Mini Tutorial: Respuesta en Frecuencia

Angel Abusleme Hoffman – IEE2412

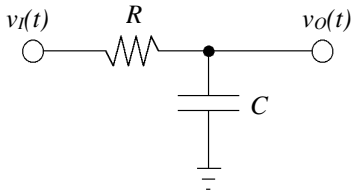
Resumen—Este documento representa una guía para el estudio de la respuesta en frecuencia de un sistema, con especial énfasis en la obtención del diagrama de Bode para un circuito. En primer lugar se hace una breve introducción al análisis de sistemas en el dominio de Laplace. Luego se analiza el concepto de respuesta en frecuencia, considerando las diferentes representaciones existentes. Posteriormente se analizan en mayor profundidad los diagramas de Bode, enfocando el análisis en un método para su determinación. Finalmente, se aplica dicho método en un ejemplo.

1. Análisis de Sistemas

Cualquier sistema dinámico (e.g. un proceso químico, un péndulo invertido o un circuito electrónico de orden N) puede ser caracterizado mediante su función de transferencia, que relaciona la variable de salida en función de la variable de entrada, lo anterior en el dominio de Laplace:

$$\frac{V_O(s)}{V_I(s)} = G(s) \qquad s = \sigma + j\omega$$

En este caso, $V_O(s)$ es la variable de salida y $V_I(s)$ es la variable de entrada. $G(s)$ es la función de transferencia, que puede ser determinada a partir de la ecuación diferencial que modela al circuito, llevada al dominio de Laplace y suponiendo condiciones iniciales cero, según el ejemplo:



$$\frac{V_O(s)}{V_I(s)} = \frac{z_C}{z_R + z_C} = \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{1}{RCs + 1}$$

$$\frac{V_O(s)}{V_I(s)} = G(s) = \frac{1}{RCs + 1}$$

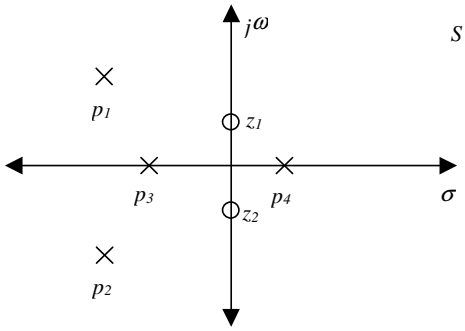
En el caso de un sistema de varias etapas en cascada, la función de transferencia del sistema completo es el producto de las funciones de transferencia de las etapas individuales, considerando sus respectivas atenuaciones debido a impedancias de entrada y salida.

Es bueno recordar además que la función de transferencia (FT) en general se expresa como un cuociente entre dos polinomios de *s*; las raíces del numerador son los ceros de la FT, y las raíces del denominador (la ecuación característica) son los polos de la FT:

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \rightarrow \begin{cases} N(s) = 0 \Rightarrow \text{ceros del sistema} \\ D(s) = 0 \Rightarrow \text{polos del sistema} \end{cases}$$

Para sistemas físicos realizables, el número de polos (P) debe ser mayor o igual que el número de ceros (Z). El número de polos define el orden del sistema.

Los polos y los ceros son en general números complejos, que pueden ser ubicados en el plano S:



Un análisis de la ubicación de los polos y ceros de un sistema permite determinar algunas características de su comportamiento. Por ejemplo, polos complejos conjugados (p_1, p_2) implican respuestas oscilatorias ante entradas en escalón; polos con parte real positiva (p_4) implican respuestas inestables en el tiempo; un análisis similar puede hacerse para entradas sinusoidales, o con cualquier forma de onda. En síntesis, el estudio de la ubicación de los polos y ceros de un sistema permite determinar tanto su comportamiento transiente (comportamiento que desaparece luego de un cierto período de tiempo, por ejemplo, la carga de un capacitor) como en régimen estacionario (que se mantiene hasta t=∞), y que es particularmente relevante cuando la entrada es sinusoidal.

En general, todas las señales pueden ser representadas como una suma de sinusoides, por lo que el estudio de la respuesta de un sistema a este tipo de entradas es de particular interés. El análisis acerca de cómo responde un sistema ante diferentes frecuencias de entrada se denomina respuesta en frecuencia de un sistema.

