Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ingeniería Eléctrica
IEE2123 - Circuitos Eléctricos

Tarea 4

Condensadores, Inductores y Circuito de Primer y Segundo Orden

2º semestre 2022 - Profesor Samuel Cordova

Ayudante Felipe Burgos - fba@uc.cl

- La tarea debe ser subida en formato .pdf a Canvas, junto a los archivos adjuntos necesarios en un formato .rar o .zip en caso de que aplique.
- No se aceptan fotografías de tareas escritas a mano. Solo serán revisadas tareas escritas en editor de texto (imágenes, diagramas, esquemáticos, etc, podrán ser hechos a mano).
- Existirá un bono de +0.5 pts. para las tareas escritas en LaTeX.

Problema 1 (6 puntos)

Para el circuito 1 se busca calcular el voltaje V_c del condensador, para lograr esto se pide lo siguiente:

- Primero, calcule el equivalente de Thévenin entre el terminal V_x y tierra, desconectando el condensador C y la resistencia R_L del circuito. Para facilitar los cálculos se le pide que la resistencia de Thévenin R_T y el voltaje V_T sean obtenidos empleando expresiones de baja entropía. Por ejemplo, si R_a y R_b están en paralelo expréselos como $R_a||R_b$ en vez de expresar la función como $\frac{R_a R_b}{R_a+R_b}$. (3 puntos)
- Una vez obtenido el equivalente de Thévenin, conecte el condensador C y la resistencia R_L tal como muestra la figura 2. Luego, calcule el voltaje $V_C(t)$ del condensador C. Mencione también la constante de tiempo $\tau = R_{eq}C$. (3 puntos)
  Puede asumir lo siguiente: $V_c(0) = V_0$.
  HINT: Puede aplicar una malla en el circuito 2 para calcular de una manera más fácil V_c, nótese que la corriente del condensador I_C es la misma que pasa por las resistencias.

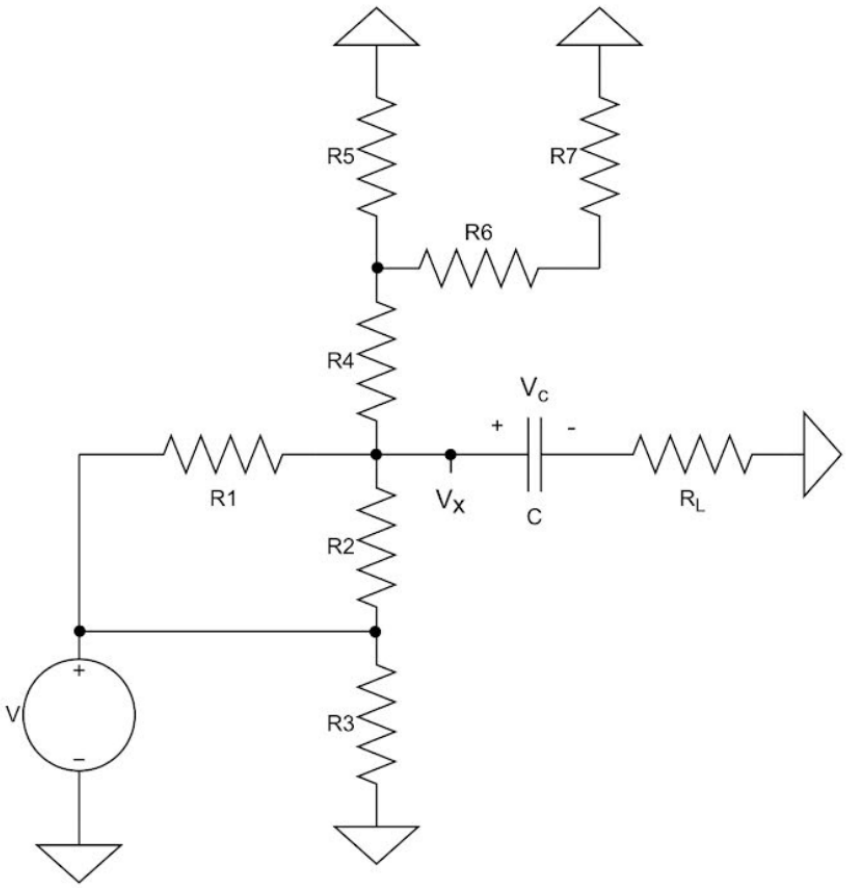


Figura 1: Circuito 1

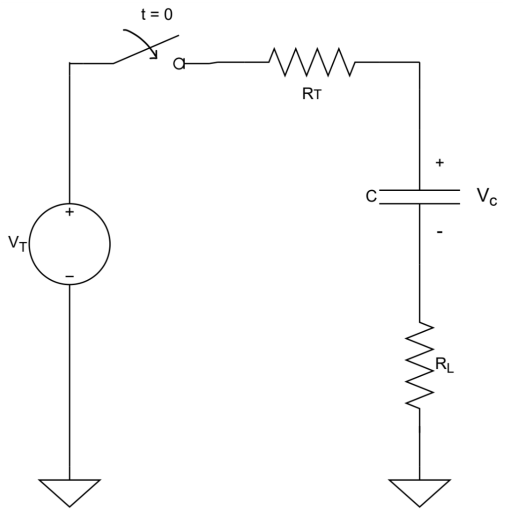
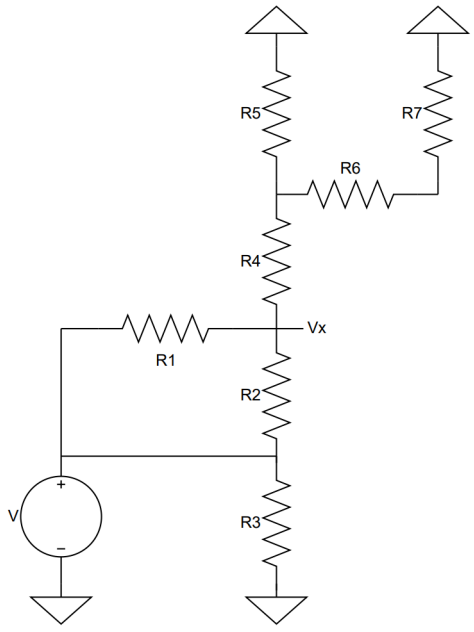


