Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ingeniería Eléctrica
IEE2123 - Circuitos Eléctricos

Tarea 5

2º semestre 2022 - Profesor Samuel Cordova

Ayudante Miguel Espinoza - miguel.espinoza@uc.cl

Problema 1 (2 Puntos)

Considere el siguiente circuito eléctrico en régimen estacionario:

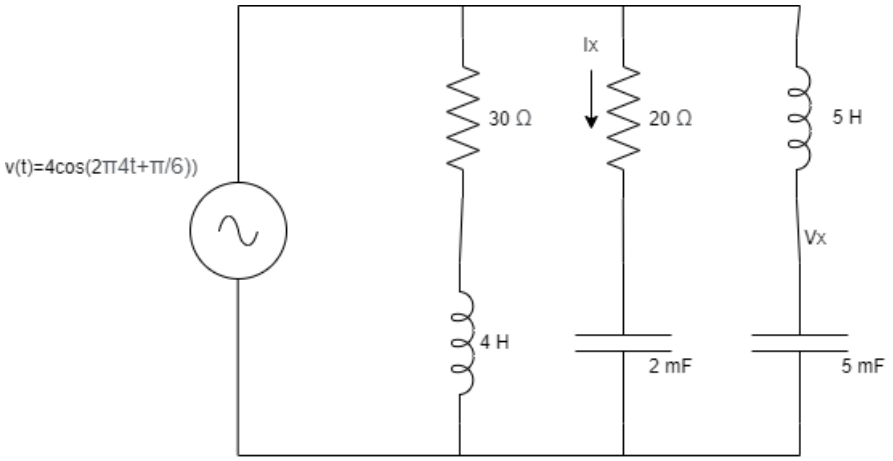


Figura 1: Circuito Problema 1

a) Determine la impedancia de entrada vista por la fuente de voltaje **(0.8 puntos)**.

b) Si la señal de entrada viene dada por $v(t) = 4\cos(2\pi 4 + \pi/6)\ V$, encuentre el fasor de corriente que pasa por la resistencia de 20 Ω **(0.8 puntos)**.

c) Mediante simulaciones en LTSpice, muestre la evolución temporal del voltaje V_x para entradas sinusoidales de amplitud 1 $[V]$ y frecuencias 0.1 Hz, 1 Hz y 50 Hz. ¿Qué está haciendo el circuito sobre ese nodo? **(0.4 puntos)**.

Solución Problema 1

Para el desarrollo del problema se considera el siguiente circuito:

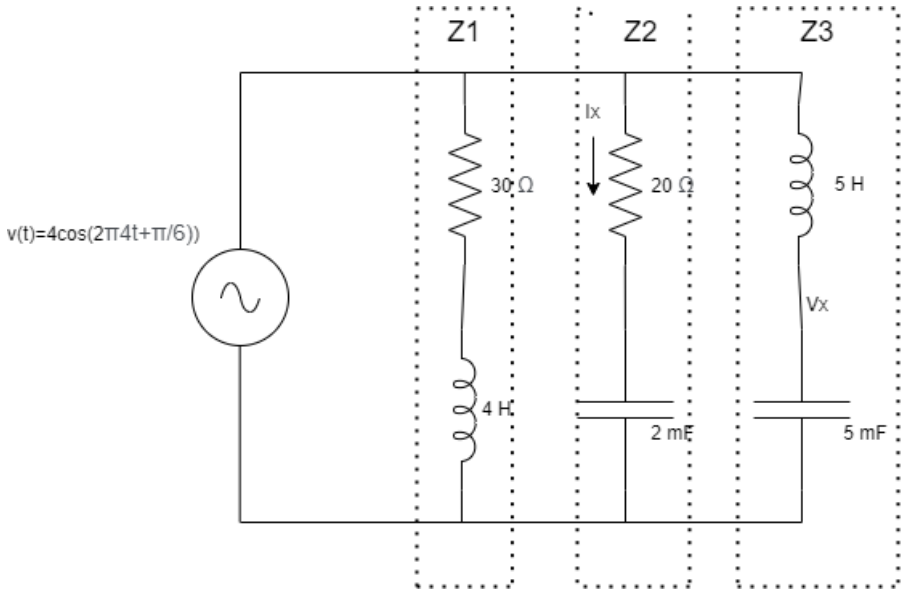


Figura 2: Circuito de referencia - Problema 1

Reconociendo conexiones serie y paralelo notamos que:

$$\begin{aligned} Z_{in} &= Z_1 || \ Z_2 \ || \ Z_3 \\ &= (30 + j2\pi 4 \cdot 4) || \left(20 - \frac{j}{2\pi 4 \cdot 2 \cdot 10^{-3}}\right) || \left(j2\pi 4 \cdot 5 - \frac{j}{2\pi 4 \cdot 5 \cdot 10^{-3}}\right) \\ &= (104{,}91 \angle 73{,}38^o) || (28{,}21 \angle -44{,}85^o) || (117{,}7 \angle 90^o) \ \Omega \\ &= 34{,}7 \angle -14{,}82^o \ \Omega \end{aligned}$$

La corriente que sale de la fuente viene dada por

$$\begin{aligned} I_{in} &= \frac{V}{Z_{in}} \\ &= \frac{4 \angle 30^o}{34{,}7 \angle -14{,}82^o} \\ &= 0{,}1153 \angle 44{,}82^o \ A \end{aligned}$$

donde la corriente I_x se puede calcular con el siguiente divisor de corriente:

$$\begin{aligned} I_x &= I_{in}\frac{Z_1||Z_3}{(Z_1||Z_2)+Z_2} \\ Z_1||Z_3 &= 56{,}055\angle 81{,}21^o\ \Omega \\ \frac{Z_1||Z_3}{(Z_1||Z_2)+Z_2} &= 1{,}23\angle 30{,}03^o\Omega \\ I_x &= (0{,}1153\angle 44{,}82^o)(1{,}32\angle 30{,}03^o)\ A \\ &= 0{,}142\angle 74{,}85^o A \end{aligned}$$

Para $f = 0{,}1Hz$ se obtiene:

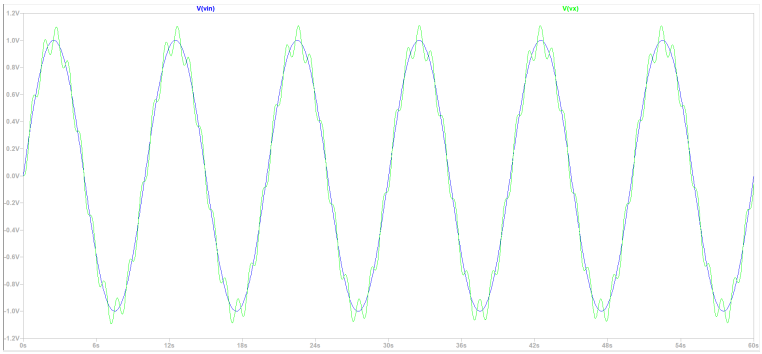


Figura 3: Caso $f = 0{,}1$ Hz

donde la salida mantiene la amplitud de la entrada, pero se encuentra moderadamente distorsionada.

Para $f = 1Hz$ se obtiene:

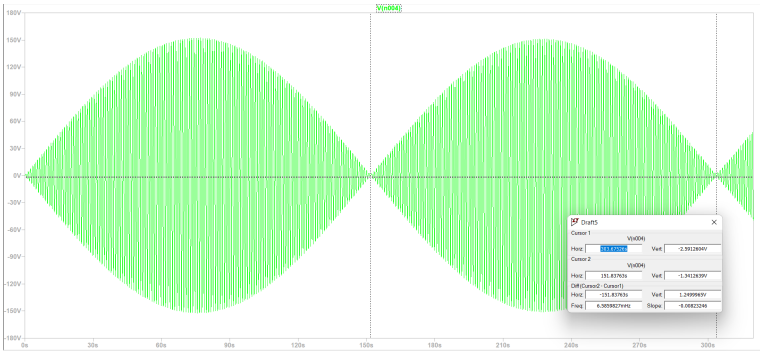


Figura 4: Caso $f = 1$ Hz

donde se aprecia un peak de resonancia.

