Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Eléctrica
IEE2123 – Circuitos Eléctricos
Profesor Álvaro Lorca
Segundo Semestre 2018

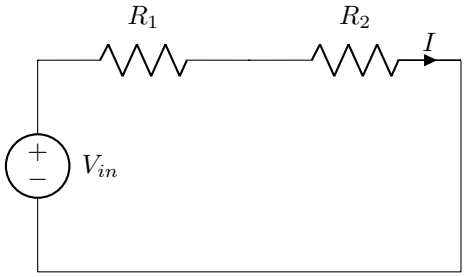
Interrogación 1 - Solución

Instrucciones

- Poner nombre y número de lista en cada hoja.
- Resolver cada Problema en un conjunto diferente de hojas.
- No se permite utilizar apuntes de ningún tipo. Sí se permite el uso de calculadora científica.
- Justifique adecuadamente todas sus respuestas.
- No se puede hacer preguntas. Si hay un error en el enunciado, explique por qué. Si hay algo ambiguo, explique por qué y determine un supuesto razonable para poder responder.
- Tiempo: dos horas.

Problema 1 (15 puntos)

(a) (2 puntos) Utilizando solamente la Ley de Ohm y las Leyes de Kirchoff, demuestre que la resistencia equivalente de dos resistores en serie corresponde a la suma de las resistencias de dichos resistores.
Solución: Considerando un circuito con 2 resistores en serie, R1 y R2:



Aplicando LVK en la espira:

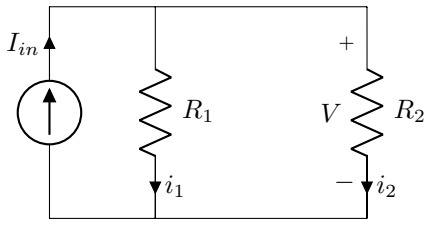
$$V_{in} = IR_1 + IR_2$$
$$V_{in} = I(R_1 + R_2)$$

Despejando V/I para calcular la resistencia equivalente:

$$\frac{V_{in}}{I} = R_{eq} = R_1 + R_2$$

Donde tenemos que la resistencia equivalente es la suma de ambas en serie.

(b) (2 puntos) Utilizando solamente la Ley de Ohm y las Leyes de Kirchoff, demuestre que la conductancia equivalente de dos resistores en paralelo corresponde a la suma de las conductancias de dichos resistores.
Solución: Al considerar dos resistores en paralelo, R1 y R2:



Aplicando LCK en el nodo 1:

$$I = I_1 + I_2$$

Como el voltaje en cada resistor es V:

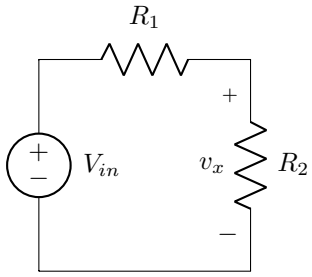
$$I = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} = V(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2})$$

Calculamos la conductancia equivalente G = I/V:

$$\frac{I}{V} = G_{eq} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = G_1 + G_2$$

Demostrando que corresponde a la suma de las conductancias en paralelo.

(c) (2 puntos) Utilizando solamente la Ley de Ohm y las Leyes de Kirchoff, explique y demuestre el principio conocido como *Divisor de Voltaje*.
Solución: Considerando el circuito mostrado a continuación, calculamos el voltaje V_x usando LVK:



$$\frac{V - V_x}{R_1} = \frac{V_x}{R_2}$$

Despejando V_x:

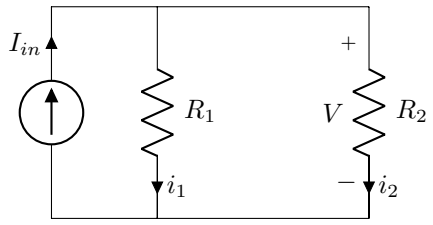
$$\frac{V}{R_1} = V_x(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2})$$

$$V = V_x(\frac{R_1 + R_2}{R_2})$$

$$V_x = V(\frac{R_2}{R_1 + R_2})$$

Que corresponde al divisor de voltaje entre ambos resistores.