Figura 2: Circuito 2. Equivalente de Thévenin

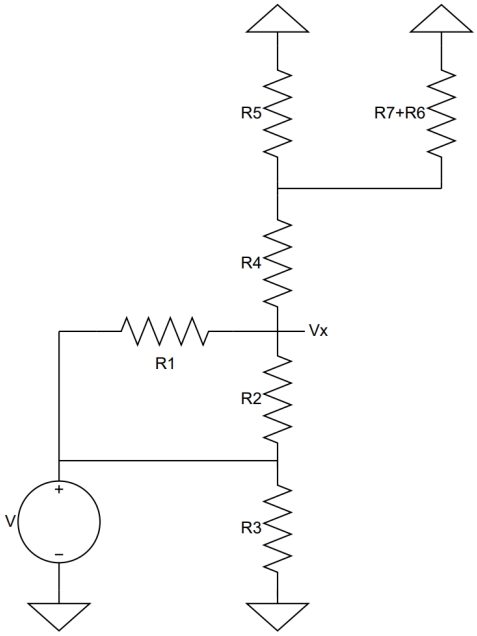
Solución:

Pregunta A

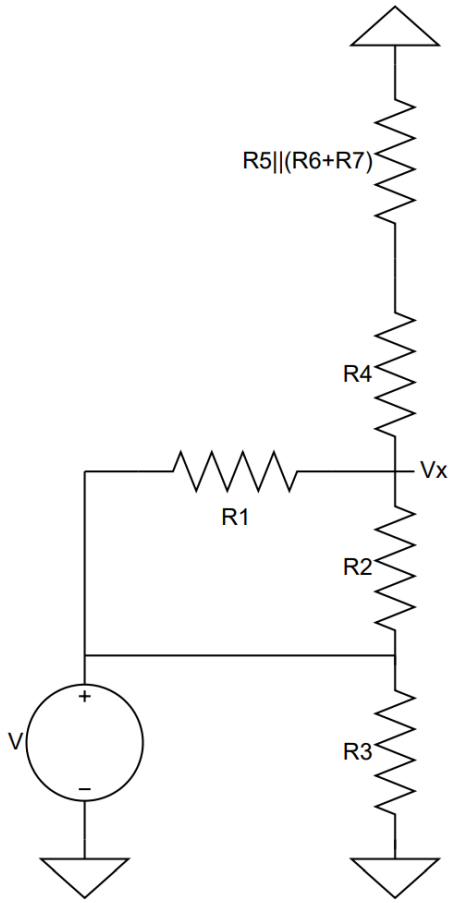
Para obtener el equivalente de Thévenin se requiere el voltaje V_T y la resistencia R_T, primero empezaremos por escribir el circuito removiendo los componentes que menciona el enunciado



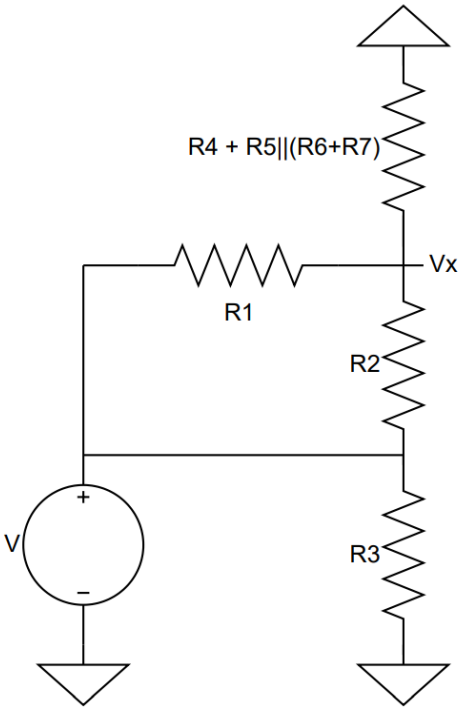
Luego, notamos que la resistencia R_6 y R_7 estan en serie.



Después simplificamos R_5 con la suma de R_6 y R_7 ya que estan en paralelo.



Luego, notamos que R_4 se encuentra en serie con $R_5||(R_6 + R_7)$



Junto a esto, vemos que R_1 y R_2 estan en paralelo.

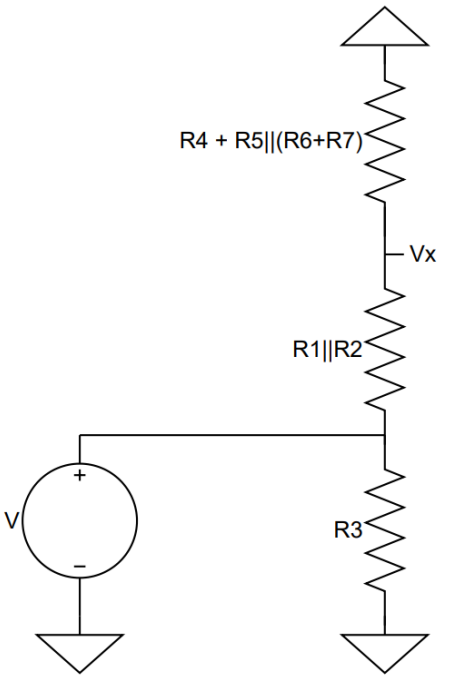
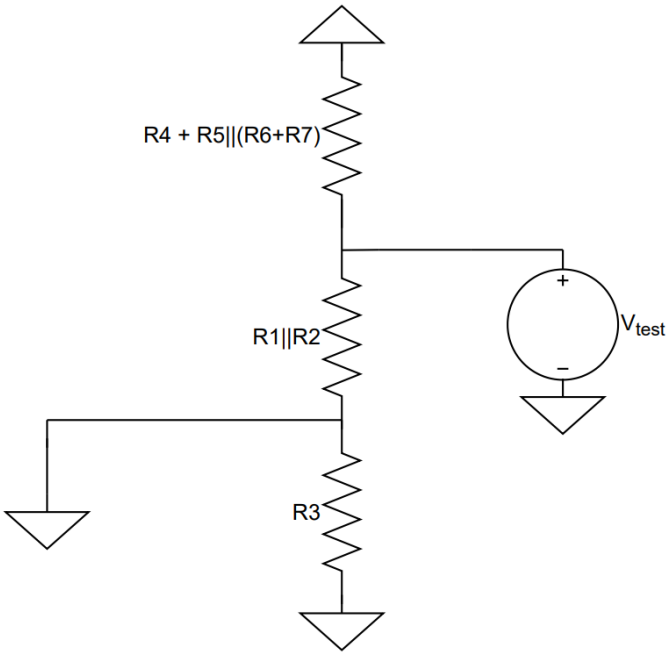


