Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ingeniería Eléctrica
IEE2123 - Circuitos Eléctricos
Profesor Samuel Córdova
Segundo Semestre 2022

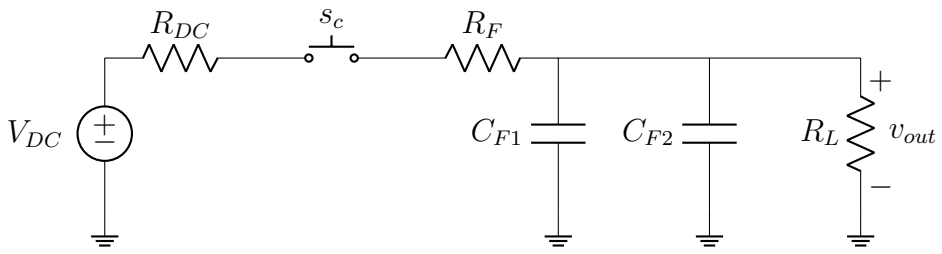
Interrogación 2

Instrucciones

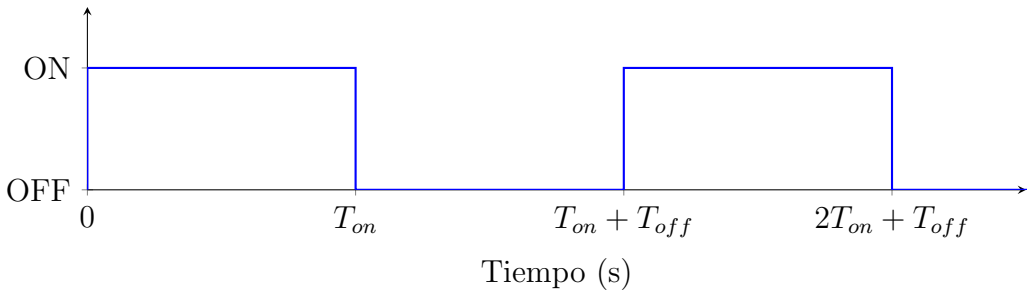
- Poner nombre y número de alumno en cada hoja.
- Resolver cada Problema en un conjunto diferente de hojas.
- No se permite utilizar apuntes. Se permite el uso de calculadora científica (no progamable).
- Justifique adecuadamente todas sus respuestas.
- No se puede hacer preguntas. Si hay un error en el enunciado o algo ambiguo, explique por qué y determine un supuesto razonable para poder responder.
- Tiempo: dos horas

Problema 1 (35 puntos)

Considere el siguiente circuito:



en donde s_c es un switch controlado de forma externa en base al siguiente perfil de operación:



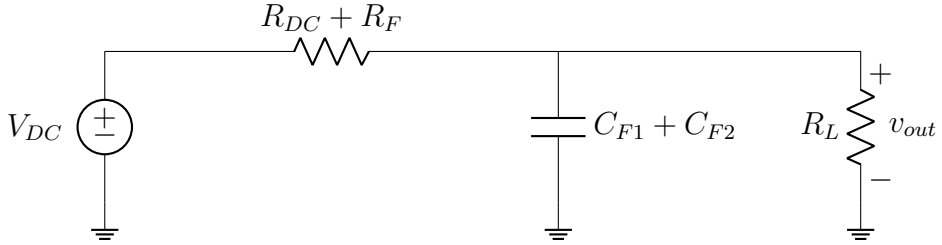
(a) (15 puntos) Determine las ecuaciones diferenciales que caracterizan la respuesta $v_{out}(t)$ del circuito con el switch conectado (ON) y desconectado (OFF).

(b) (20 puntos) Basado en las expresiones obtenidas en punto anterior, determine la duración de T_{on} y T_{off} de manera de que $v_{out}(t)$ sea una onda AC que oscila entre $\overline{V}$ y $\overline{V}/2$, con $\overline{V} > 0$. Además, indique las condiciones que los parámetros del circuito deben cumplir para generar dicha onda AC. Considere $v_{C_F}(0) = \overline{V}/2$ como condición inicial.
HINT: Recuerde que $\ln(x) \leq 0$ para $x \in [0, 1]$.