(d) (2 puntos) Utilizando solamente la Ley de Ohm y las Leyes de Kirchoff, explique y demuestre el principio conocido como *Divisor de Corriente*.
Solución: Tenemos la siguiente configuración:



Aplicando LCK tenemos que:

$$I = I_1 + I_2$$

Considerando que $I_1 = \frac{V}{R_1}$ y que:

$$V = I(R_1//R_2)$$

Reemplazando en I_1 en (X) tenemos:

$$I = I\frac{(R_1//R_2)}{R_1} + I_2$$

Despejando I_2:

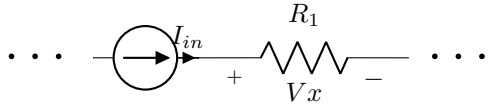
$$I_2 = I(1 - \frac{R_1//R_2}{R_1}) = I(1 - \frac{R_1R_2}{R_1(R_1+R_2)})$$

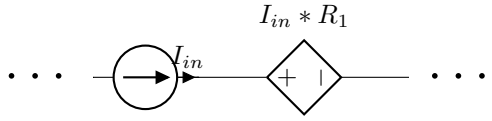
Simplificando los R_1 y realizando la suma tenemos finalmente:

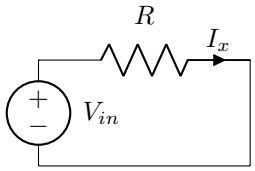
$$I_2 = I\frac{R_1}{R_1+R_2}$$

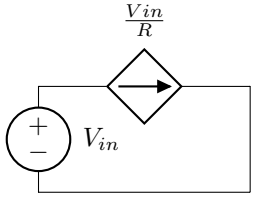
Que corresponde al divisor de corriente.

(e) (2 puntos) Explique cómo un resistor puede ser entendido como una fuente de voltaje dependiente y cómo un resistor puede ser entendido como una fuente de corriente dependiente.
Solución: Un resistor de resistencia R es equivalente a una fuente dependiente de voltaje que entrega un voltaje igual a la corriente que pasa por sí misma multiplicada por R, o a una fuente dependiente de corriente cuya corriente entregada es igual al diferencial de voltaje que observa dividida por R.
De forma alternativa se puede explicar de forma gráfica:

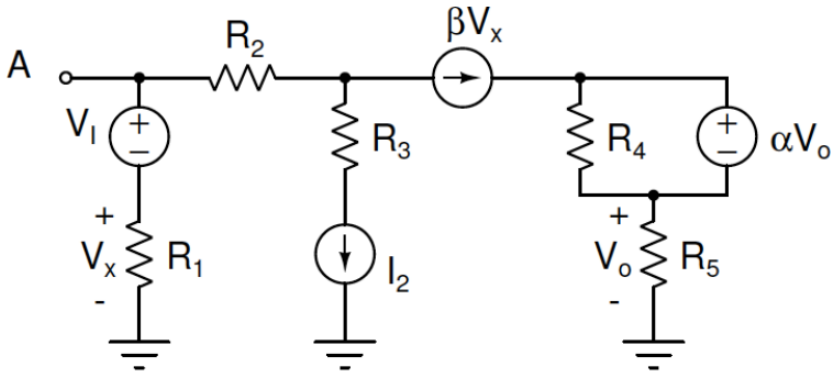








(f) (5 puntos) Determine la resistencia equivalente del siguiente circuito visto desde el punto A.



Solución: Para calcular la resistencia equivalente en A, hacemos el equivalente de Thevenin para el terminal A respecto a tierra:
Donde:

$$V_a = V_{eq} + R_{eq} I$$

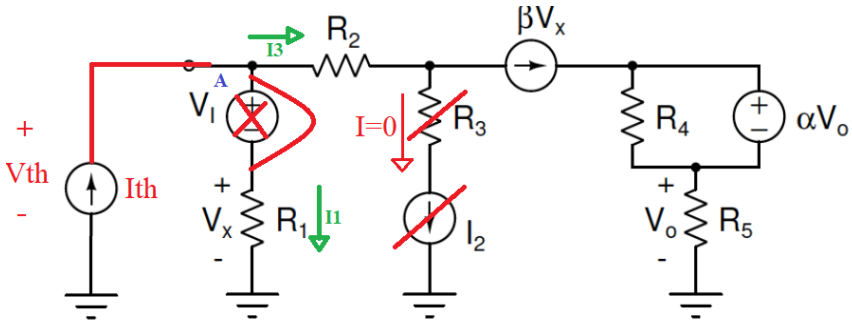
Donde el voltaje equivalente corresponde a:

$$V_{eq} = \frac{V_a}{I}\Big|_{I=0} I$$

Y la resistencia equivalente es:

$$R_{eq} = \frac{V_a}{I}\Big|_{\substack{VI=0 \\ I2=c.a.}}$$

La cual se calcula al cortocircuitar la fuente de voltaje independiente y poner en circuito abierto la fuente de corriente independiente. Así nos queda el siguiente diagrama:



Donde aplicamos LCK en el nodo A:

$$I_{th} = I_1 + I_3$$

$$I_{th} = \frac{V_{th}}{R_1} + \beta V_x$$

Pero $V_x = V_{th}$, entonces:

$$I_{th} = \frac{V_{th}}{R_1} + \beta V_{th}$$

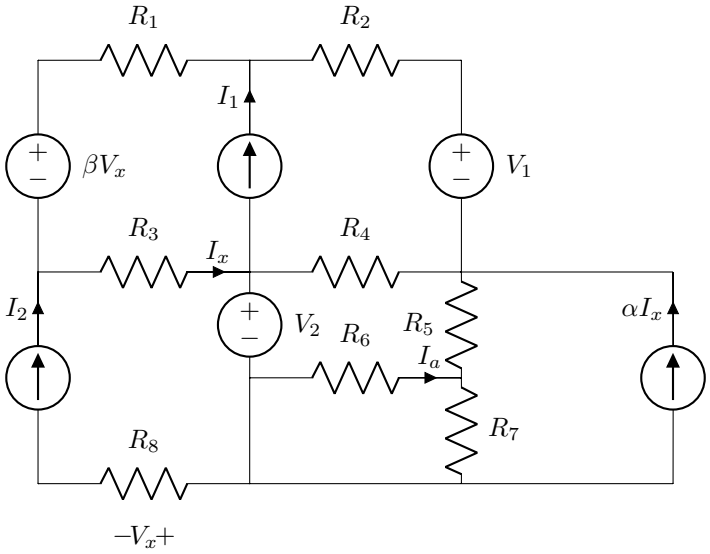
$$I_{th} = V_{th}(\frac{1}{R_1} + \beta)$$

Así, despejando V_{th}/I_{th} tenemos la resistencia equivalente:

$$\frac{V_{th}}{I_{th}} = R_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \beta}$$

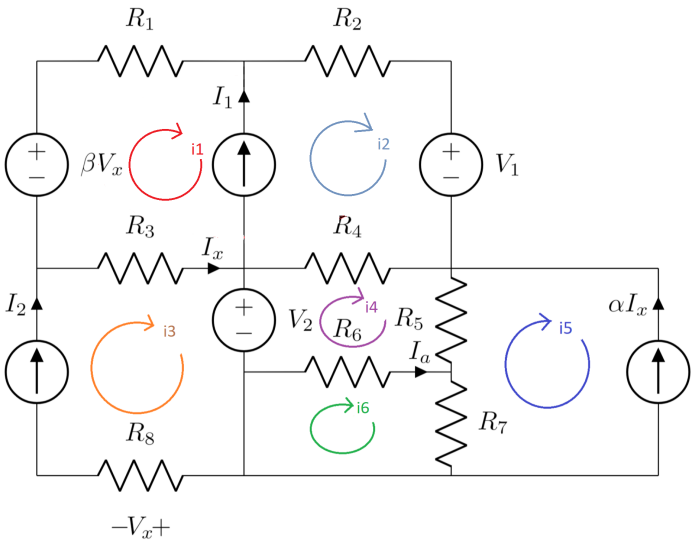
$$R_{eq} = \frac{R_1}{1 + \beta R_1}$$

Problema 2 (15 puntos)



(a) (10 puntos) Considere el circuito de arriba. En base al método de mallas, establezca un sistema de ecuaciones de la forma $Ai = b$, reduciendo al máximo el número de variables.