Figura 3: Circuito con reducción final

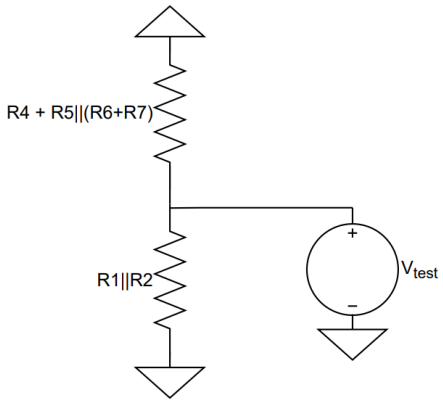
Finalmente, notamos que el voltaje del nodo V_x corresponde a un simple divisor de tensión, por lo tanto se concluye que:

$$V_t = V_x = V\frac{R_4 + R_5||(R_6 + R_7)}{R_4 + R_5||(R_6 + R_7) + R_1||R_2} \tag{1}$$

Para calcular la resistencia de Thévenin R_T, emplearemos el circuito de la figura 3, donde se desconectará la fuente V y se colocará una fuente V_{test} para asi calcular la resistencia.



Al analizar el circuito, notamos que la resistencia R_3 se encuentra cortocircuitada, por lo tanto, el circuito se puede reducir a la siguiente figura.



Con realizar una simple inspección notamos que la resistencia equivalente R_T que ve la fuente corresponde al paralelo de las 2 resistencias que quedan en el circuito, por lo tanto se llega a la siguiente expresión para R_T.

$$R_T = [R_4 + R_5||(R_6 + R_7)]||R_1||R_2 \tag{2}$$

Pregunta B

Para obtener $V_C(t)$, planteamos una malla en el circuito de la figura 2, resultando en:

$$V_T - i_C R_T - V_C - i_C R_L = 0 \tag{3}$$

Si planteamos la relación voltaje-corriente del condensador, la malla queda de la siguiente forma:

$$V_T - \frac{dV_C}{dt} R_T C - V_C - \frac{dV_C}{dt} R_L C = 0$$

Si reordenamos los términos se llega la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{V_T}{C(R_T + R_L)} = \frac{dV_C}{dt} + \frac{V_C}{C(R_T + R_L)} \tag{4}$$

La ecuación (4) corresponde a una ecuación diferencial de primer orden no homogénea, cuya solución considerando la condición inicial planteada es:

$$V_C(t) = e^{\frac{-t}{C(R_T + R_L)}}(V_0 - V_T) + V_T \tag{5}$$

A partir de la ecuación de voltaje del condensador notamos que la constante de tiempo corresponde a:

$$\tau = C(R_T + R_L) = C([R_4 + R_5||(R_6 + R_7)]||R_1||R_2 + R_L) \tag{6}$$

Problema 2 (6 puntos)

Dado el circuito de la figura 4, resuelva los siguientes problemas:

- Dado un voltaje DC V_{DC}, calcule los voltajes V_{C1} y V_{R2} en función de los componentes del circuito. Puede asumir que las condiciones iniciales iniciales $I_{L1}(0)$ y $V_{C1}(0)$ son nulas. (3 puntos)
  HINT: Puede multiplicar la corriente del inductor por la resistencia R2 para asi obtener el voltaje V_{R2}.
- Una vez obtenidas las ecuaciones de voltaje, determine el valor que debe tener L1 en función de R1, R2 y C1 para que la constante de tiempo del circuito RL sea igual al del RC. (2 puntos)
- Dada la relación obtenida en el apartado anterior y asumiendo que R1 = 500 Ω, R2 = 3 kΩ, V_{DC} = 5 V y C1 = 2 nF. Calcule el valor de L1 y demuestre que el voltaje entre el terminal A y el terminal B es 0 V (Es decir, que son iguales). (1 punto)

