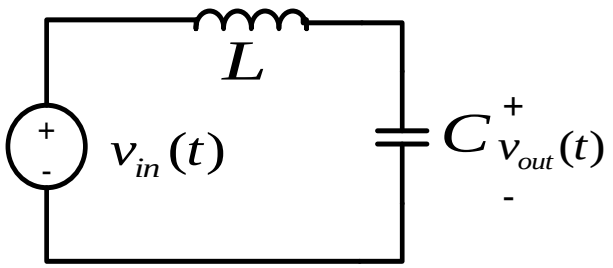
Observaciones:

- Para el caso en que $\omega_1=\omega_2$ el diagrama de Bode queda:



- Hay **muchos tipos de filtros pasa bajos**, tales como:

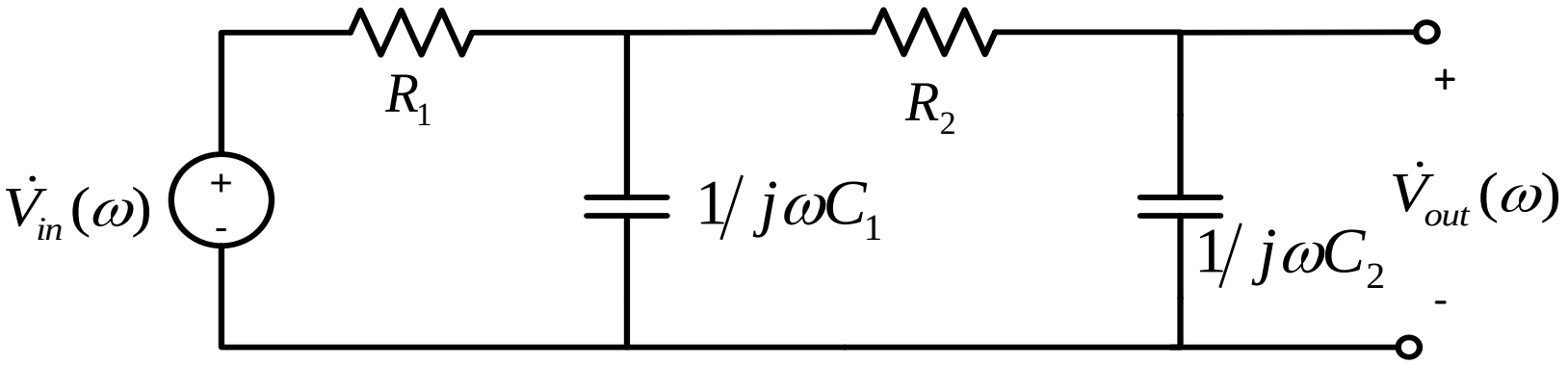




Lo vimos antes!!

5.2. Ejemplos:
Filtro pasa bajos.

¿Qué pasa si no está el OPAM?



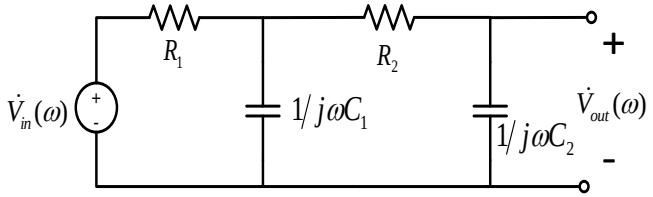
- LCK sobre C_1 y C_2:

$$j\omega C_1 \dot{V}_{C1} + \frac{\dot{V}_{C1} - \dot{V}_{in}}{R_1} + \frac{\dot{V}_{C1} - \dot{V}_{out}}{R_2} = 0$$

$$\frac{\dot{V}_{out} - \dot{V}_{C1}}{R_2} + j\omega C_2 \dot{V}_{out} = 0 \rightarrow \dot{V}_{C1} = \left(1 + j\omega R_2 C_2\right)\dot{V}_{out}$$

5.2. Ejemplos:
Filtro pasa bajos.

- Reemplazando:



$$\dot{V}_{C1}\left(j\omega C_1 + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) - \frac{\dot{V}_{out}}{R_2} = \frac{\dot{V}_{in}}{R_1}$$