Solución:



Inmediatamente tenemos:

$$V_x = I_2 R_8,\ i_3 = I_2,\ i_5 = -\alpha I_x,\ I_x = (i_3 - i_1)$$

Planteamos las ecuaciones de malla:

Super malla i1:

$$\beta V x = i_1 R_1 + i_2 R_2 + V_1 + (i_2 - i_4) R_4 + (i_1 - i_3) R_3$$

$$i2 = I_1 + i_1$$

Malla i4:

$$V_2 = (i_4 - i_2)R_4 + (i_4 - i_5)R_5 + (i_4 - i_6)R_6$$

Malla i6:

$$(i_6 - i_4)R_6 + (i_6 - i_5)R_7 = 0$$

Reemplazando obtenemos las siguientes ecuaciones para las 3 incógnitas i_1, i_4, i_6:

$$i_1(R_1 + R_2 + R_3 + R_4) - i_4R_4 = I_2R_3 + \beta I_2R_8 - I_1R_2 - I_1R_4 - V_1$$

$$V_2 + I_1R_4 - \alpha R_5I_2 = i_4(R_4 + R_5 + R_6) - i_1(R_4 + \alpha R_5) - i_6R_6$$

$$i_6(R_6 + R_7) - i_4R_6 - \alpha R_7i_1 = -\alpha R_7I_2$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} (R_1 + R_2 + R_3 + R_4) & -R_4 & 0 \\ -(R_4 + \alpha R_5) & (R_4 + R_5 + R_6) & -R_6 \\ \alpha R_7 & R_6 & -(R_6 + R_7) \end{pmatrix}}_{Resistencias} \underbrace{\begin{pmatrix} i_1 \\ i_4 \\ i_6 \end{pmatrix}}_{Corrientes} = \underbrace{\begin{pmatrix} I_2(\beta R_8 + R_3) - I_1(R_2 + R_4) - V_1 \\ V_2 + I_1R_4 - \alpha R_5I_2 \\ -\alpha R_7I_2 \end{pmatrix}}_{Voltajes}$$

(b) (5 puntos) Considere los valores para las resistencias $R_1 = R_2 = R_3 = 2\Omega$, $R_4 = R_5 = R_6 = R_7 = R_8 = 1\Omega$, el valor de los voltajes $V_1 = 2V$, $V_2 = 4V$, un valor para las corrientes $I_1 = 3A$, $I_2 = 2A$, y el ponderador $\alpha = 1$. ¿Cuál es el valor máximo que puede tomar β para que I_a no sea mayor que $0.5A$?
Solución: Reemplazando los valores dados:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 7 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}}_{Resistencias} \underbrace{\begin{pmatrix} i_1 \\ i_3 \\ i_4 \end{pmatrix}}_{Corrientes} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2\beta - 7 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}}_{Voltajes}$$

Al resolver el sistema obtenemos:

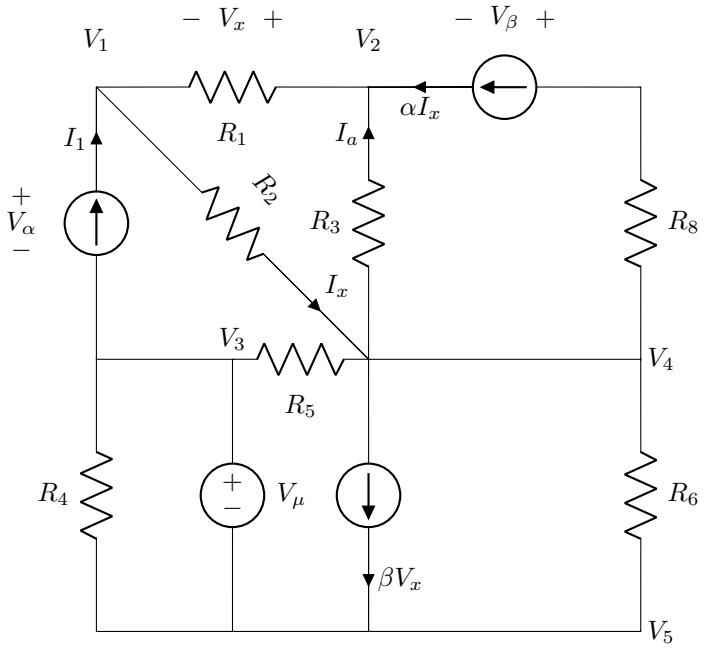
$$i_1 = \frac{\beta}{3} - \frac{9}{10} \tag{1}$$

$$i_4 = \frac{\beta}{3} + \frac{7}{10} \tag{2}$$

$$i_6 = \frac{\beta}{3} - \frac{11}{10} \tag{3}$$

Buscamos que $I_a = i_6 - i_4 < 0.5$. Restando (2) con (3) podemos notar que I_a es independiente de β y tiene un valor de $\frac{-9}{5}$.