2. Respuesta en Frecuencia

La respuesta en frecuencia de un sistema se caracteriza por la ganancia y el cambio de fase que produce el sistema en su salida para un rango de frecuencias de la señal de entrada. Su estudio permite comprender la estabilidad del sistema y su respuesta ante diferentes excitaciones. Es un caso

particular de la representación en el dominio de Laplace, donde se considera que los transientes han desaparecido luego de un cierto período de tiempo (σ=0); por lo tanto, reemplazando $s=j\omega$ en la FT, donde ω es la frecuencia, se obtiene la función de transferencia del sistema para el dominio de la frecuencia. En este caso, la FT se puede representar como una magnitud y una fase en función de la frecuencia, o bien, en coordenadas cartesianas. La equivalencia entre ambas representaciones es evidente:

$$G(s)\big|_{s=j\omega} = G(j\omega) = R(\omega) + jX(\omega) = |G(j\omega)|\angle\phi(\omega)$$

$$|G(j\omega)| = \sqrt{R^2(\omega) + X^2(\omega)}$$

$$\phi(\omega) = \text{arctg}\left(\frac{X(\omega)}{R(\omega)}\right)$$

Para una señal sinusoidal dada, es posible determinar la respuesta de un sistema reemplazando la frecuencia respectiva en la función de transferencia:

$$G(s) = \frac{1}{RCs+1} \Rightarrow G(j\omega) = \frac{1}{j\omega RC+1}$$

$$|G(j\omega)|_{\omega=\omega_0} = \left.\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2R^2C^2}}\right|_{\omega=\omega_0} = |G(j\omega_0)|$$

$$\phi(\omega)\big|_{\omega=\omega_0} = \text{arctg}(-\omega RC)\big|_{\omega=\omega_0} = \phi(\omega_0)$$

$$v_I(t) = A\,\text{sen}(\omega_0 t) \Rightarrow v_O(t) = |G(j\omega_0)|v_I(t)\angle\phi(\omega_0)$$

Por lo tanto, es de especial interés conocer el valor de $|G(j\omega)|$ y $\phi(\omega)$ para diferentes valores de frecuencia. Existen diferentes representaciones gráficas de ambas magnitudes: los gráficos polares o de Nyquist, donde se grafica $G(j\omega)$ como un vector de magnitud $|G(j\omega)|$ y ángulo $\phi(\omega)$; los diagramas de Nichols, especialmente útiles en determinar la estabilidad de un sistema en su forma más general, donde se grafican la magnitud y la fase en ejes perpendiculares; y los gráficos de Bode, que son los más usados para representar la respuesta en frecuencia de un circuito, en los cuales se grafican la amplitud (en decibeles) y la fase (en grados) en función de la frecuencia.

Es muy sencillo obtener un gráfico de Bode aproximado a partir de la función de transferencia de un sistema. En este caso, si la frecuencia se grafica en escala logarítmica, el diagrama de Bode se puede aproximar a sus asíntotas de una forma muy directa, que será estudiada a continuación.

3. Obtención del Diagrama de Bode a partir de la Función de Transferencia

Toda función de transferencia puede ser expresada como un producto entre una ganancia constante y la contribución de sus polos y sus ceros:

$$G(s) = K\frac{(1-s/z_1)(1-s/z_2)...(1-s/z_Z)}{(1-s/p_1)(1-s/p_2)...(1-s/p_P)}$$

En este caso, el diagrama de Bode se puede determinar según la contribución de cada factor individual a la amplitud y la fase. Debido a que los gráficos de Bode expresan la amplitud en decibeles y la fase en grados, es posible determinar el diagrama de Bode para una función de transferencia complicada como la suma de los diagramas de Bode individuales, tanto en amplitud como en fase, para cada polo y cada cero:

$$20\log\left(|G_1(j\omega)|\cdot|G_2(j\omega)|\cdot....\cdot|G_n(j\omega)|\right) = 20\log\left(|G_1(j\omega)|\right) + \\ + 20\log\left(|G_2(j\omega)|\right) + ... + 20\log\left(|G_n(j\omega)|\right)$$

$$\angle\left(G_1(j\omega)\cdot G_2(j\omega)\cdot....\cdot G_n(j\omega)\right) = \angle\left(G_1(j\omega)\right) + \\ + \angle\left(G_2(j\omega)\right) + ... + \angle\left(G_n(j\omega)\right)$$

Por lo tanto, si se determina la respuesta característica de cada polo y cada cero, es posible luego obtener el diagrama de Bode como la suma de los diagramas de Bode individuales. Afortunadamente, cualquier función de transferencia puede descomponerse en cuatro tipos de factores: ganancia constante, polos o ceros en el origen, polos o ceros reales y polos o ceros complejos conjugados (segundo orden). Por lo tanto, estudiando estos cuatro casos es posible conocer el comportamiento en frecuencia de cualquier sistema. A continuación se analiza cada uno de ellos, tanto en amplitud como en fase.