$$\dot{V}_{C1} = \left(1 + j\omega R_2 C_2\right)\dot{V}_{out}$$

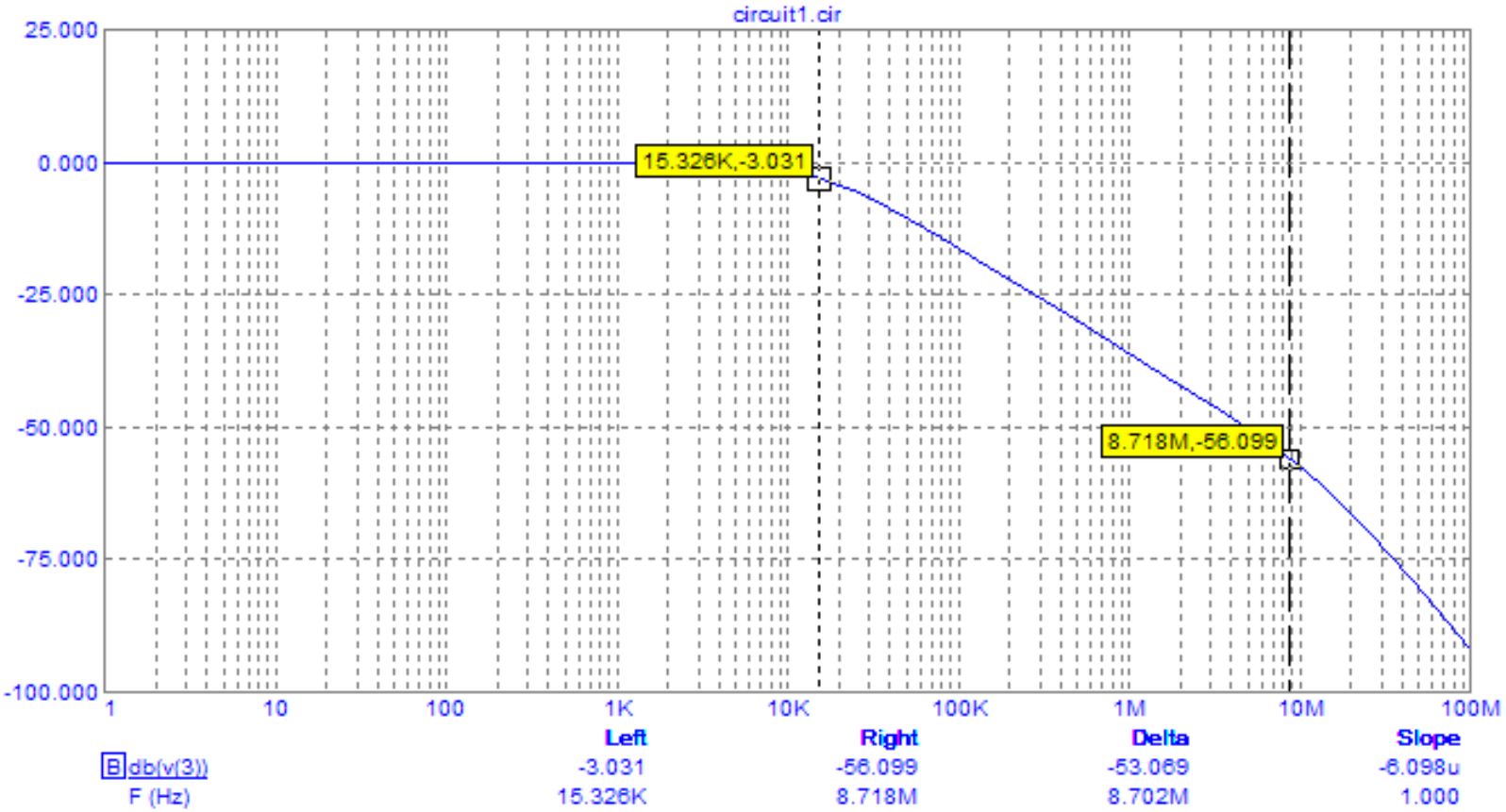
$$\left[\left(1 + j\omega R_2 C_2\right)\left(j\omega C_1 + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) - \frac{1}{R_2} \right]\dot{V}_{out} = \frac{\dot{V}_{in}}{R_1}$$

$$\rightarrow \quad \frac{\dot{V}_{out}}{\dot{V}_{in}} = \frac{1}{\left(1 + j\omega R_1 C_1\right)\left(1 + j\omega R_2 C_2\right) - j\omega R_1 C_2}$$

No es lo mismo! Encontrar polos y ceros!

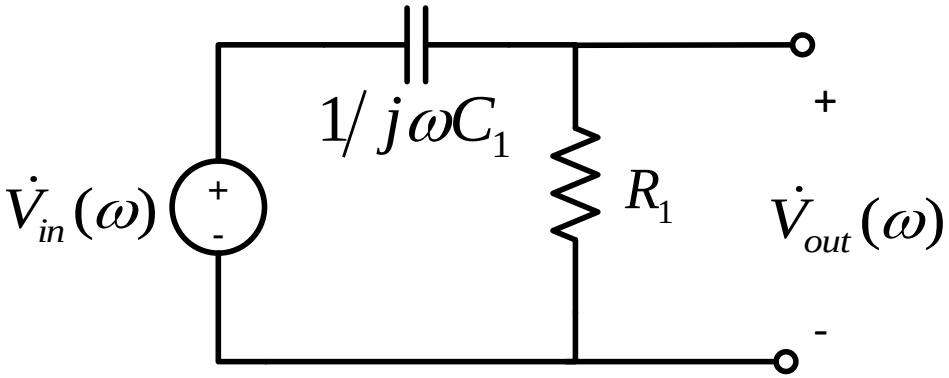
5.2. Ejemplos:
Filtro pasa bajos.

- Diagrama de Bode (para los mismos valores de antes):



También corresponde a un filtro pasa bajos de 2do orden! (sólo cambian las frecuencias de corte por 15kHz y 8,7MHz aproximadamente).

5.2. Ejemplos:
Filtro pasa altos.



- Divisor de voltaje:

$$\dot{V}_{out} = \frac{R_1}{R_1 + 1/j\omega C_1} \cdot \dot{V}_{in} \rightarrow \dot{H}(\omega) = \frac{1}{1 - j/\omega R_1 C_1}$$

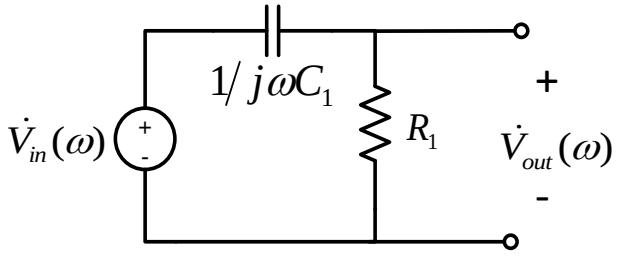
⟶ Función de transferencia filtro pasa altos de primer orden

$$\dot{H}(\omega) = \frac{1}{1 - j/\omega R_1 C_1} \rightarrow \left|\dot{H}(\omega)\right| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega_1/\omega)^2}}$$

$$\omega_1 = 1/R_1 C_1$$

↘ Cero de H(ω)

5.2. Ejemplos:
Filtro pasa altos.



Para **valores bajos** de $\omega(\omega<<\omega_1)$:

$$\left|\dot{H}(\omega)\right| = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\omega_1/\omega\right)^2}} \cong \frac{\omega}{\omega_1}$$

$$\rightarrow 20\log_{10}\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right) = 20\log_{10}(\omega) - 20\log_{10}(\omega_1)$$