Problema 3 (15 puntos)



(a) (10 puntos) Considere el circuito de más anterior. En base al método de nodos, establezca un sistema de ecuaciones de la forma $Av = b$, reduciendo al máximo el número de variables.

Solución: Para el método pedido, debemos aplicar Kirchhoff de corrientes en cada nodo del circuito. Por inspección, notamos que los nodo V_3 y V_5 forman un súpernodo, tal que $V_\mu = V_3 - V_5$. Las ecuaciones de los nodos V_1, V_2, V_4 y del supernodo se encuentran a continuación en el orden respectivo.

$$I_1 + \frac{V_2 - V_1}{R_1} + \frac{V_4 - V_1}{R_1} = 0$$

$$\alpha I_x = \frac{V_2 - V_4}{R_3} + \frac{V_x}{R_1}$$

$$\frac{V_4 - V_2}{R_3} + \frac{V_4 - V_3}{R_5} + \beta V_x + \alpha I_x + \frac{V_4 - V_5}{R_6} = 0$$

$$(I_1 + \frac{V_3 - V_4}{R_5}) + (\frac{V_5 - V_4}{R_6} - \beta V_x) = 0$$

Luego, despejamos los voltajes de cada nodo, teniendo en cuenta que V_x e I_x son variables dependientes, donde se cumple que:

$$V_x = V_2 - V_1 \qquad\qquad I_x = \frac{V_1 - V_4}{R_2}$$

Teniendo en cuenta todas la ecuaciones anteriores, podemos establecer la matriz de ecuaciones a continuación.

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_2} & 0 & -\frac{1}{R_2} & 0 \\ \frac{\alpha}{R_2} + \frac{1}{R_1} & \frac{-1}{R_1} + \frac{-1}{R_3} & 0 & \frac{-\alpha}{R_2} + \frac{1}{R_3} & 0 \\ -\beta & \beta & \frac{-1}{R_5} & \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6} & \frac{-1}{R_6} \\ \beta + \frac{\alpha}{R_2} & \frac{-1}{R_3} - \beta & \frac{-1}{R_5} & \frac{-\alpha}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6} & \frac{-1}{R_6} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ 0 \\ I_1 \\ 0 \\ V_\mu \end{bmatrix}$$

Finalmente, podemos reducir la matriz, despejando V_3 en la ecuación del supernodo, es decir, $V_3 = V_\mu + V_5$. Con esto obtenemos la matriz reducida para el problema.

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_2} & 0 \\ \frac{\alpha}{R_2}+\frac{1}{R_1} & \frac{-1}{R_1}+\frac{-1}{R_3} & \frac{-\alpha}{R_2}+\frac{1}{R_3} & 0 \\ -\beta & \beta & \frac{1}{R_5}+\frac{1}{R_6} & \frac{-1}{R_6}+\frac{-1}{R_5} \\ \beta+\frac{\alpha}{R_2} & \frac{-1}{R_3}-\beta & \frac{-\alpha}{R_2}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_5}+\frac{1}{R_6} & \frac{-1}{R_6}+\frac{-1}{R_5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_4 \\ V_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ 0 \\ I_1+\frac{V_\mu}{R_5} \\ \frac{V_\mu}{R_5} \end{bmatrix}$$

(b) (3 puntos) Suponga que usted resolvió el sistema de la parte (a) y conoce los valores de los voltajes de nodo. En base a esto, calcule los valores de I_a, V_α y V_β.

Solución: Por simple inspección

$$I_\alpha = \frac{V_4 - V_2}{R_3} \qquad V_\alpha = V_1 - V_3$$

Luego, podemos calcular V_β mediante caída de tensión.

$$V_\beta = (V_4 - \alpha I_x \cdot R_8) - V_2 = V_4(1 + \alpha \cdot \frac{R_8}{R_2}) - \alpha V_1 \frac{R_8}{R_2}$$

(c) (2 puntos) Exprese la potencia suministrada por la fuente de voltaje V_μ.