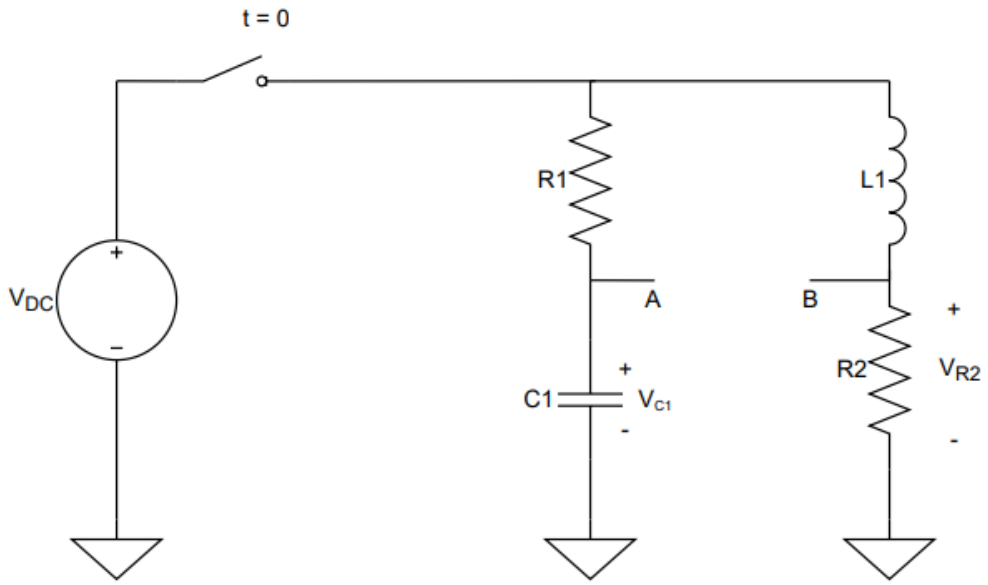
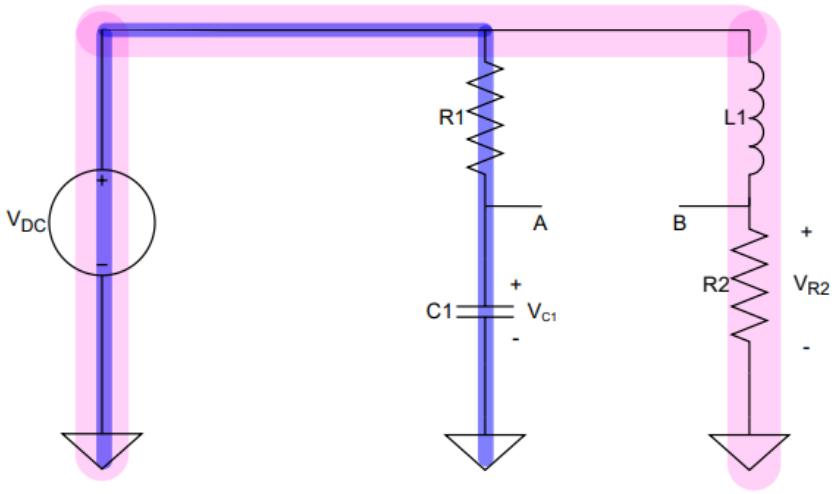


Figura 4: Circuito 3

Solución:

Pregunta A

Para resolver el problema, planteamos las siguientes mallas:



Notamos que con la de color morado podemos obtener la ecuación de voltaje del condensador, mientras que con la rosada se puede llegar a la corriente del inductor. Planteando las mallas obtenemos:

$$V_{DC} - i_c * R1 - V_{C1} = 0 \tag{7}$$

$$V_{DC} - v_L - I_{L1} * R2 = 0 \tag{8}$$

Si planteamos las relaciones voltaje-corriente del condensador e inductor las ecuaciones quedan de la siguiente forma:

$$V_{DC} - \frac{dV_C}{dt} * C * R1 - V_{C1} = 0 \tag{9}$$

$$V_{DC} - L\frac{dI_L}{dt} - I_{L1} * R2 = 0 \tag{10}$$

Notamos que las ecuaciones (9) y (10) corresponden a ecuaciones diferenciales no homogéneas, si las resolvemos e imponemos las condiciones iniciales $V_{C1}(t = 0) = I_{L1}(t = 0) = 0$ dadas en el enunciado se llega a que el voltaje del condensador y la corriente del inductor corresponden a:

$$V_C(t) = V_{DC}(1 - e^{-\frac{t}{C*R1}}) \tag{11}$$

$$I_L(t) = \frac{V_{DC}}{R2}(1 - e^{-\frac{t*R2}{L1}}) \tag{12}$$

Por lo tanto, la ecuación (11) corresponde al voltaje del condensador, mientras que para obtener el voltaje de la resistencia R2 multiplicamos la corriente de I_L por R2 para así obtener su

voltaje (Ley de Ohm).

$$V_{R2}(t) = I_L * R2 = V_{DC}(1 - e^{-\frac{t*R2}{L1}}) \tag{13}$$

Pregunta B

Para obtener el valor de L1 en función de los componentes del circuito, planteamos las constantes de tiempo del circuito RC y RL a partir de las ecuaciones (13) y (12).

$$\tau_{RC} = C * R1 \tag{14}$$

$$\tau_{RL} = \frac{L1}{R2} \tag{15}$$

Si igualamos las constantes de tiempo, se puede obtener el valor de L1 en función de los componentes.

$$C * R1 = \frac{L1}{R2} \Rightarrow L1 = R1 * R2 * C \tag{16}$$

Por lo tanto, si L1 cumple la igualdad de la ecuación (16), las constantes de tiempo se igualan.

Pregunta C

Con los valores de los componentes dados, se puede obtener el valor de L1.

$$L1 = 500 * 3000 * 2 * 10^{-9} = 0{,}003 = 3 \text{ mH}$$

Si colocamos los valores entregados en las ecuaciones (11) y (13) estas quedan como:

$$V_C(t) = 5(1 - e^{10^6 t}) \tag{17}$$

$$V_{R2}(t) = 5(1 - e^{10^6 t}) \tag{18}$$

$$\Rightarrow V_{R2}(t) - V_C(t) = 0$$

Por lo tanto, como las ecuaciones de voltaje son iguales, se puede concluir que para todo instante de tiempo los terminales se encuentran al mismo potencial.

Problema 3 (6 puntos)

Para los circuitos de las figuras 5 y 6 asuma que R1 = 5 kΩ, R2 = 300 Ω, R3 = 2 kΩ, A = 20 mS, L = 0.3 H, V = 5 V y que R_T y V_T corresponden a la resistencia y voltaje de Thévenin respectivamente.