Para $f = 50Hz$ se obtiene:

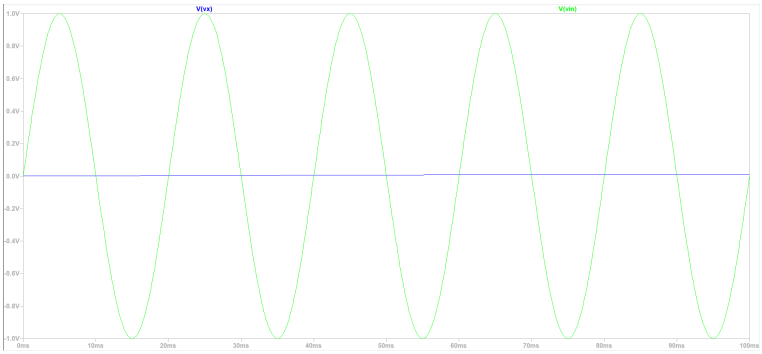


Figura 5: Caso $f = 50$ Hz

donde la señal se encuentra muy atenuada respecto a la entrada.

Problema 2 (2 Puntos)

Para el siguiente circuito en régimen permanente:

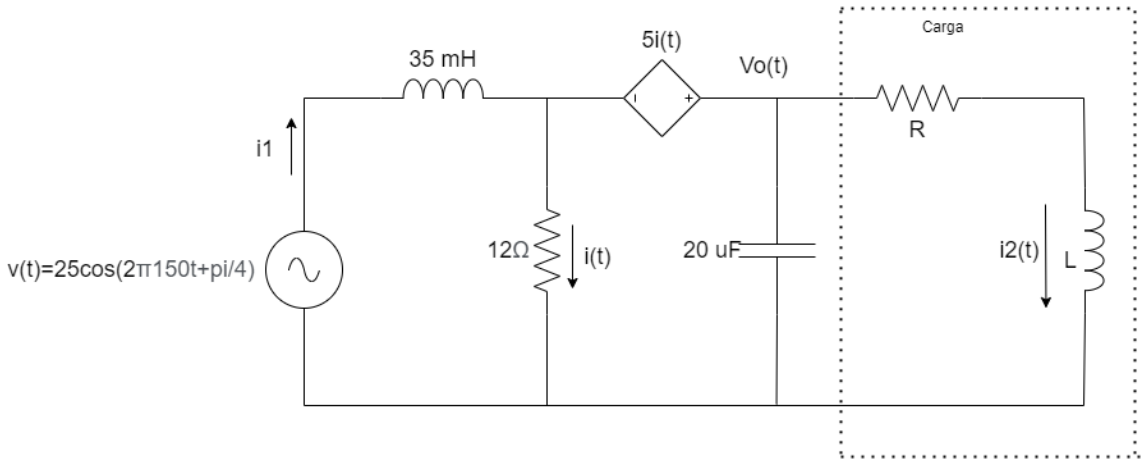


Figura 6: Circuito Problema 2

a) Determine la impedancia vista por la fuente de entrada (Z_{in}). Para esto considere una fuente de prueba V_{test} de frecuencia angular ω según la siguiente figura:

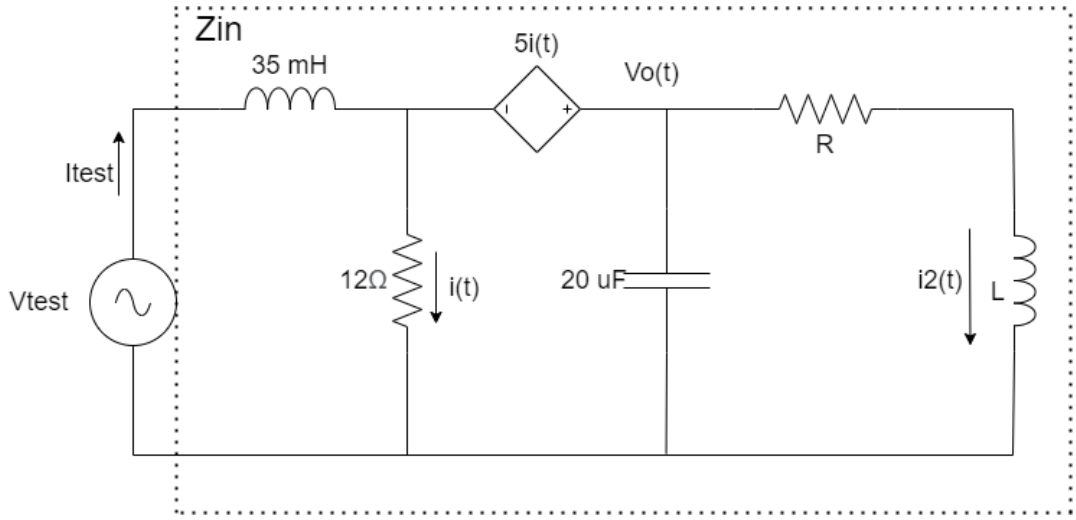


Figura 7: Impedancia de entrada

donde la impedancia de entrada corresponde a $Z_{in}(\omega) = \frac{V_{test}}{I_{test}}(\omega)$. ¿Qué ocurre si $\omega \to 0$ o $\omega \to \infty$? **(0.4 puntos)**.

b) Calcule las corrientes i_1 e i_2 en forma fasorial **(0.4 puntos)**.

c) Determine V_o en forma fasorial **(0.2 puntos)**.

d) Encuentre el equivalente de Thévenin visto por los terminales de la carga **(0.4 puntos)**.

e) Determine los valores de R y L que maximizan la transferencia de potencia hacia la carga. ¿Cuál es el factor de potencia de la carga? **(0.2 puntos)**.

f) ¿Qué ocurre con el factor de potencia si se varía el L óptimo entre $0{,}9L$ y $1{,}1L$? Comente los resultados **(0.1 puntos)**.

g) Determine la potencia promedio entregada a la carga. **Hint:** Recuerde que la potencia promedio sobre una carga Z_L sometida a un voltaje V_L y corriente I_L (ambos en forma fasorial y en valor RMS) está dado por $P_{avg} = \Re(V_L \cdot I_L^*)$ **(0.2 puntos)**.

h) Valide sus resultados con simulaciones en LTSpice para los ítems c) y f) **(0.1 puntos)**.

Solución Problema 2

Las ecuaciones planteadas en todos los ítems consideran el siguiente circuito equivalente:

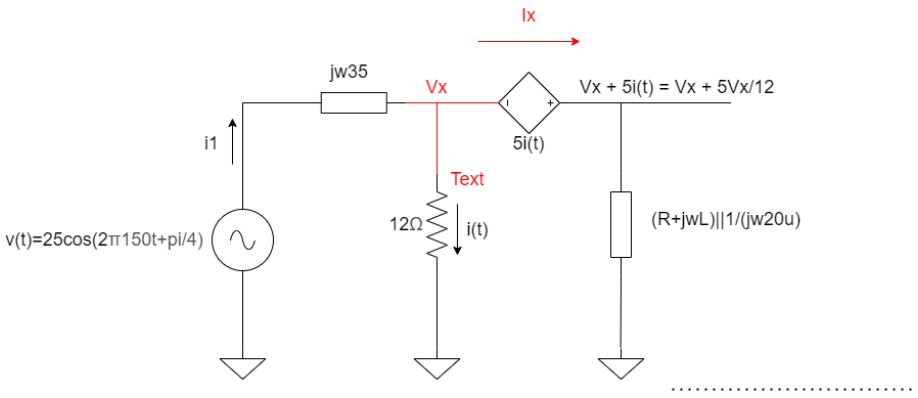


Figura 8: Circuito de referencia - Problema 2

Consideremos el nodo asociado al terminal negativo de la fuente dependiente de voltaje. En este nodo hay un potencial V_x y por balance de corrientes más un poco de álgebra se deducen las siguientes ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
i &= \frac{V_x}{12} \\
I_T &= \frac{V_x}{12} + \frac{V_x + 5i}{(R + j\omega L)||\frac{1}{j\omega 20\mu}} \\
I_T &= V_x \left(\frac{((R + j\omega L)||\frac{1}{j\omega 20\mu}) + 17}{12((R + j\omega L)||\frac{1}{j\omega 20\mu})} \right) \\
V_x &= I_T \left(\frac{12((R + j\omega L)||\frac{1}{j\omega 20\mu})}{((R + j\omega L)||\frac{1}{j\omega 20\mu}) + 17} \right) \\
I_T &= \frac{V_T - V_x}{j\omega 35 \cdot 10^{-3}} \\
V_T &= I_T \left(\frac{12((R + j\omega L)||\frac{1}{j\omega 20\mu}) + j\omega 35 \cdot 10^{-3}[((R + j\omega L)||\frac{1}{j\omega 20\mu}) + 17]}{((R + j\omega L)||\frac{1}{j\omega 20\mu}) + 17} \right) \\
Z_{in}(\omega) &= \left(\frac{12((R + j\omega L)||\frac{1}{j\omega 20\mu}) + j\omega 35 \cdot 10^{-3}[((R + j\omega L)||\frac{1}{j\omega 20\mu}) + 17]}{((R + j\omega L)||\frac{1}{j\omega 20\mu}) + 17} \right)
\end{aligned}
$$