Solución: Para calcular la potencia suministrada por la fuente, debemos encontrar primero el valor de la corriente que circula a través de la fuente. Aplicando Kirchhof podremos obtener el resultado pedido. Cabe destacar que existen dos soluciones igualmente válidas según el nodo en que se aplique la ley. Este podría ser el de entrada o el de salida de la fuente (cuidado con el sentido de la corriente).

(a) Aplicando KCL en el nodo V_3:

$$I_\mu = \frac{V_3 - V_4}{R_5} + \frac{V_3 - V_5}{R_4} + I_1$$

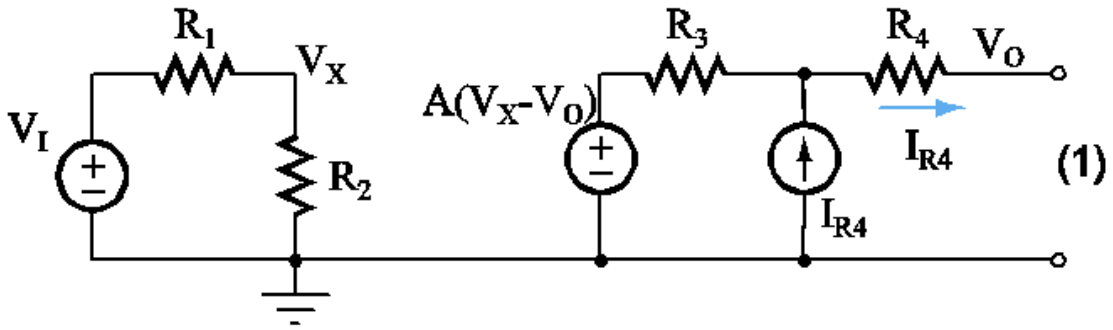
(b) Aplicando KCL en el nodo V_5:

$$I_\mu = \frac{V_3 - V_5}{R_4} + \frac{V_4 - V_5}{R_6} + \beta(V_2 - V_1)$$

Con esto, podemos deducir la potencia suministrada, donde I_μ corresponde a alguna de las expresiones anteriores.

$$P_\mu = V_\mu \cdot I_\mu$$

Problema 4 (15 puntos)



(a) (12 puntos) Obtenga el equivalente de Helmholtz-Thévenin y el equivalente de Mayer-Norton del siguiente circuito, visto desde el puerto (1).

Solución: Lo primero es notar que por el resistor R_3 no circula corriente, pues toda la corriente de la fuente I_{R_4} se va por el resistor R_4. Para obtener los circuitos equivalentes se debe calcular el voltaje de circuito abierto (V_{oc}) y la corriente de cortocircuito (I_{sc}). La resistencia equivalente sería obtenida como:

$$R_{eq} = \frac{V_{eq}}{I_{eq}} = \frac{V_{oc}}{I_{sc}}$$

Otra forma de proceder sería calcular uno de los valores anteriores y obtener la resistencia equivalente utilizando una fuente de prueba V_T y calcular la corriente I_T que sale de ella, asi la resistencia equivalente será:

$$R_{eq} = \frac{V_T}{I_T}$$

A continuación se procede a mostrar la forma de obtener el voltaje de circuito abierto, la corriente de cortocircuito y la resistencia equivalente mediante fuente de prueba.

(1) **Cálculo voltaje de circuito abierto** V_{oc} : Si el terminal V_o esta en circuito abierto, se puede notar que no circula corriente por R_4 y como además se sabe que por R_3 no circula corriente, entonces el voltaje en el terminal V_o no es mas que el voltaje impuesto por la fuente dependiente. Asi se tiene:

$$\begin{aligned} V_{oc} = V_o &= A(V_x - V_o) \\ V_o &= A\left(V_I \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} - V_o\right) \\ V_o + AV_o &= AV_I \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} \end{aligned}$$

$$\boxed{V_o = V_{eq} = \frac{A}{1+A} \cdot V_I \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}}$$