- Para el circuito de la figura 5 calcule el equivalente de Thévenin entre en el terminal V_x y tierra. (2 puntos)
- Al equivalente de Thévenin obtenido en la figura 5 se le conecta un inductor L y un condensador C tal como muestra la figura 6. Obtenga la ecuación diferencial para el voltaje V_c del condensador y determine los valores de C para que el circuito este sobreamortiguado ($\zeta > 1$), críticamente amortiguado ($\zeta = 1$) y subamortiguado ($\zeta < 1$). (2 puntos)
- Resuelva la ecuación diferencial para el voltaje V_c del condensador; puede tomar como referencia la figura 6; asumiendo que C = 2 nF y que las condiciones iniciales I_L y V_c son nulas en t = 0. (2 puntos)

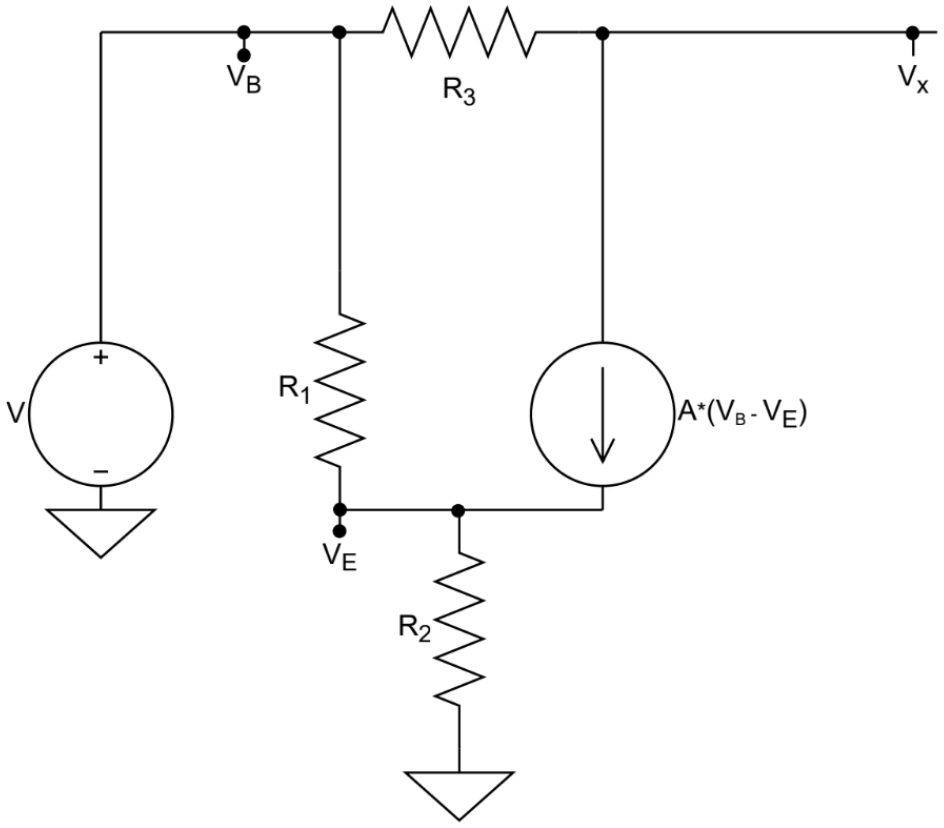


Figura 5: Circuito 5

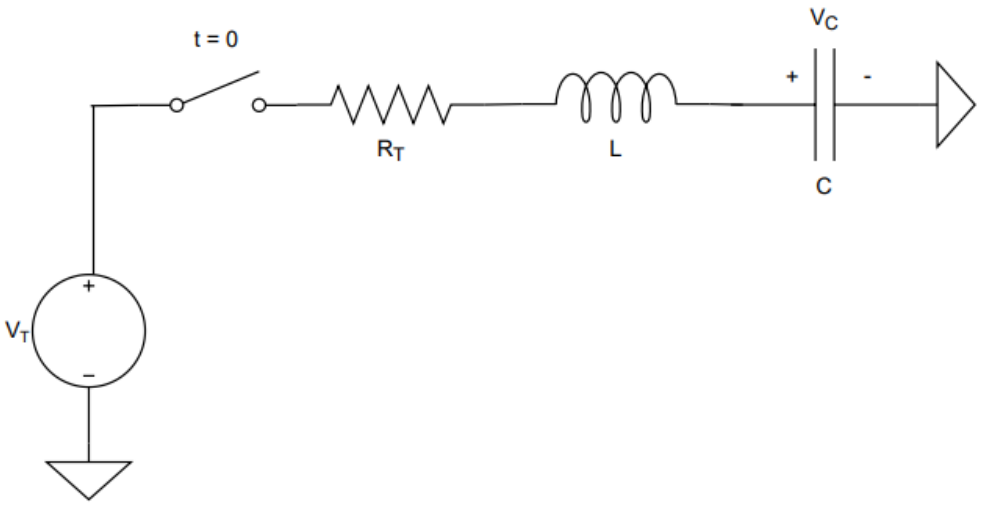


Figura 6: Equivalente de Thévenin

Solución:

Pregunta A

Para obtener el equivalente de Thévenin, necesitamos conocer el voltaje del nodo V_x que corresponde al V_T, y la resistencia de Thévenin vista desde el nodo V_x, para obtener el primero, planteamos el siguiente sistema de ecuaciones utilizando el método de nodos.

$$\begin{cases} V = V_B \\ \frac{V_B - V_E}{R_1} + A(V_B - V_E) = \frac{V_E}{R_2} \quad [1] \\ \frac{V_B - V_x}{R_3} = A(V_B - V_E) \qquad [2] \end{cases} \tag{19}$$

Si se despeja la ecuación [1] resulta en:

$$V_B \frac{R1||R2||\frac{1}{A}}{R1||\frac{1}{A}} = V_E \tag{20}$$

Y usando las siguientes igualdades de la operación paralelo:

$$R1||R2 = \frac{R1 * R2}{R1 + R2}$$

$$\frac{1}{R1||R2} = \frac{1}{R1} + \frac{1}{R2}$$

Se procede a despejar la ecuación (20) , resultando en:

$$V_E = V_B \frac{R2 + R1 * R2 * A}{R1 + R2 + A * R1 * R2} \tag{21}$$

Mientras que, si despejamos V_E en la ecuación [2], se obtiene que:

$$V_E = V_B - \frac{V_B}{R3 * A} + \frac{V_x}{R3 * A} \tag{22}$$

Si igualamos las ecuaciones (21) y (22) se llega a :

$$\frac{V_x}{R3 * A} = V_B(\frac{R2 + R1 * R2 * A}{R1 + R2 + A * R1 * R2} - 1 + \frac{1}{R3 * A}) \tag{23}$$