Para **valores altos** de $\omega(\omega>>\omega_1)$:

$$\left|\dot{H}(\omega)\right| = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\omega_1/\omega\right)^2}} \cong 1 \rightarrow 20\log_{10}(H) = 20\log_{10}(1) = 0dB$$

Para $\omega = \omega_1$:

$$\left|\dot{H}(\omega)\right| = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\omega_1/\omega_1\right)^2}} \cong \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow 20\log_{10}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -3{,}01dB$$

5.2. Ejemplos:
Filtro pasa altos.

A modo de ejemplo tomamos los valores:

$$R_1 = 10k\Omega$$
$$C_1 = 1nF$$

$$\dot{H}(\omega) = \frac{1}{1 - j \cdot 10^5 / \omega}$$

$$\omega_1 = 10^5$$

Cero de H(ω)

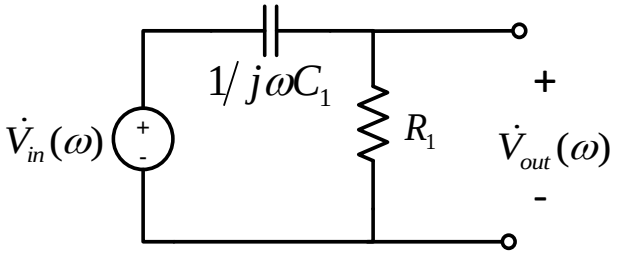
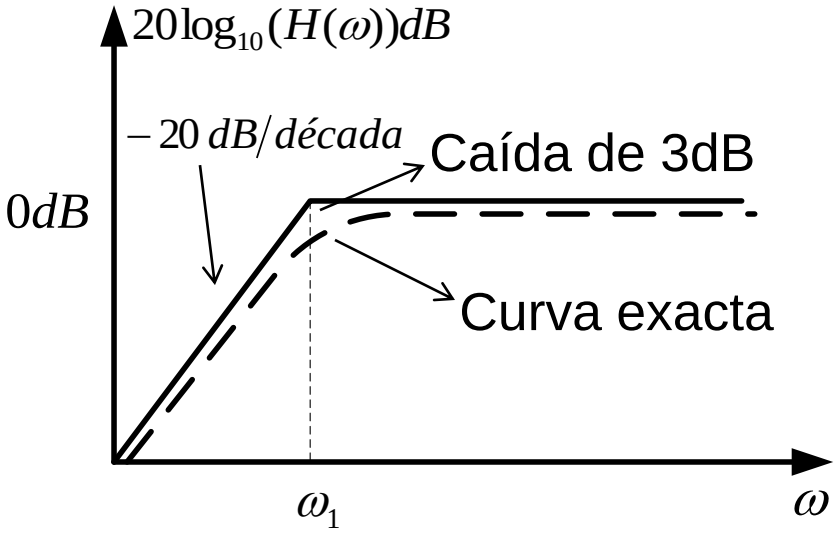
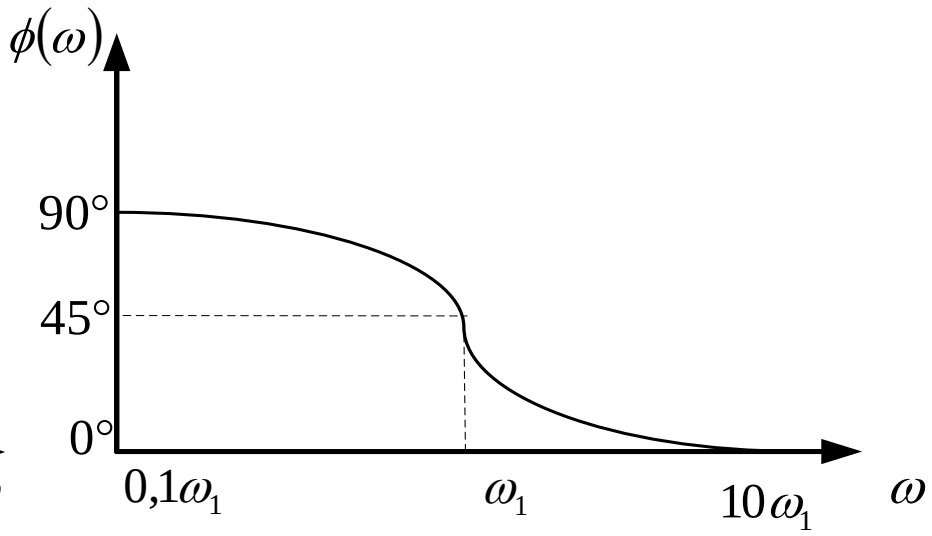


Diagrama de Bode:



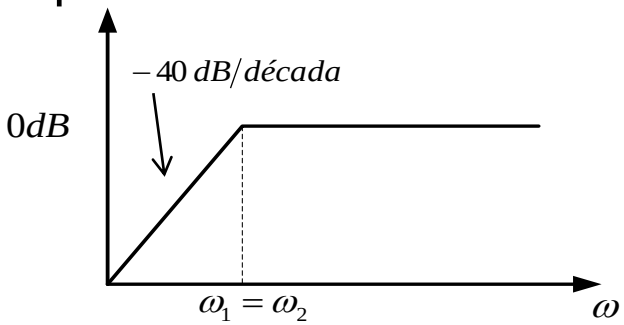


5.2. Ejemplos:
Filtro pasa altos.

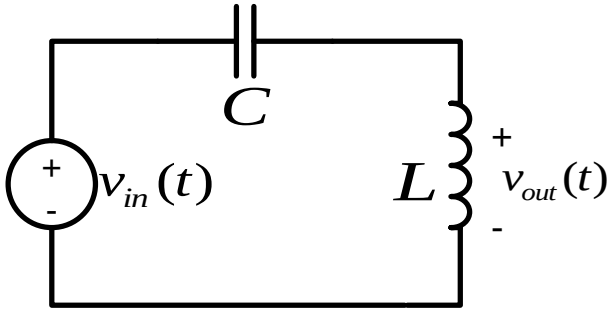
Observaciones:

- Para un filtro pasas altos de **orden "n"**, la caída de decibeles por década sigue el mismo patrón que en el caso del pasa bajos.