Luego, por inspección notamos que $Z_{in}(\omega \to \infty) = \infty$ y $Z_{in}(\omega \to 0) = \frac{12R}{R+17}$. La corriente i_1 queda como

$$
\begin{aligned}
i_1 = \frac{V}{Z_{in}} &= \frac{25\angle 45^o}{|Z_{in}|\angle \arctan(\frac{\Im(Z_{in})}{\Re(Z_{in})})} \\
&= \frac{5}{|Z_{in}|}\angle \left(45^o - \arctan(\frac{\Im(Z_{in})}{\Re(Z_{in})} \right)
\end{aligned}
$$

Ahora, si se conociera la corriente que pasa por la fuente de voltaje dependiente (que llamaremos I_x) podríamos calcular i_2 a partir de un divisor de corriente. Luego, aplicando balance de corriente sobre el mismo nodo que el de la parte a) se llega a:

$$\begin{aligned} I_x &= i_1 - \frac{V_x}{12} \\ V_x &= i_1 \left(\frac{12((R+j\omega L)||\frac{1}{j\omega 20\mu})}{((R+j\omega L)||\frac{1}{j\omega 20\mu})+17} \right) \\ I_x &= i_1 \left(\frac{17}{((R+j\omega L)||\frac{1}{j\omega 20\mu})+17} \right) \\ i_2 &= I_x \left(\frac{\frac{1}{j\omega 20\mu}}{(R+j\omega L)+\frac{1}{j\omega 20\mu}} \right) \end{aligned}$$

$$i_2 = \frac{25\angle 45^o}{|Z_{in}|\angle \arctan(\frac{\Im(Z_{in})}{\Re(Z_{in})})} \left(\frac{17}{((R+j\omega L)||\frac{1}{j\omega 20\mu})+17} \right) \left(\frac{\frac{1}{j\omega 20\mu}}{(R+j\omega L)+\frac{1}{j\omega 20\mu}} \right)$$

De lo anterior,

$$V_o = i_2(R+j\omega L)$$

En este caso no se considera la carga. Luego, aplicando balance de corrientes en el mismo nodo que en los casos anteriores:

$$\begin{aligned} \frac{V-V_x}{j2\pi 150 \cdot 35 \cdot 10^{-3}} &= \frac{V_x}{12} + \frac{\frac{17}{12}V_x}{\frac{1}{j2\pi 150 \cdot 20\mu}} \\ V_x &= 1{,}817\angle -42{,}52^o \\ V_{th} &= V_x + \frac{5Vx}{12} = 12{,}87\angle -42{,}52^o \ V \end{aligned}$$

La impedancia vista por la carga se determina con una fuente de prueba, donde

$$\begin{aligned} V_{test} &= \frac{17}{12}V_x \\ \frac{V_x}{12||j2\pi 150 \cdot 35 \cdot 10^{-3}} + \frac{V_{test}}{\frac{1}{j2\pi 150 \cdot 20\mu}} &= I_{test} \\ Z_{th} &= \frac{V_{test}}{I_{test}} = 16{,}97 + j0{,}738\Omega \end{aligned}$$

La impedancia vista por la carga es inductiva, por lo que el inductor L no podrá alcanzar $-j0{,}738$ en el caso óptimo. Por lo tanto, se elige un L que sea lo más cercano a dicho valor, lo que ocurre en $L = 0H$. Además, la parte real se asocia al resistor, por lo que $R = 16{,}97\Omega$. Luego, el factor de potencia es unitario. Como la carga no es

inductiva, el factor de potencia se mantendrá unitario. Reemplazando en la ecuación para i_2 tendremos:

$$
\begin{aligned}
P_L &= \frac{1}{2}|i_2|^2 R \\
Z_i n &= 32{,}58\angle 79{,}68^o \Omega \\
i_2 &= \left(\frac{25\angle 45^o}{32{,}58\angle 79{,}68^o}\right)(0{,}519\angle 8{,}64^o)(0{,}952\angle -17{,}74^o) = 0{,}3791\angle -43{,}78^o \ A \\
P_L &= 1{,}22 \ W
\end{aligned}
$$