Luego, si el segundo término en el paréntesis lo multiplicamos por $R1 + R2 + A * R1 * R2$ tanto arriba como por abajo (multiplicamos por 1) resulta en:

$$\frac{V_x}{R3 * A} = V_B(\frac{R2 + R1 * R2 * A}{R1 + R2 + A * R1 * R2} - \frac{R1 + R2 + A * R1 * R2}{R1 + R2 + A * R1 * R2} + \frac{1}{R3 * A})$$

Si simplificamos la resta de los 2 primeros términos del paréntesis se llega a:

$$\frac{V_x}{R3 * A} = V_B(\frac{-R1}{R1 + R2 + A * R1 * R2} + \frac{1}{R3 * A}) \tag{24}$$

Si despejamos V_x de la ecuación (24), se obtiene:

$$V_x = V_B(\frac{-R1 * R3 * A}{R1 + R2 + A * R1 * R2} + 1) \tag{25}$$

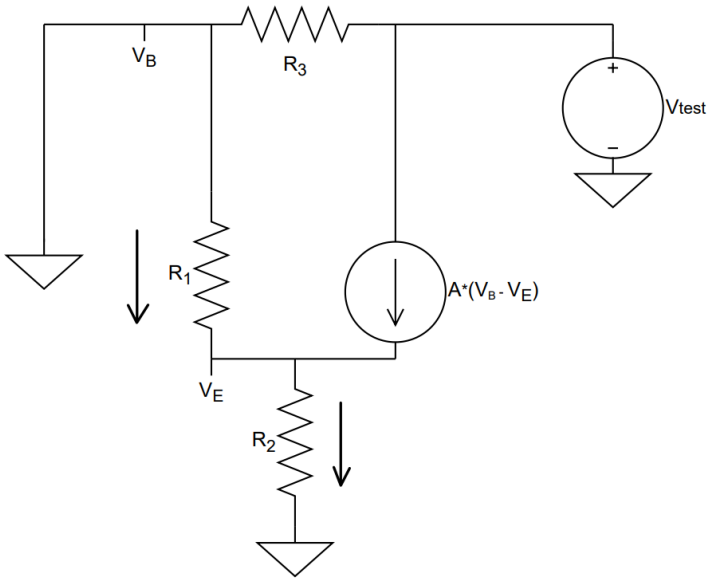
Finalmente, reduciendo el término del paréntesis se llega a:

$$V_x = V_B(\frac{-R1 * R3 * A + R1 + R2 + R1 * R2 * A}{R1 + R2 + A * R1 * R2}) \tag{26}$$

Por lo tanto, el voltaje de Thévenin V_T es:

$$V_x = V_T = V * \frac{R1 + R2 + A * R1 * R2 - A * R1 * R3}{R1 + R2 + A * R1 * R2} = -23{,}3286 \tag{27}$$

Mientras que para obtener la resistencia de Thévenin, desconectamos la fuente V y conectamos en el nodo V_x una fuente de prueba V_{test}.



Si analizamos el nodo V_E aplicando nodos, la ecuación que resulta es:

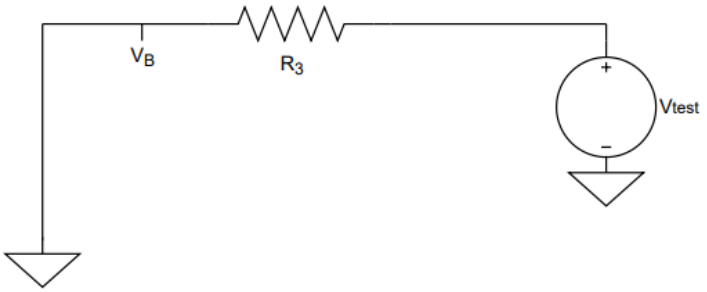
$$\frac{-V_E}{R1} - A * V_E = \frac{V_E}{R2} \tag{28}$$

La cual si despejamos resulta en:

$$V_E * (\frac{1}{R2} + A + \frac{1}{R1}) = 0 \tag{29}$$

Notamos que el término en parantesís corresponde a una suma de números positivos, por lo que ese término no puede ser 0, lo cual implica que V_E debe ser 0 V.

Por lo tanto, como el nodo V_E tiene un valor de 0 V, las resistencias R1 y R2 estan cortocircuitadas, junto a que la fuente de corriente dependiente se encontrará apagada debido a que $V_B - V_E = 0$, por lo tanto el circuito puede reducirse a:



Donde es fácil ver que la resistencia de Thévenin R_T es:

$$R_T = R3 = 2 \text{ k}\Omega \tag{30}$$

Pregunta B

Utilizando el circuito de la figura 6, planteamos la siguiente malla:

$$V_T - i * R_T - V_L - V_C = 0$$

$$i * R_T + V_L + V_C = V_T \tag{31}$$

Notamos que la corriente que circula por la resistencia, es la misma que la que pasa por el condensador e inductor debido a que los componentes estan en serie, por lo que usando esto, reemplazaremos i por i_C.

$$i_C * R_T + V_L + V_C = V_T \tag{32}$$

Notamos que solo falta un término para que toda la ecuación quede en función de i_C o V_C, por lo que para transformar el término faltante, usaremos la relación voltaje-corriente del inductor y que i_L es igual a i_C.

$$V_L = L\frac{di_L}{dt} = L\frac{di_C}{dt} \tag{33}$$

Y si analizamos la relación voltaje-corriente del condensador

$$i_C = C\frac{dV_C}{dt}$$

Y la derivamos con respecto al tiempo

$$\frac{di_C}{dt} = C\frac{d^2V_C}{dt^2} \tag{34}$$

Podemos ver que al juntar la ecuación (33) y (34), V_L resulta en:

$$V_L = LC\frac{d^2V_C}{dt^2} \tag{35}$$

Por lo tanto, si reemplazamos los términos la malla (32) resulta en:

$$R_TC\frac{dV_C}{dt} + LC\frac{d^2V_C}{dt^2} + V_C = V_T$$

Y si dividimos por LC, se llega finalmente a la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2V_C}{dt^2} + \frac{R_T}{L}\frac{dV_C}{dt} + \frac{V_C}{LC} = \frac{V_T}{LC} \tag{36}$$