a) Ganancia Constante K

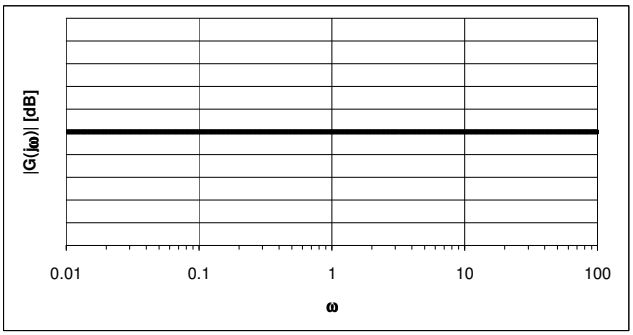
Todo sistema lleva una ganancia constante *K*. Dicha ganancia aporta una amplitud de

$$|G(j\omega)|\,[\text{dB}] = 20\log(K)\,[\text{dB}]$$

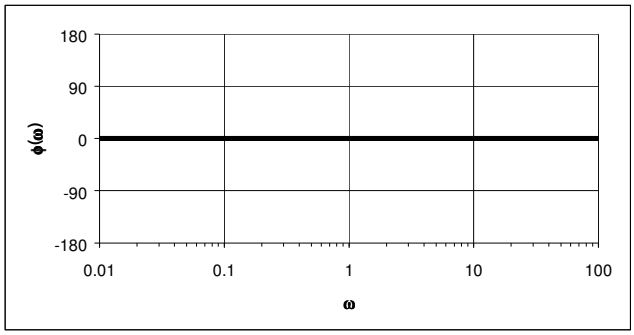
y una fase de

$$\phi(\omega) = \angle\left(G(j\omega)\right) = \text{arctg}\left(\frac{X(\omega)}{R(\omega)}\right) = 0^\circ$$

Por lo tanto, el diagrama de Bode para una función estática de ganancia *K* es el siguiente:



Amplitud [dB]



Fase (º)

b) Polos o Ceros en el Origen

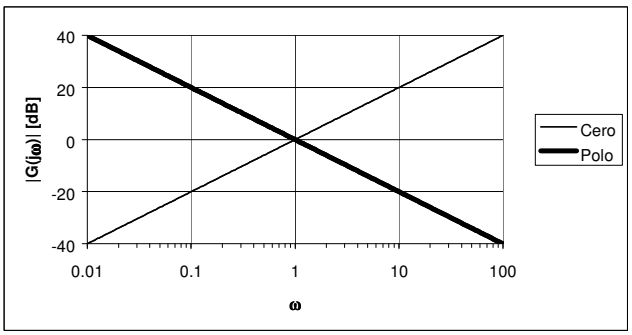
Los polos o ceros en el origen pueden ser representados matemáticamente por la siguiente FT:

$$G_P(j\omega) = \frac{1}{j\omega} \qquad G_Z(j\omega) = j\omega$$

Cuando un cero o un polo está ubicado en el origen, genera una amplitud dada por:

$$|G(j\omega)|\,[\text{dB}] = \pm 20\log(\omega)$$

Dicha amplitud puede ser graficada en función de la frecuencia, lo cual se traduce en una curva difícil de trazar en forma manual. Sin embargo, si la frecuencia se expresa en escala logarítmica, dicha curva se grafica como una línea recta, creciente para el caso de un cero, y decreciente para el caso de un polo:



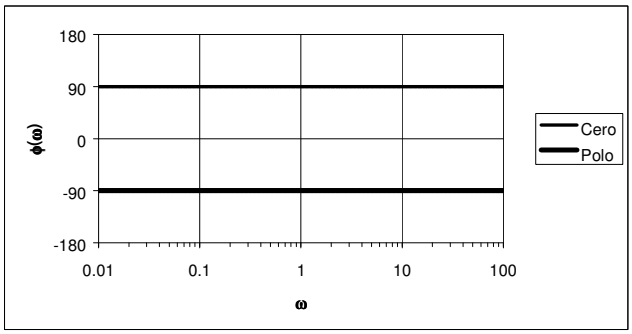
Amplitud [dB] para raíces en el origen

La línea presenta ganancia unitaria (0dB) en ω=1; puede demostrarse fácilmente que la magnitud aumenta (en el caso del cero) o decae (en el caso del polo) a razón de 20 dB cada vez que la frecuencia aumenta en 10 veces. Ese intervalo de frecuencias, para el cual la frecuencia mayor es 10 veces mayor que la menor, se denomina década (déc). Por lo tanto, se dice que la ganancia o atenuación de un cero o polo en el origen es de 20 dB/déc. En general, se ha adoptado la costumbre de graficar los diagramas de Bode presentando la frecuencia en escala logarítmica, debido a que tiende a simplificar su confección.