Problema 3 (2 Puntos)

Considere el siguiente circuito en régimen estacionario:

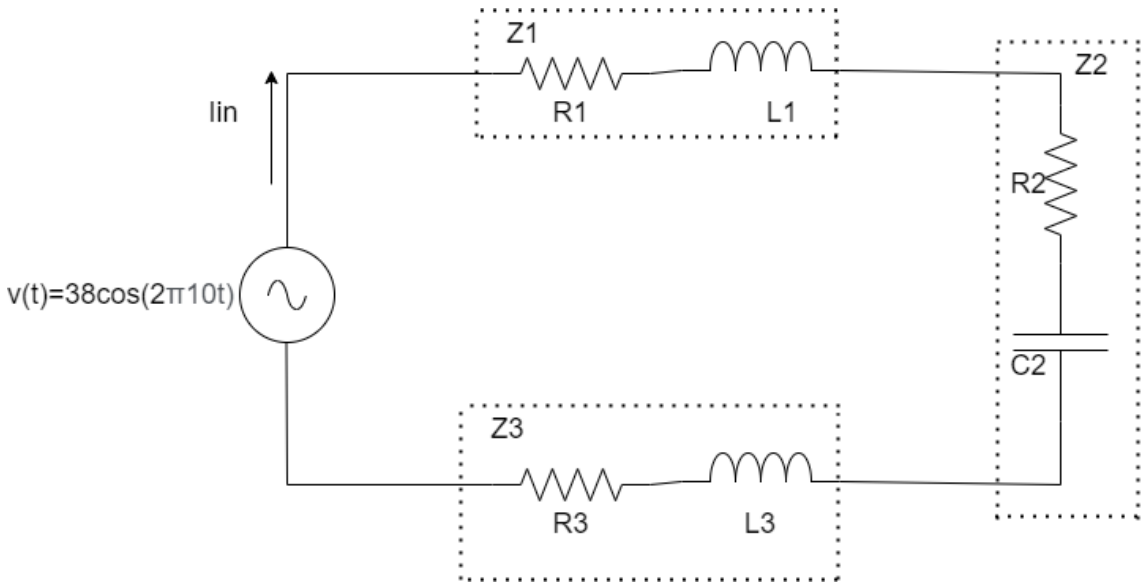


Figura 9: Circuito Problema 3

donde $I_{in} = 1{,}076\angle -8{,}3\ A$ es la corriente que sale de la fuente de voltaje y su magnitud está en valor RMS.

a) Determine la potencia compleja alimentada por la fuente de voltaje **(0.3 puntos)**.

b) Si la potencia compleja recibida por Z_1 es $6{,}945 + j13{,}89\ VA$, determine los valores de R_1 y L_1 **(0.4 puntos)**.

c) Si la potencia real recibida por Z_3 es igual a 4.63 W y presenta un factor de potencia igual a 0.56 de retardo, determine los valores de R_3 y L_3 **(0.4 puntos)**.

d) Determine los valores de C_2 y R_2 que permiten satisfacer todo lo anterior. ¿Cuál es su factor de potencia? **(0.4 puntos)**

Posterior a esto, se le pide que modifique el circuito anterior para asegurar que la impedancia de entrada sea igual a 30Ω para una señal DC ($\omega = 0$). Además, se pide que la impedancia de entrada sea igual a 100Ω para entradas de muy alta frecuencia ($Z_{in}(\omega \to \infty)$). Usted propone el siguiente esquemático:

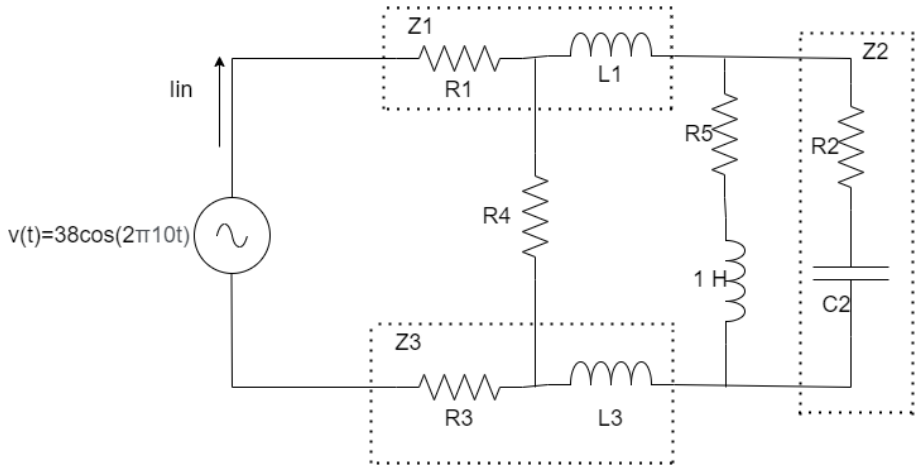


Figura 10: Circuito Problema 3 - Parte 2

e) Determine los valores de R_4 y R_5 que cumplen con lo pedido **(0.4 puntos)**.

f) Determine el nuevo factor de potencia sobre Z_2 y compárelo con el valor inicial **(0.1 puntos)**.

Solución Problema 3

a) El voltaje de la entrada en valor RMS queda como:

$$V_{in} = \frac{38}{\sqrt{2}}\angle 0^o\ V \qquad = 26{,}87\angle 0^o\ V$$

Luego, la potencia compleja es

$$\begin{aligned} S &= 28{,}91\angle 8{,}3^o\ VA \\ &= 28{,}607\ W + j4{,}173\ VA \end{aligned}$$

b) Con los datos del enunciados sabemos que

$$\begin{aligned} S_{Z_1} &= |I_{in}|^2 Z_1 = (6{,}945 + j13{,}89)VA \\ Z_1 &= R_1 + j2\pi f L_1 \\ 1{,}076^2(R_1 + j20\pi L_1) &= (6{,}945 + j13{,}89)VA \\ R_1 &= 5{,}998 \approx 6\ \Omega \\ L_1 &= 190{,}94\ mH \end{aligned}$$

c) Sabemos que $P_{Z_3} = 4{,}63\ W$ y $fp = 0{,}56$ de retardo. Luego,

$$\begin{aligned} S_{Z_3} &= P + j\frac{P}{f.p}\sqrt{1 - fp^2} = 4{,}63 + j6{,}85VA \\ Z_3 &= R_3 + j2\pi f L_3 \\ 1{,}076^2(R_3 + j20\pi L_3) &= (4{,}63 + j6{,}85)VA \\ R_3 &\approx 4\ \Omega \\ L_3 &= 94{,}16\ mH \end{aligned}$$

d) Por conservación de energía,

$$\begin{aligned} S_{Z_2} &= S - S_{Z_1} - S_{Z_2} = (17{,}032 - j16{,}567)VA \\ |I_{in}|^2(R_2 - j\frac{1}{2\pi f C_2}) &= (17{,}032 - j16{,}567)VA \\ R2 &= 14{,}71\ \Omega \\ C_2 &= 1{,}11\ mF \end{aligned}$$

donde el factor de potencia es $fp_2 = \cos(\arctan(\frac{-16{,}567}{17{,}032})) = 0{,}717$ en adelanto.

e) Si $\omega \to \infty$, el circuito consiste en los resistores R_1, R_4 y R_3 en serie. Luego,

$$\begin{aligned} 100\Omega &= R_1 + R_3 + R_4 \\ R_4 &= [100 - (6 + 4)]\Omega = 90\ \omega \end{aligned}$$

Si $\omega \to 0$, se tiene $R_4||R_5$ en serie con R_1 y R_3:

$$\begin{aligned} 30 = &\ R_1 + R_4||R_5 + R_3 \\ 20 = &\ \frac{90R_5}{90 + R_5} \\ 1800 + 20R_5 = &\ 90R_5 \\ R_5 = &\ \frac{1800}{70}\Omega = \ 25{,}7\Omega \end{aligned}$$

f) El factor de potencia será siempre 0.717 en adelante porque se trata de la misma carga.