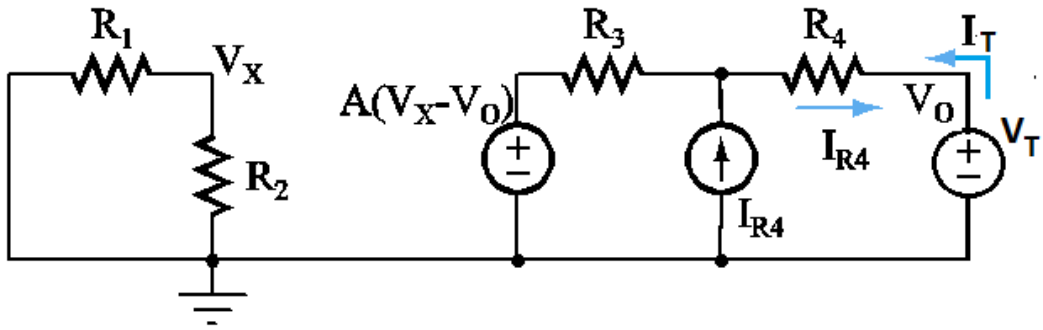
(2) **Calculo corriente de cortocircuito** I_{sc}: Ahora se procede a cortocircuitar el terminal V_o, por lo que se tendrá $V_o = 0$. Para calcular esta corriente de cortocircuito se utiliza ley de Ohm en bornes del resistor R_4, como ya se dijo que por R_3 no circula corriente, entonces el voltaje en el borne izquierdo de R_4 es el voltaje de la fuente dependiente, mientras que el voltaje en el borne derecho es V_o (que se encuentra cortocircuitado a tierra). Con lo anterior, la corriente de cortocircuito I_{sc} es:

$$\begin{aligned} I_{sc} &= \frac{A(V_x - V_o) - V_o}{R_4} \\ I_{sc} &= \frac{A(V_x - 0) - 0}{R_4} \end{aligned}$$

$$I_{sc} = \frac{AV_x}{R_4}$$

$$\boxed{I_{sc} = I_{eq} = \frac{A}{R_4} \cdot V_I \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}}$$

(3) **Calculo resistencia equivalente R_{eq} mediante fuente de prueba V_T** Se pone una fuente de prueba entre V_o y tierra, además se debe apagar la fuente independiente V_I como se muestra a continuación:



Se debe encontrar una expresión para I_T. Nuevamente se utilizara ley de Ohm en el resistor R_4, los voltajes en bornes serán las mismas expresiones que para el calculo de la corriente de cortocircuito, sin embargo ahora $V_x = 0$ debido a que la fuente independiente V_I esta apagada. Asi la corriente I_T esta dada por:

$$I_T = \frac{V_o - A(V_x - V_o)}{R_4}$$
$$I_T = \frac{V_T - A(V_x - V_T)}{R_4}$$
$$I_T = \frac{V_T - A(0 - V_T)}{R_4}$$
$$I_T = \frac{V_T + AV_T}{R_4}$$
$$I_T = \frac{V_T(1 + A)}{R_4}$$

La resistencia equivalente R_{eq} esta dada por:

$$\boxed{R_{eq} = \frac{V_T}{I_T} = \frac{V_T}{\frac{V_T(1+A)}{R_4}} = \frac{R_4}{1 + A}}$$

Puede comprobarse que:

$$V_{eq} = I_{eq} \cdot R_{eq}$$

(b) (3 puntos) ¿Cuál sería la potencia disipada por un resistor de resistencia R conectado al puerto (1) en el circuito de más arriba?
Solución: La potencia disipada por un resistor de resistencia R puede ser calculada como:

$$P = \frac{V^2}{R} = I^2 \cdot R$$

Si se utiliza el equivalente de thevenin, entonces la corriente circulante por el resistor R es:

$$I_R = \frac{V_{eq}}{R_{eq} + R}$$

y la potencia disipada P será:

$$P = \left(\frac{V_{eq}}{R_{eq} + R} \right)^2 \cdot R$$
$$P = \left(\frac{\frac{AV_I}{1+A} \cdot \frac{R_2}{R_1+R_2}}{\frac{R_4}{1+A} + R} \right)^2 \cdot R$$
$$P = \left(\frac{AV_I R_2}{(R_1 + R_2)(R_4 + R(1+A))} \right)^2 \cdot R$$