La fase puede ser calculada fácilmente:

$$\phi(\omega) = \pm \text{arctg}(\infty) = \pm 90^\text{o},$$

positiva para el caso de un cero en el origen (s=0), y negativa para el caso de un polo en el origen, independientes de la frecuencia.



Fase (º) para raíces en el origen

c) Polos o Ceros Reales

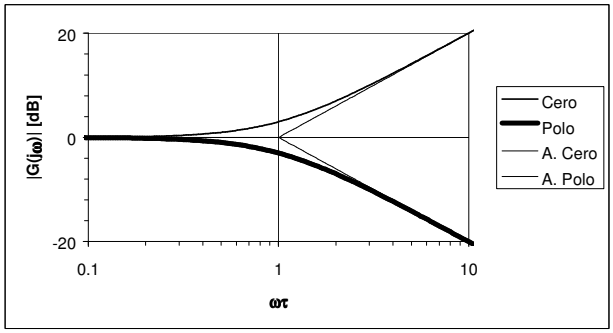
Las FT que caracterizan este tipo de dinámica pueden ser expresadas en el dominio de la frecuencia como:

$$G_P(j\omega) = \frac{1}{j\omega\tau + 1} \qquad G_Z(j\omega) = j\omega\tau + 1$$

Este caso presenta un diagrama de Bode que puede ser aproximado a sus asíntotas, tanto en amplitud como en fase. En el caso de su amplitud, podemos analizar tres situaciones de interés: $\omega\tau<<1$, $\omega\tau>>1$ y $\omega\tau=1$.

- $\omega\tau<<1$: En este caso, se puede demostrar que la amplitud se aproxima a 0dB.
- $\omega\tau>>1$: Si se calcula la amplitud, se puede despreciar el término unitario y la curva se aproxima a una asíntota que crece (decrece en el caso de los polos) a razón de 20 dB/déc.
- $\omega\tau=1$: Este punto es de gran interés, debido a que la curva descrita por el diagrama de Bode se aleja de las asíntotas en 3dB. En el caso del polo, se encuentra a –3dB por debajo de la cota de amplitud cero, y en el caso del cero, +3dB por sobre dicha amplitud. En ambos casos, nos encontramos en la frecuencia de corte del circuito.

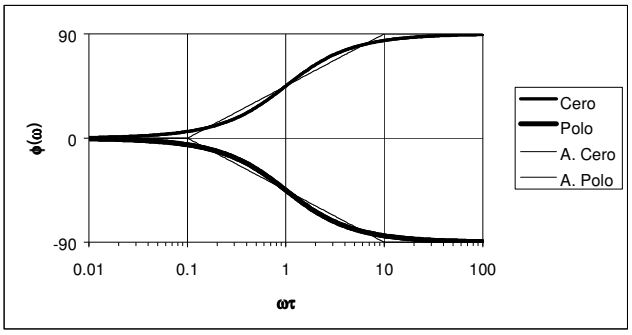
Tanto la curva exacta como sus asíntotas se presentan en la siguiente figura:



Amplitud [dB] para raíces reales

La fase también puede ser aproximada a un conjunto de asíntotas, según se expone a continuación:

- $\omega\tau<0.1$: La fase tiene un valor de 0º.
- $\omega\tau>10$: La fase se aproxima a 90º para los ceros, y –90º para los polos.
- $0.1<\omega\tau<10$: La fase puede aproximarse a una recta que une las dos asíntotas anteriores. El máximo error es del orden de 5.7º; a la frecuencia de corte, la fase tiene un valor de 45º para los ceros y –45º para los polos.



Fase (º) para raíces reales

En el análisis anterior se ha considerado que los polos y ceros se ubican en el semiplano izquierdo del plano S. En caso de no cumplirse lo anterior, los ángulos de fase para los polos y ceros en el semiplano derecho del plano S se calculan analíticamente.

d) Polos o Ceros Complejos Conjugados

Las FT para sistemas de segundo orden pueden ser llevadas a la siguiente forma normalizada:

$$G(j\omega)=\left[1+2\left(\frac{\rho}{\omega_n}\right)j\omega+\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2\right] \qquad \text{sea } u=\frac{\omega}{\omega_n}$$

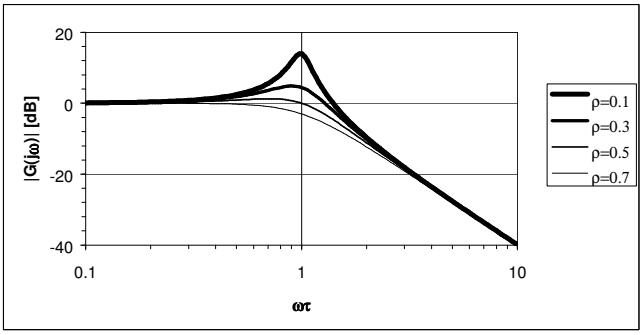
$$\Rightarrow G(j\omega)=1+2j\rho u-u^2$$

donde ω_n es la frecuencia natural de las raíces, y ρ es el factor de amortiguamiento. En el caso de tener polos complejos conjugados, la expresión anterior constituye el denominador de la FT.