- Para el caso en que **dos frecuencias de quiebre sean iguales**, ocurre:

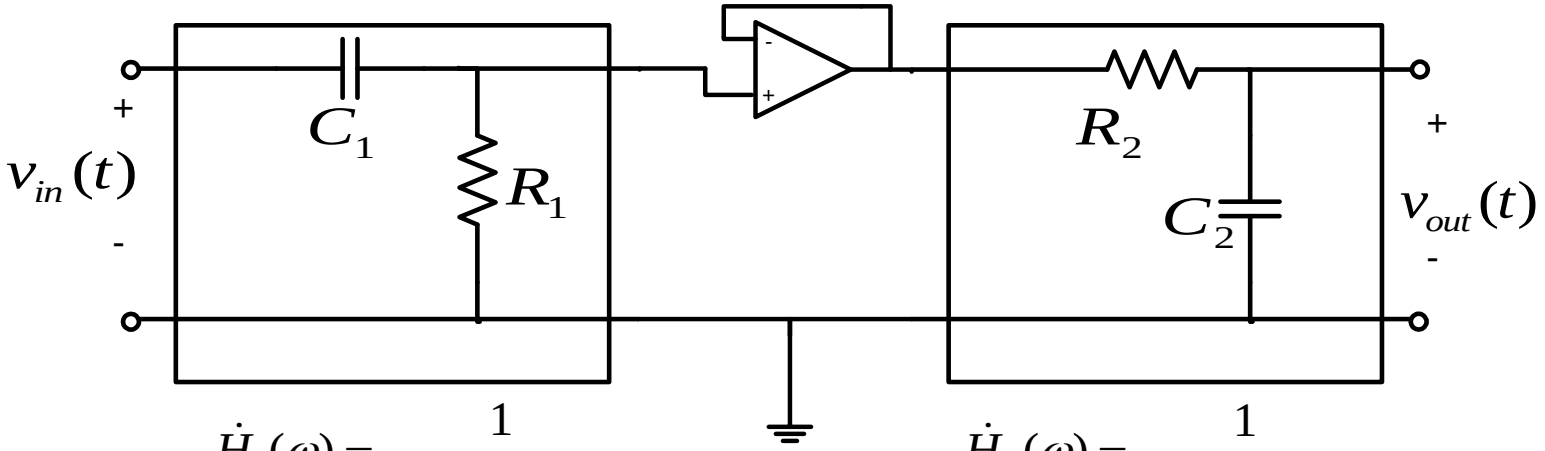


- Hay **muchos tipos de filtros pasa altos**, por ejemplo:



5.2. Ejemplos:
Filtro pasa banda.

- Al juntar un filtro pasa bajos con uno pasa altos:



$$\dot{H}_1(\omega) = \frac{1}{1+1/j\omega R_1 C_1} \qquad \dot{H}_2(\omega) = \frac{1}{j\omega C_2 R_2 + 1}$$

$$\dot{H}(\omega) = \dot{H}_1(\omega)\cdot\dot{H}_2(\omega) = \frac{1}{\left(1+1/j\omega R_1 C_1\right)\left(j\omega C_2 R_2 + 1\right)}$$

A modo de ejemplo tomamos los valores:

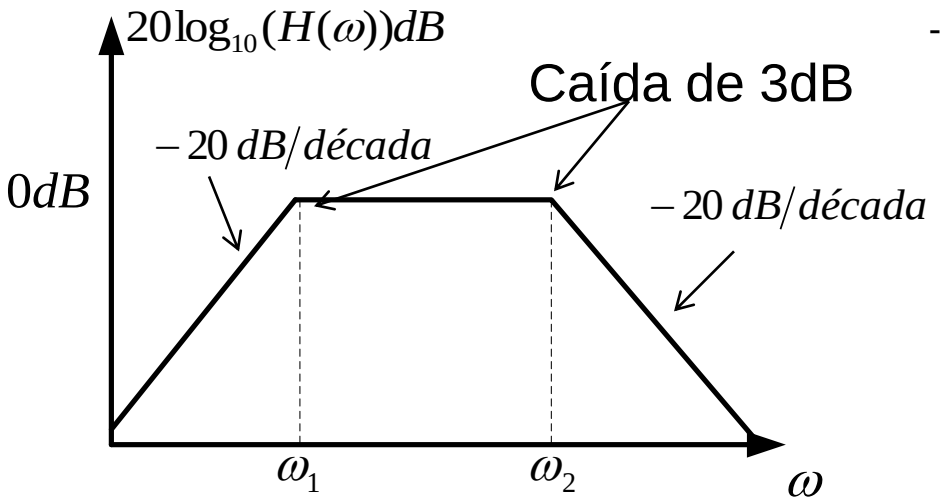
$$R_1 = R_2 = 10k\Omega$$
$$C_1 = 1pF$$
$$C_2 = 1nF$$