Ya con una ecuación diferencial, si planteamos su forma homogénea y la comparamos con el polinomio característico:

$$x^2 + 2\zeta\omega_0 x + \omega_0^2 = 0$$

Se llega a:

$$x^2 + \frac{R_T}{L}x + \frac{1}{LC} = 0 \tag{37}$$

Por lo tanto, se llega al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \\ 2\zeta\omega_0 = \frac{R_T}{L} \end{cases} \tag{38}$$

Cuya solución para ζ corresponde a:

$$\zeta = \frac{\sqrt{C}R_T}{2\sqrt{L}} \tag{39}$$

Y si reemplazamos los variables por sus respectivos valores el coeficiente de amortiguamiento queda como:

$$\zeta = 1825{,}74\sqrt{C} \tag{40}$$

Por lo tanto, si igualamos ζ a 1, obtendremos el valor para que el circuito este críticamente amortiguado.

$$\zeta = 1 = 1825{,}74 * \sqrt{C} \Rightarrow C = 0{,}3\ \mu\text{F} \tag{41}$$

Dado el resultado de la ecuación, podemos concluir los siguientes valores para los cuales el circuito se encuentra subamortiguado y sobreamortiguado.

$$\begin{cases} C > 0{,}3\ \mu\text{F} \Rightarrow \text{Circuito sobreamortiguado} \\ C = 0{,}3\ \mu\text{F} \Rightarrow \text{Circuito críticamente amortiguado} \\ C < 0{,}3\ \mu\text{F} \Rightarrow \text{Circuito subamortiguado} \end{cases}$$

Pregunta C

Si reemplazamos los valores dados en la ecuación (40), y despejamos ω_0^2 de la ecuación (38) se obtienen los siguientes valores.

$$\omega_0 = 40824{,}8$$

$$\zeta = 0{,}0816496$$

A partir de lo cual, tambien podemos despejar ω_d

$$\omega_d = 40688{,}6$$

Por lo tanto, la solución hómogenea, como ζ es menor a 1 corresponde a:

$$y_h = e^{-\zeta * \omega_0 * t}(ACos(\omega_d * t) + BSin(\omega_d * t))$$

Si reemplazamos los valores termina siendo:

$$y_h(t) = e^{-3333{,}33t}(A\cos(40688{,}6t) + B\sin(40688{,}6t)) \tag{42}$$

Mientras que para obtener la solución particular sabemos que esta va a ser de la forma:

$$y_p(t) = \alpha g(t) + \beta \frac{dg(t)}{dt} + \gamma \frac{d^2 g(t)}{dt^2} \tag{43}$$

Con g(t) = $\frac{V_T}{LC}$.

Por lo tanto, si reemplazamos g(t) en la ecuación (43) Se obtiene que:

$$y_p(t) = \alpha \frac{V_T}{LC}$$

Las derivadas se cancelan debido a que g(t) es constante. Por lo tanto, para obtener el valor de la constante α, reemplazamos la ecuación (43) en la ecuación (36) que corresponde a la ecuación diferencial, obteniendo:

$$\alpha * \frac{V_T}{(LC)^2} = \frac{V_T}{LC}$$

$$\Rightarrow \alpha = LC$$

$$\Rightarrow y_p(t) = \alpha \frac{V_T}{LC} = LC \frac{V_T}{LC} = V_T$$

$$\Rightarrow y_p(t) = -23{,}3286 \tag{44}$$

Por lo tanto, la solución para el voltaje $V_C(t)$ corresponde a:

$$y(t) = y_p(t) + y_h(t)$$

$$V_C(t) = -23{,}3286 + e^{-3333{,}33t}(A\cos(40688{,}6t) + B\sin(40688{,}6t)) \tag{45}$$

Si imponemos la condición inicial $V_C(0) = 0$ se obtiene:

$$V_C(0) = 0 = -23{,}3286 + A \Rightarrow A = 23{,}3286$$

Por lo tanto encontramos nuestra primera condición inicial y la ecuación de voltaje queda como:

$$V_C(t) = -23{,}3286 + e^{-3333{,}3t}(23{,}3286Cos(40688{,}6t) + BSin(40688{,}6t))$$

Mientras que, como la ecuación diferencial es de segundo orden, significa que necesitamos $\frac{dV_C}{dt}(t = 0)$ para imponer la segunda condición y asi obtener la constante B. Gracias a la siguiente expresión, sabemos que la derivada del voltaje de un condensador esta asociado a la corriente.

$$i_C = C\frac{dV_C}{dt}$$

A partir de esto, notamos lo siguiente:

$$\frac{i_C(t)}{C} = \frac{dV_C}{dt}(t)$$

Dado que el switch se encontraba abierto, sabemos que en t = 0 la corriente del inductor es 0, lo cual significa que la corriente del inductor tiene este mismo valor, por lo tanto:

$$\frac{i_C(t=0)}{C} = 0 = \frac{dV_C}{dt}(t=0)$$

$$\Rightarrow \frac{dV_C}{dt}(t=0) = 0$$

Para simplificar la notación definimos:

$$\alpha = -3333{,}3$$

$$\omega = 40688{,}6$$

$$A = 23{,}3286$$

Por lo tanto, si calculamos la derivada del voltaje del condensador obtenemos:

$$\frac{dV_C}{dt}(t) = [\alpha * e^{\alpha}(ACos(\omega t) + BSin(\omega t)) + e^{\alpha}(-A\omega Sin(\omega t) + B\omega Cos(\omega t))]$$

Y si esta la evaluamos en t = 0

$$\frac{dV_C}{dt}(t) = 0 = (\alpha A + B\omega)$$

Lo cual si reducimos permite llegar a la siguiente igualdad:

$$-\frac{\alpha * A}{\omega} = B$$

Y si reemplazamos los valores se obtiene el valor de B:

$$B = 1{,}91113 \tag{46}$$

Por lo tanto, el voltaje $V_C(t)$ es:

$$V_C(t) = -23{,}3286 + e^{-3333{,}3t}(23{,}3286Cos(40688{,}6t) + 1{,}91113Sin(40688{,}6t)) \tag{47}$$

Preguntas extras

La siguiente pregunta tiene como objetivo que tengan otro ejercicio para ejercitar, esta no van a ser evaluada en su tarea.