Haciendo un análisis en frecuencia, tanto para amplitud como para fase, es posible llegar a diferentes aproximaciones (asíntotas). En el caso de la amplitud, se observan tres rangos de frecuencia bien diferenciados:

- $u<<1$: En este caso, la amplitud se aproxima a 0dB.
- $u>>1$: Si se calcula la amplitud, eliminando los términos despreciables, la curva se aproxima a una asíntota que crece (decrece en el caso de los polos) a razón de 40 dB/déc, el doble de pendiente que en el caso de un sistema de primer orden.
- $u=1$: Este caso es diferente al de primer orden, debido a que la curva descrita en frecuencia presenta una amplitud que depende del factor de amortiguamiento ρ. Mientras mayor es el valor de ρ, más amortiguado es el sistema, y consecuentemente, su respuesta en frecuencia no presenta un gran alejamiento de las asíntotas. Las amplitudes pueden ser calculadas analíticamente a partir de la FT. Para $\rho<0.707$, se produce un *peak* en la curva de frecuencia para un valor de la frecuencia llamado *frecuencia de resonancia*, que se puede calcular analíticamente como el valor máximo de la amplitud (derivando la amplitud con respecto a la frecuencia e igualándola a cero).

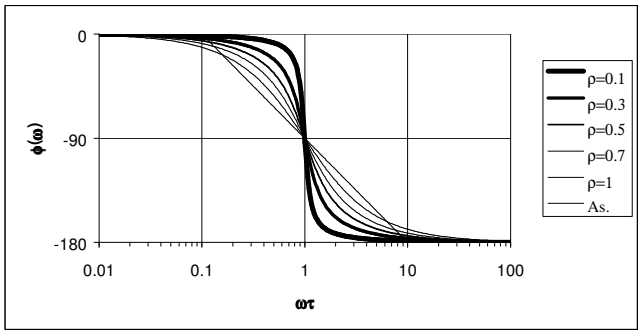
La figura muestra la amplitud de un par de polos complejos conjugados en función de la frecuencia, para diferentes valores del factor de amortiguamiento ρ.



Amplitud [dB] para un par de polos

Al igual que en el caso anterior, la fase también puede ser aproximada a un conjunto de asíntotas:

- $u<0.1$: La fase tiene un valor de 0º.
- $u>10$: La fase se aproxima a 180º para los ceros, y –180º para los polos, exactamente el doble que para el caso de primer orden.
- $0.1<u<10$: La fase puede aproximarse a una curva que une las dos asíntotas anteriores. Dicha curva se aproximará a una recta cuando el valor de ρ sea pequeño. En caso de no cumplirse lo anterior, presentará una curvatura que dependerá del valor de ρ, y que puede ser calculada punto a punto en forma analítica. Un punto de interés se presenta en $u=1$, donde la fase presenta un valor de 90º para los ceros y –90º para los polos, independiente del valor de ρ.



Fase (º) para un par de polos

No existen más casos de interés. Con lo anterior, es posible representar gráficos de Bode aproximados para cualquier función de transferencia mediante la suma de las contribuciones de los gráficos de Bode individuales para cada polo o cero de la FT. Y del mismo modo, es posible inferir la FT de un circuito con sólo estudiar su respuesta en frecuencia.

Lo anterior es válido únicamente para sistemas de fase mínima, es decir, aquellos que tienen todos sus polos y ceros en el semiplano izquierdo del plano S. En el caso de existir raíces en el semiplano derecho, la amplitud se calcula del mismo modo, pero la fase presenta cambios que pueden ser estudiados en forma analítica.

A continuación se presenta un ejemplo de obtención del diagrama de Bode que considera los casos estudiados anteriormente.