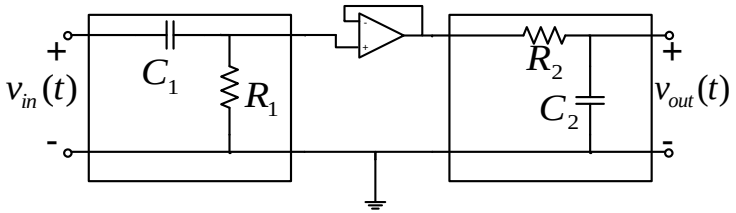
$$\dot{H}(\omega) = \frac{1}{\left(1+10^8/j\omega\right)\left(j\omega 10^{-5}+1\right)}$$

$$\omega_1 = 10^5 \quad \text{y} \quad \omega_2 = 10^8$$

5.2. Ejemplos:
Filtro pasa banda.

Diagrama de Bode:





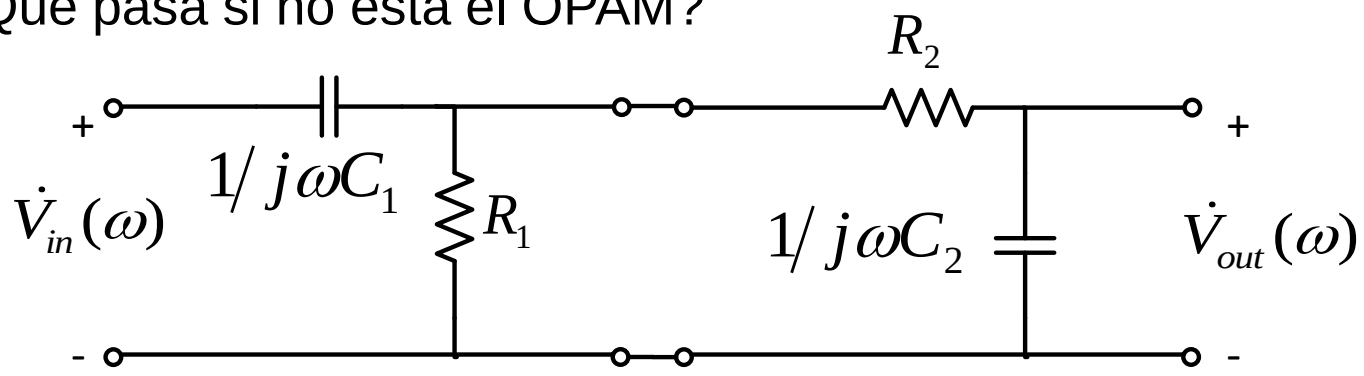
$$\dot{H}(\omega) = \frac{1}{\left(1+10^{8}/j\omega\right)\left(j\omega 10^{-5}+1\right)}$$

Observaciones:

- Los filtros pasa banda **son de orden superior a 2** (por razones obvias).
- Así como hay filtros pasa banda, también hay **rechaza banda**.

5.2. Ejemplos:
Filtro pasa banda.

¿Qué pasa si no está el OPAM?

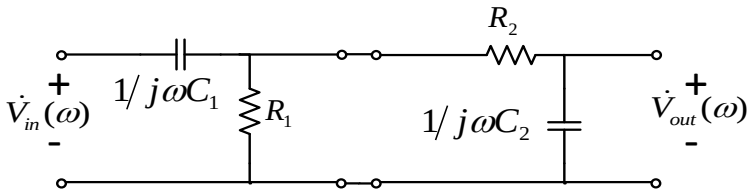


- LCK sobre R_1 y C_2:

$$j\omega C_1\left(\dot{V}_{R1}-\dot{V}_{in}\right)+\frac{\dot{V}_{R1}}{R_1}+\frac{\dot{V}_{R1}-\dot{V}_{out}}{R_2}=0$$

$$\dot{V}_{R1}=\left(1+j\omega R_2 C_2\right)\dot{V}_{out}$$

5.2. Ejemplos:
Filtro pasa banda.



- Reemplazando:

$$\dot{V}_{R1}\left(j\omega C_1+\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)-\frac{\dot{V}_{out}}{R_2}=j\omega C_1\dot{V}_{in}$$