En el circuito de la Figura 109 se sabe que el switch cambia de estar conectado al nodo 1 a estar conectado al nodo 2 en $t = 0$.

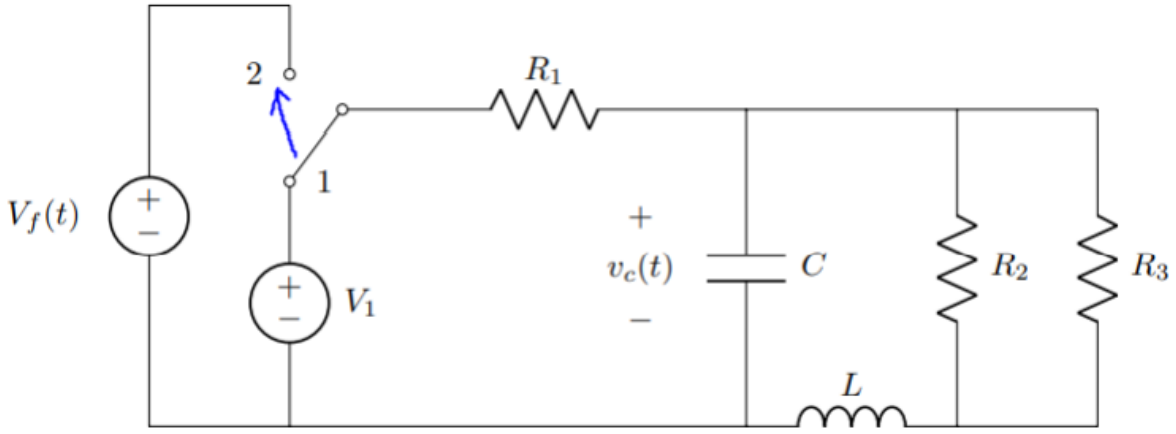


Figura 109

Responda las siguientes preguntas: **a)** Sin utilizar Laplace, determine la ecuación diferencial y las condiciones iniciales que permitirían calcular la variable $v_c(t)$ para t≥0. **b)** Calcule las frecuencias naturales e identifique el tipo de respuesta homogénea de $V_c(t)$. Para el desarrollo de la pregunta considere los siguientes valores:

$$V_1 = 10V$$

$$R_1 = 4\Omega$$

$$R_2 = 18\Omega$$

$$R_3 = 9\Omega$$

$$C = 0{,}25F$$

$$L = 1H$$

Solución:

a) Primero partimos encontrando las condiciones iniciales.

Para $t < 0$, V_1 está conectada, por lo que el voltaje en el capacitor esta dado por un divisor de voltaje,(Recordar que en este caso, como el switch lleva mucho tiempo en esta posición, C es circuito abierto y L es corto circuito):

$$V_c(0) = V_1 \frac{R_2||R_3}{R_2||R_3 + R_1} = 6V$$

Con eso, procedimos a determinar los otros parametros inicales:

$$i_L(0) = \frac{V_c(0)}{R_2||R_3} = 1A$$

$$V_c'(0) = 0$$

Ahora, si en $t = 0$ el switch se cambia a posicion 2, tendriamos las siguientes ecuaciones de malla:

$$V_f = i1R1 + V_C$$
$$V_C = i_L(R1||R2) + V_L$$

Por otro lado, sabemos que:

$$i_c = i_1 - i_l \rightarrow i_1 = i_L + i_c$$
$$V_L = L\frac{di_L}{dt}, i_c = C\frac{dV_c}{dt}$$

reemplazamos esto en la primera ecuación, tenemos:

$$V_f(t) = i_c(t)R_1 + i_L(t)R_1 + V_c(t)$$
$$V_f(t) = R_1C\frac{dV_c(t)}{dt} + i_L(t)R_1 + V_c(t)$$
$$i_L(t) = \frac{V_f(t)}{R_1} - C\frac{dV_c(t)}{dt} - \frac{V_c(t)}{R_1}$$

Luego reemplazando todo en la segunda ecuación de malla:

$$V_c(t) = R_3\|R_2\left(\frac{V_f(t)}{R_1} - C\frac{dV_c(t)}{dt} - \frac{V_c(t)}{R_1}\right) + L\left(\frac{dV_f(t)}{R_1dt} - C\frac{d^2V_c(t)}{dt^2} - \frac{dV_c(t)}{R_1dt}\right)$$
$$-CL\frac{d^2V_c(t)}{dt^2} - \frac{dV_c(t)}{dt}\left(\frac{L + R_1C\,(R_2\|R_3)}{R_1}\right) - V_c\left(\frac{R_2||R_3}{R_1} + 1\right) + \frac{dV_f(t)}{dt}\frac{L}{R_1} + V_f(t)\left(\frac{R_2||R_3}{r_1}\right)$$

Finalmente si dividimos por LC y reemplazamos los valores:

$$\frac{d^2V_c(t)}{dt^2} + 7\frac{dV_c(t)}{dt} + 10V_c(t) = \frac{dV_f(t)}{dt} + 6V_f(t)$$

b) Nos dicen que debemos encontrar la frecuencia natural y el tipo de respuesta del sistema, es decir, necesitamos encontrar los valores de w_0 y ζ. Conociendo el polinomio característico es sencillo llegar a estos valores.

$$\rightarrow \frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2} + 2\zeta\omega_0\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x(t) = g(t)$$

Con eso, es facil de ver que:

$$w_0 = \sqrt{10}$$

$$\zeta = \frac{7}{2\sqrt{10}} = 1{,}106 > 1$$

Por lo tanto, corresponde a una respuesta sobre-amortiguada.