4. Ejemplo

Este ejemplo consiste en la determinación del diagrama de Bode de una función de transferencia conocida. En primer lugar se determinan los polos, ceros y ganancias; posteriormente se obtienen las asíntotas; luego se trazan las curvas aproximadas, y finalmente se calculan algunos valores de interés. La función de transferencia a ser estudiada es:

$$G(j\omega) = 100\frac{s^2 + 0.5s + 1}{s(s+0.1)(s+100)}$$

El primer paso consiste en normalizar la función, para poder separarla en sus diferentes factores importantes. A partir de dicha normalización, se desprende lo siguiente:

- Ganancia = 10
- Polos o ceros en origen: 1 polo en el origen
- Polos o ceros reales: polos en ω=0.1 y ω=100
- Polos o ceros complejos conjugados: ceros en ω_n=1, con ρ=0.25

Todos los polos y ceros son estables o críticamente estables, ninguno se encuentra en el semiplano derecho del plano *S*, por lo que el sistema es de fase mínima, y puede ser analizado con el método estudiado en este documento.

$$G(j\omega) = \frac{100}{0.1\cdot 100}\cdot\frac{1 + 2\cdot\left(\frac{0.25}{1}\right)s + \frac{s^2}{1^2}}{s\left(\frac{s}{0.1}+1\right)\left(\frac{s}{100}+1\right)}$$

$$\Rightarrow G(j\omega) = 10\cdot\frac{s^2 0.5s + 1}{s\left(\frac{s}{0.1}+1\right)\left(\frac{s}{100}+1\right)}$$

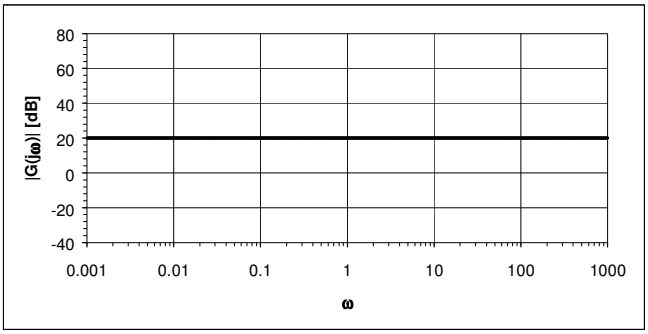
A continuación se estudia cada uno de los casos anteriores, primero en magnitud, y luego en fase.

Magnitud

a) Ganancia Constante

En este caso, dado que la ganancia es 10, se tiene que su contribución en magnitud al diagrama de Bode es de:

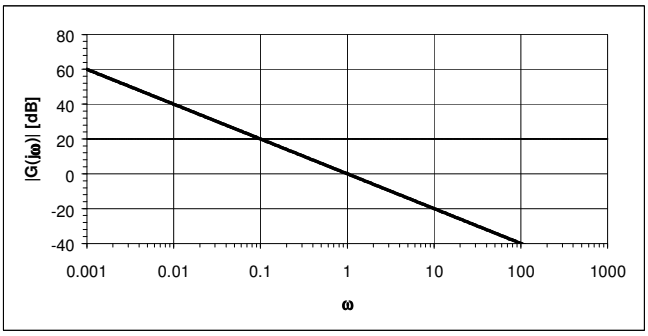
$$|10|\,[\text{dB}] = 20\log(10) = 20\,[\text{dB}],$$



Amplitud [dB] para ganancia constante

b) Polo en el Origen

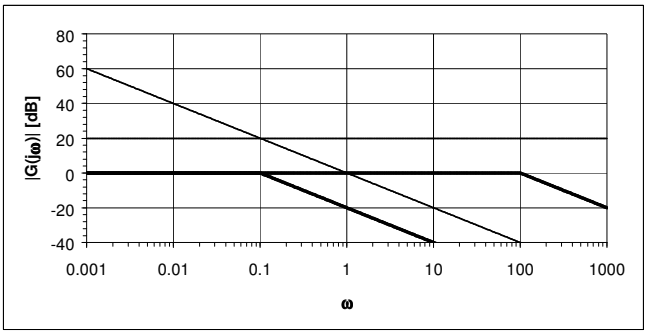
La contribución del polo en el origen es una amplitud de 0 dB para una frecuencia de 1 rad/s, decreciendo a razón de 20 dB/déc.