$$\dot{V}_{R1}=\left(1+j\omega R_2C_2\right)\dot{V}_{out}$$

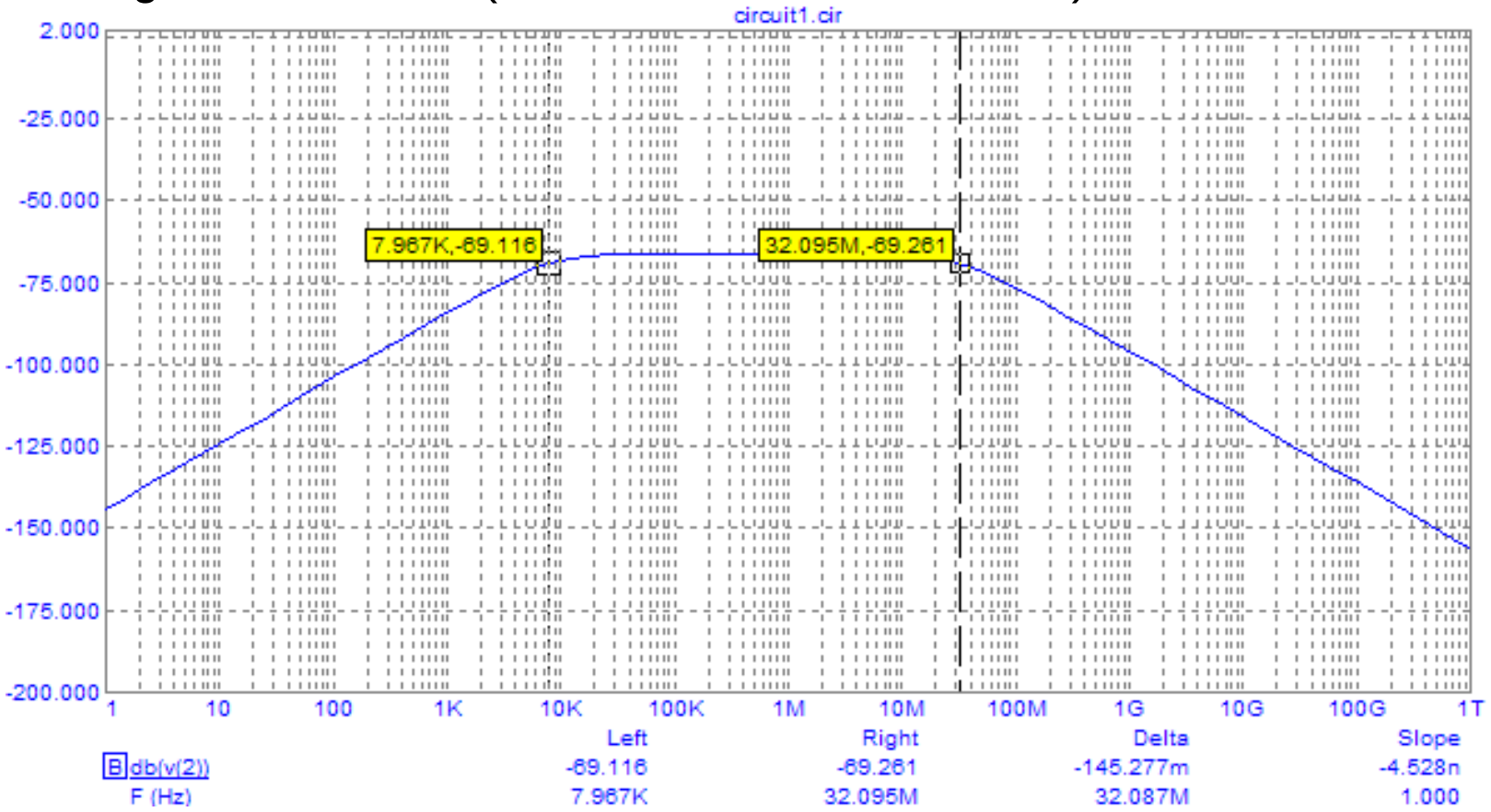
$$\left[\left(1+j\omega R_2C_2\right)\left(j\omega C_1+\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)-\frac{1}{R_2}\right]\dot{V}_{out}=j\omega C_1\dot{V}_{in}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\dot{V}_{out}}{\dot{V}_{in}}=\frac{j\omega R_1C_1}{\left(1+j\omega R_1C_1\right)\left(1+j\omega R_2C_2\right)-j\omega R_1C_2}$$

No es lo mismo! Encontrar polos y ceros!

5.2. Ejemplos:
Filtro pasa banda.

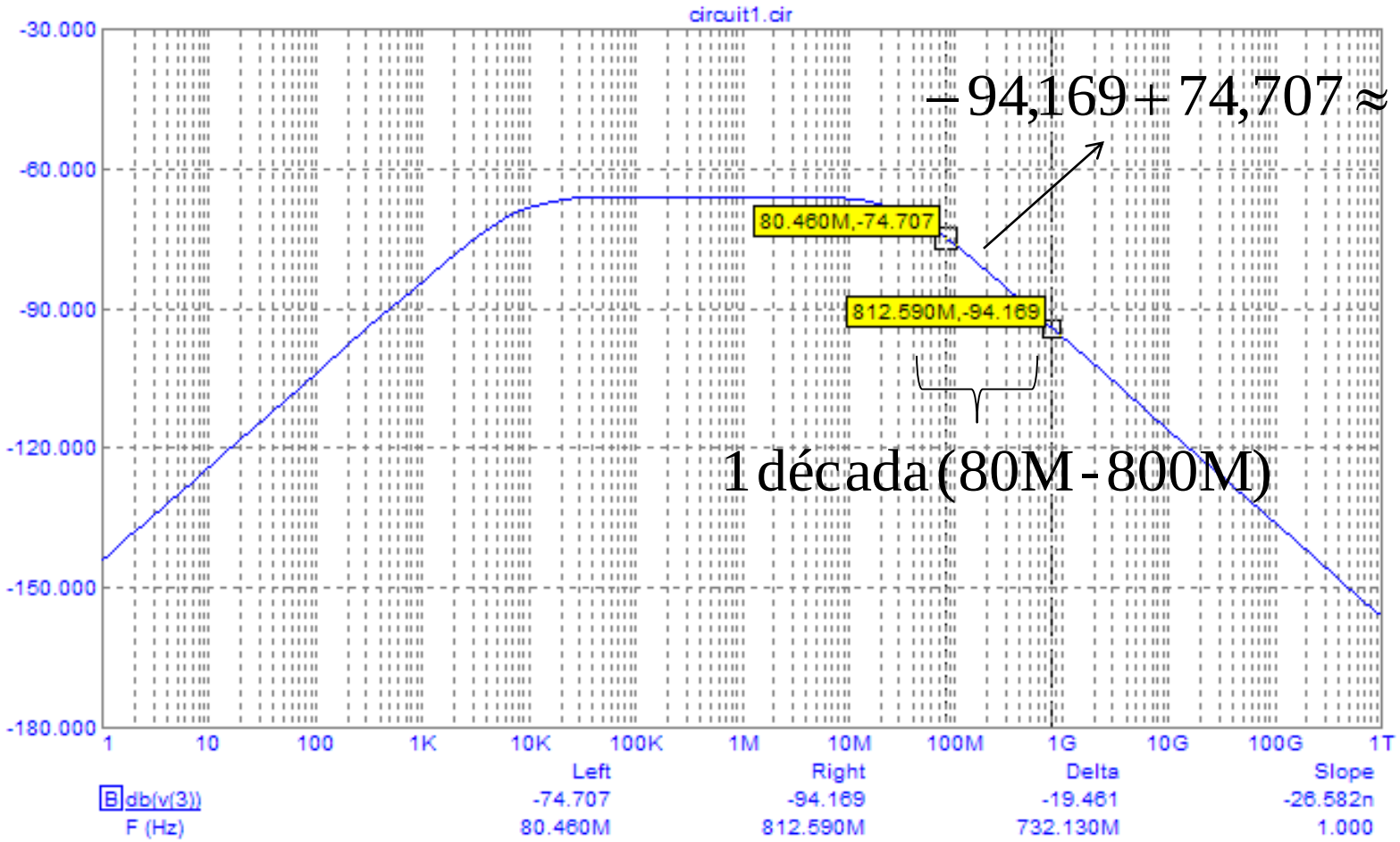
- Diagrama de Bode (mismos valores anteriores):



También corresponde a un filtro pasa banda (sólo cambian las frecuencias de corte por 7,9kHz y 32MHz aproximadamente).

5.2. Ejemplos:
Filtro pasa banda.

- Para corroborar:

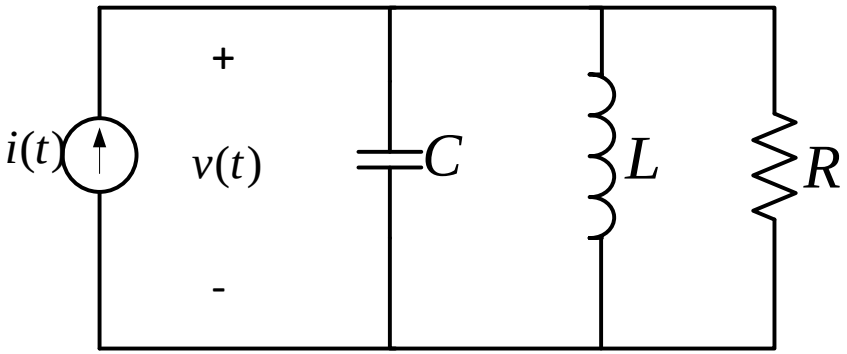


$$-94{,}169 + 74{,}707 \approx -20dB$$

6. Circuitos resonantes

- **Circuitos resonantes:**
  - Circuitos cuya **reactancia X** puede ser **capacitiva o inductiva** dependiendo de la frecuencia de la señal de entrada.
  - Consideremos los casos donde la impedancia tiene un mínimo o un máximo. Por que?

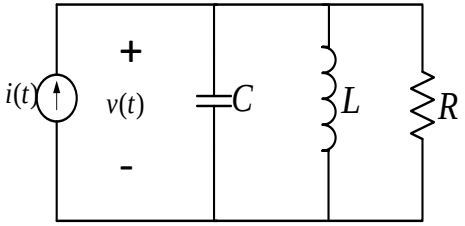
RLC //o:



$$Z_{eq} = \frac{1}{j\omega C} // \; j\omega L // R = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}} \angle -\tan^{-1}\left(R\left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right) \right)$$

6. Circuitos resonantes

$$Z_{eq} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}} \angle -\tan^{-1}\left(R\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)\right)$$



- **Frecuencia de resonancia:** frecuencia a la cual la **reactancia del circuito es nula** (ángulo nulo), en nuestro caso,

$$R\left(\omega_0 C - \frac{1}{\omega_0 L}\right) = 0 \rightarrow \boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

Notar que cuando $\omega=\omega_0$ la **impedancia es máxima**.

$$Z_{eq} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \cancelto{0}{\left(\omega_0 C - \frac{1}{\omega_0 L}\right)^2}}} \angle 0^o = R$$

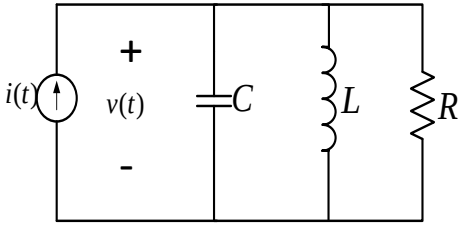
Hagamos el caso serie en la pizarra!

6. Circuitos resonantes

En general:

(RLC serie y paralelo)

$$Z = \frac{k}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$



Caso RLC Paralelo:

$$k = R \qquad Q = R\sqrt{\frac{C}{L}} \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Valor de Z cuando $\omega=\omega_0$