Agregamos al gráfico de amplitud un polo en el origen

c) Polos Reales

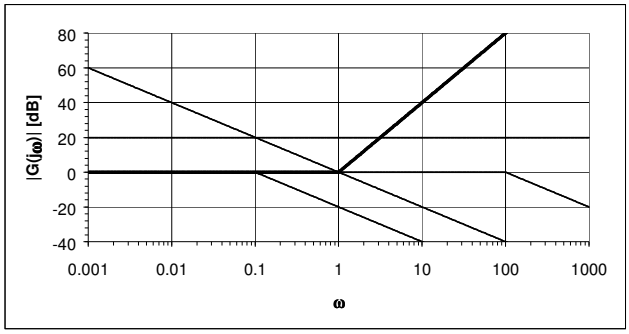
La contribución de cada polo real se puede bosquejar directamente en frecuencia a través de sus asíntotas. Agregamos al gráfico de amplitud la contribución de los polos en ω=0.1 y ω=100, sin sumar sus valores:



Agregamos al gráfico de amplitud un polo en
ω=0.1 rad/s y ω=100 rad/s

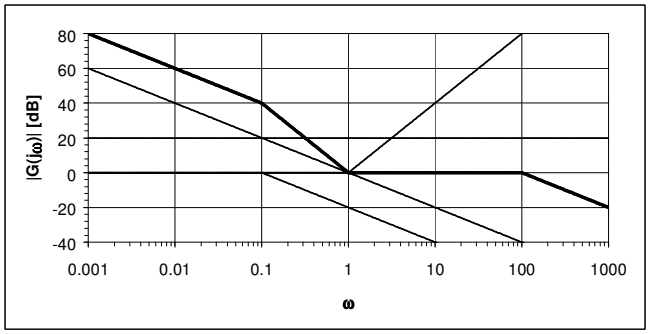
d) Ceros Complejos Conjugados

Sabemos que los ceros se ubican en ω_n=1 rad/s. A partir de dicha frecuencia, su respuesta se aproxima mediante una asíntota que crece a razón de 40dB/déc.



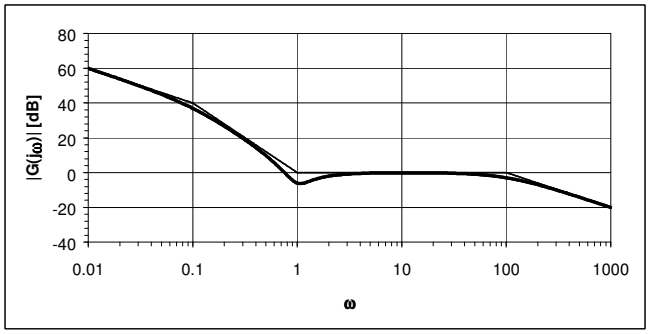
Agregamos al gráfico de amplitud un par de ceros complejos conjugados en ω=1 rad/s

Teniendo todas las asíntotas de la respuesta en frecuencia, podemos obtener la asíntota para la respuesta total del sistema como la suma de las asíntotas individuales, esto debido a que las magnitudes se expresan en dB.



Sumamos todas las contribuciones individuales en el gráfico de las asíntotas para la magnitud

Finalmente, basándonos en la suma de las asíntotas, trazamos la curva aproximada para la respuesta en frecuencia en magnitud, considerando que la función de segundo orden presenta un peak cerca de su frecuencia natural, debido al valor de su constante de amortiguamiento.



Dejamos sólo la suma de las asíntotas, y trazamos la curva aproximada

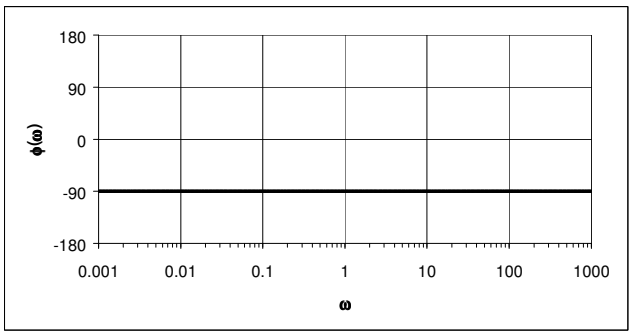
Fase

a) Ganancia Constante

La ganancia constante no aporta un cambio de fase.

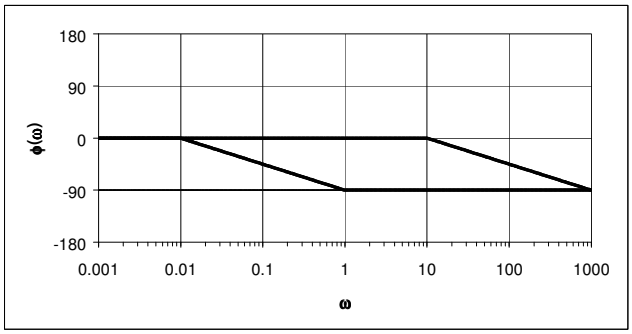
b) Polo en el Origen

El polo en el origen aporta un desfase de –90º, independiente de la frecuencia:



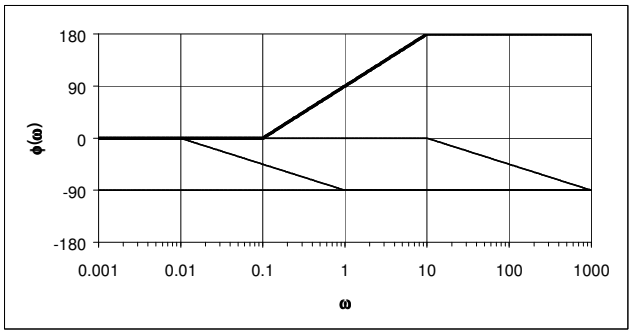
Desfase correspondiente al polo en el origen

Luego se grafican los desfases aportados por los polos reales:



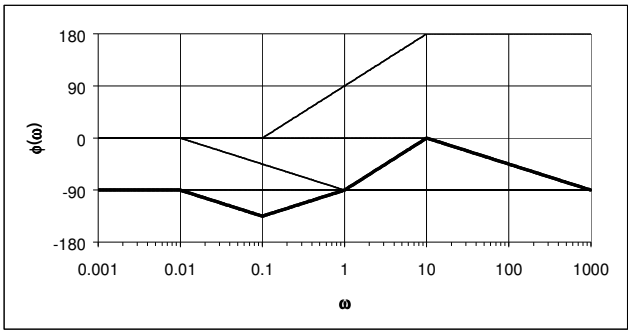
Desfase correspondiente a los polos reales

Posteriormente se agrega el desfase generado por el par de ceros complejos conjugados:



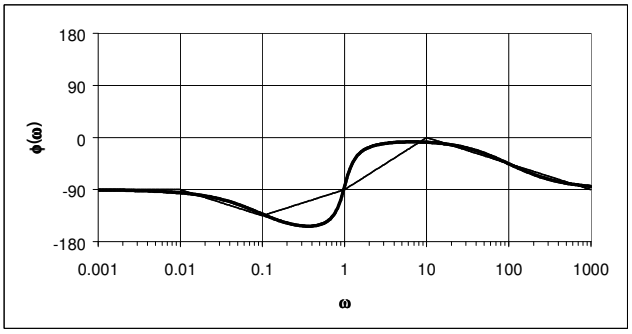
Se añade la contribución de los ceros complejos conjugados

Posteriormente se suman todas las asíntotas, obteniéndose una respuesta aproximada para el desfase del sistema en función de la frecuencia:



Suma de las asíntotas

Finalmente, se traza una curva aproximada para el desfase, considerando la forma de la curva en función del amortiguamiento, para el caso del par de ceros.



Se traza la curva aproximada

Cabe destacar que en este caso, el diagrama de Bode fue obtenido paso a paso; sin embargo, con suficiente práctica es posible obtener un diagrama de Bode aproximado, inmediatamente a partir de la función de transferencia del sistema.

Algunos valores de interés

En el desarrollo anterior, sólo fueron obtenidas las asíntotas, en torno a las cuales se trazaron las curvas aproximadas. Puede trazarse una curva mucho más exacta o con un mayor valor analítico en caso de obtener valores específicos para ciertas frecuencias de interés. Por ejemplo, para el caso de las raíces reales, hay que tener en cuenta que la curva exacta se aleja de la asíntota en 3 dB para la frecuencia natural de la raíz. Esto permite realizar gráficos mucho más exactos.

Un caso de particular interés lo constituyen los sistemas de segundo orden, debido a que para diferentes constantes de amortiguamiento se comportan de diferente forma.

Analizando la ecuación de segundo orden, es fácil demostrar que para diferentes valores de la constante de amortiguamiento ρ, se tendrán los diferentes resultados que se enuncian a continuación.

En el caso de ρ =1, las raíces son reales e iguales (amortiguamiento crítico), por lo tanto, se analiza como dos respuestas de primer orden.

Si ρ >1, el sistema es sobreamortiguado, y su respuesta se determina como dos sistemas de primer orden.

Si ρ<1, las raíces serán complejas conjugadas en Laplace, generando respuestas de segundo orden para un sistema subamortiguado; en este caso, existe un *peak* en el gráfico de amplitud, que se presenta en la frecuencia de resonancia:

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1-2\rho^2}$$

Esta situación debe ser considerada sólo para el caso en que ρ<0.707. Para el caso del ejemplo, dicha frecuencia es de 0.935 rad/s. Para esa frecuencia, es posible evaluar el valor *peak* de la respuesta. En el ejemplo, considerando sólo los ceros complejos conjugados, el valor *peak* es de -6.3 dB, que es el máximo valor en que el cero se aleja de la asíntota (0dB). Los polos presentan el mismo comportamiento, con un *peak* positivo.