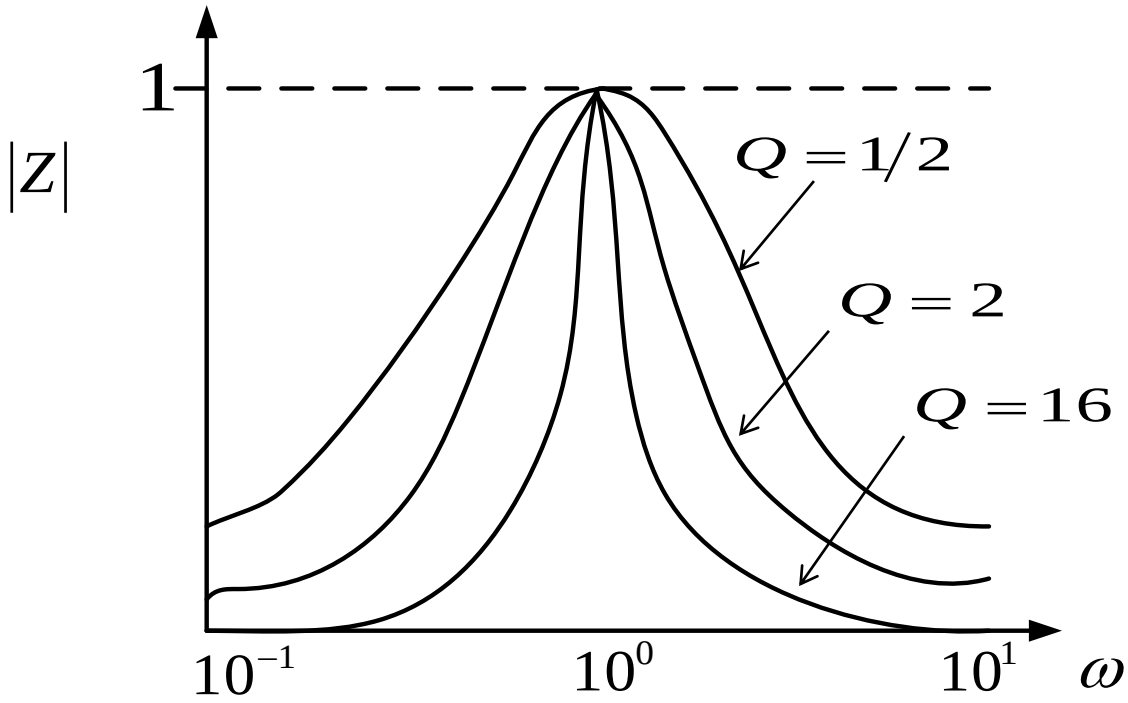
Factor de calidad

Frecuencia de resonancia

- **Factor de calidad(Q):** controla la rapidez a la que disminuye |Z| al alejarse de $\omega=\omega_0$.
- **Ancho de Banda=?**
- **Ver el caso Serie!**

6. Circuitos resonantes

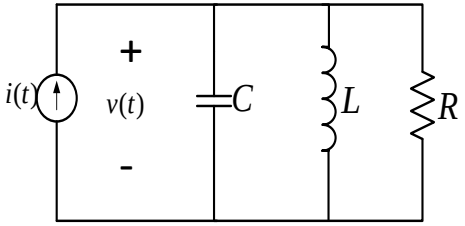
|Z| v/s ω con $k= \omega_0 =1$:



Los circuitos resonantes actúan como **filtros pasa banda estrecha**!!

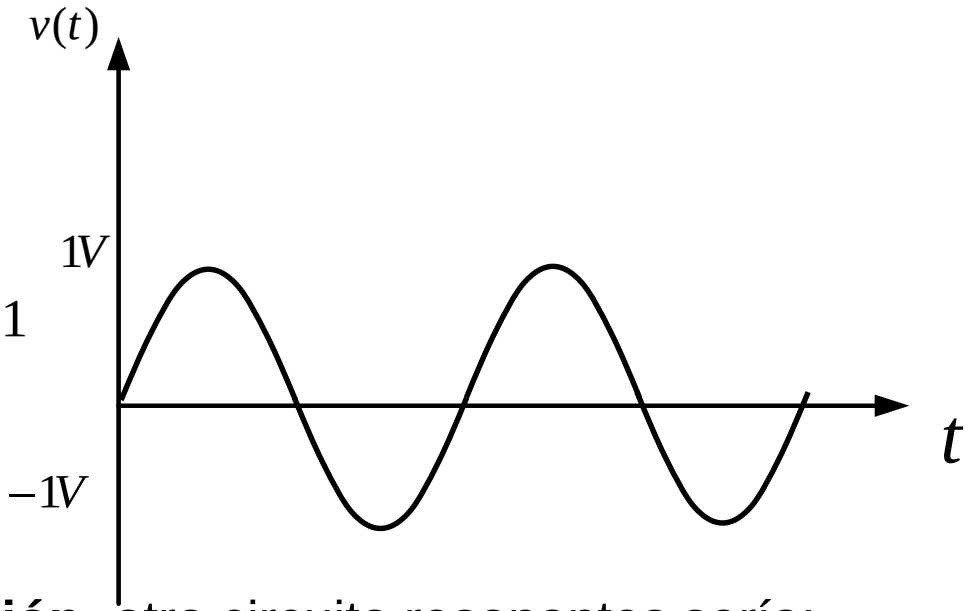
6. Circuitos resonantes

- **Dominio del tiempo:** ¿Qué pasa cuando $\omega=\omega_0$?

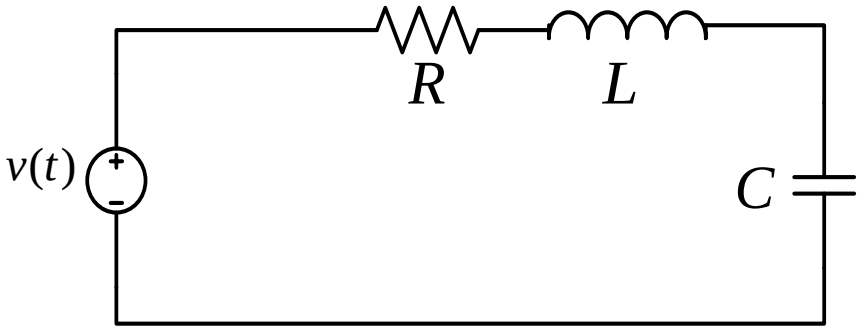


$$i(t) = sen(t)$$

$$\omega_0 = R = L = C = 1$$



- **Observación:** otro circuito resonantes sería:



Material complementario

Ver el mini tutorial "**Respuesta en Frecuencia.pdf**", de Angel Abusleme que se utiliza en IEE 2412 Electrónica. Es levemente mas avanzado que el alcance del curso.

En los libros e internet existe mucho material complementario disponible, por ejemplo:

Clases de Diagrama de Bode y Respuesta de Frecuencia

- Link EECS.UTK.edu (Ejemplo de dibujo de diagrama de bode aproximado)
- **Link ECE.Utah.edu (Ejemplo de Diagrama de Bode paso a paso - pdf)**
  - **http://www.ece.utah.edu/~ee3110/bodeplot.pdf**
- Link Berkeley (Ejemplo de Diagrama de Bode paso a paso)
- Link Calvin.edu (Estabilidad – Mucho mas avanzado)

- Estas referencias fueron utilizadas para mejorar la clase!