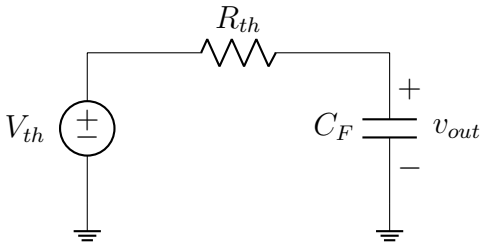
Solución:

(a) Procedemos a resolver el circuitos en sus dos estados posibles, i.e., con el switch conectado (ON) y el switch desconectado (OFF).

Por un lado, para el caso conectado (ON), se tiene el siguiente circuito:



el cual alternativamente puede ser representado por el equivalente de Thevenin observado desde los terminales del capacitor, resultando en:



en donde $C_F = C_{F1} + C_{F2}$, y en donde V_{th} y R_{th} pueden ser calculados como:

$$V_{th} = \frac{R_L}{R_L + R_{DC} + R_F} V_{DC}$$
$$R_{th} = (R_{DC} + R_F) \,||\, R_L$$

Basado en el circuito simplificado anterior, el voltaje de salida v_{out} en el dominio de Laplace puede ser obtenido mediante un divisor de voltaje:

$$V_{out}(s) = \frac{1/sC_F}{R_{th} + 1/sC_F} V_{th}(s) = \frac{1}{1 + sC_F R_{th}} V_{th}(s)$$

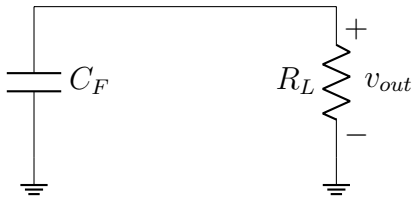
Y por tanto la ecuación diferencial para el switch conectado (ON) corresponde a:

$$C_F R_{th} \frac{dv_{out}(t)}{dt} + v_{out}(t) = V_{th}$$

o alternativamente:

$$\frac{dv_{out}(t)}{dt} + \frac{v_{out}(t)}{C_F R_{th}} = \frac{V_{th}}{C_F R_{th}}$$

Por el otro lado, para el caso desconectado (OFF), se tiene el siguiente circuito:



el cual corresponde a un caso particular del circuito anterior, pero con $V_{th} = 0$ y R_{th} siendo reemplazado por R_L. De esta forma, se tiene la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{dv_{out}(t)}{dt} + \frac{v_{out}(t)}{C_F R_L} = 0$$

(b) Por un lado, para calcular T_{on}, usamos la ecuación diferencial para el switch conectado (ON):

$$\frac{dv_{out}(t)}{dt} + \frac{v_{out}(t)}{C_F R_{th}} = \frac{V_{th}}{C_F R_{th}}$$

cuya solución análitica corresponde a:

$$v_{out}(t) = \left[\overline{V}/2 - V_{th}\right] \exp\left(\frac{-t}{C_F R_{th}}\right) + V_{th}$$

en donde $\overline{V}/2$ corresponde a la condición inicial. De esta forma, si queremos obtener una amplitud $\overline{V}$ para $t = T_{on}$, basta resolver la siguiente ecuacion:

$$\overline{V} = \left[\overline{V}/2 - V_{th}\right] \exp\left(\frac{-T_{on}}{C_F R_{th}}\right) + V_{th}$$

Desarrollando la expresión:

$$\exp\left(\frac{-T_{on}}{C_F R_{th}}\right) = \frac{\overline{V} - V_{th}}{\overline{V}/2 - V_{th}}$$
$$T_{on} = -C_F R_{th} \ln\left(\frac{\overline{V} - V_{th}}{\overline{V}/2 - V_{th}}\right)$$

donde se puede observar que para que $T_{on} \geq 0$, se debe cumplir que $\ln(\cdot) \leq 0$, y por tanto:

$$0 \leq \frac{\overline{V} - V_{th}}{\overline{V}/2 - V_{th}} \leq 1$$

lo que se traduce en el requerimiento de que $V_{th} \geq \overline{V}$, es decir:

$$V_{th} = \frac{R_L}{R_L + R_{DC} + R_F} V_{DC} \geq \overline{V}$$

Por otro lado, para calcular T_{off}, usamos la ecuación diferencial para el switch desconectado (OFF):

$$\frac{dv_{out}(t)}{dt} + \frac{v_{out}(t)}{C_F R_L} = 0$$

cuya solución analítica corresponde a:

$$v_{out}(t) = \overline{V} \exp\left(\frac{-t}{C_F R_L}\right)$$

en donde $\overline{V}$ corresponde a la condición inicial en este caso. De esta forma, si queremos obtener una amplitud $\overline{V}/2$ para $t = T_{off}$, basta resolver la siguiente ecuacion:

$$\overline{V}/2 = \overline{V} \exp\left(\frac{-T_{off}}{C_F R_L}\right)$$

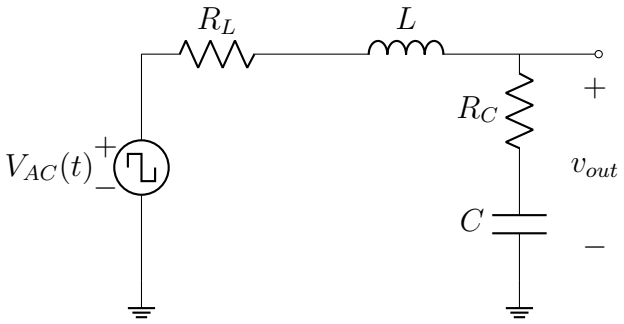
Desarrollando la expresión:

$$\exp\left(\frac{-T_{off}}{C_F R_L}\right) = \frac{\overline{V}/2}{\overline{V}}$$
$$T_{off} = -C_F R_L \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

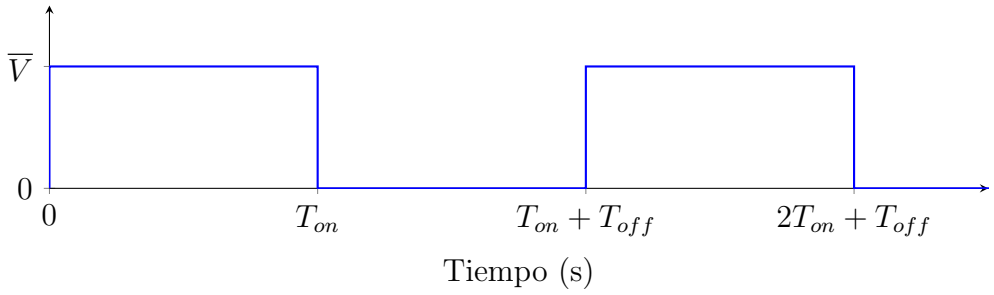
para la cual no hay requerimientos adicionales a los ya descritos anteriormente.

Problema 2 (30 puntos)

Considere el siguiente circuito:



en donde $V_{AC}(t)$ tiene la siguiente forma:



(a) (10 puntos) Determine las ecuaciones diferenciales que caracterizan $v_{out}(t)$ para $t \in (0, T_{on}+T_{off}]$.

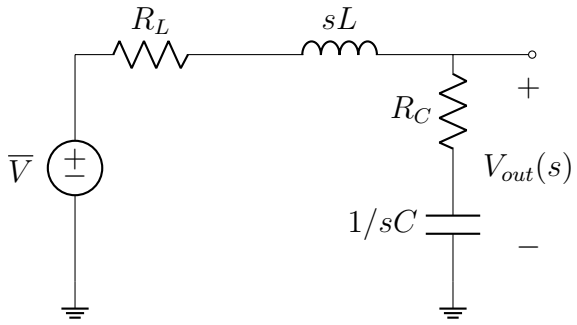
(b) (15 puntos) Considere que las resistencias R_L y R_C son relativamente pequeñas en constraste con la capacitancia C e inductancia L. Determine la respuesta $v_{out}(t)$ para este caso, indicando las fórmulas y gráfico correspondiente para $t \in [0, T_{on}+T_{off}]$. Asuma condicionales iniciales nulas para $t = 0$ y que T_{on} es tal que $v_{out}(T_{on}) = 0$.
HINT: $\frac{d}{dt}e^t = e^t$, $\frac{d}{dt}\sin(t) = \cos(t)$, $\frac{d}{dt}\cos(t) = -\sin(t)$

(c) (5 puntos) Suponga que ahora R_L y R_c tienen valores comparables al de C y L. ¿Como espera que sea la forma de la respuesta $v_{out}(t)$ en este caso? No es necesario determinar las ecuaciones para este punto, sino más bien hacer un análisis cualitativo.

Solución:

(a) El circuito tiene dos estados posibles, uno para $t \in (0, T_{on}]$ y otro para $t \in (T_{on}, T_{on}+T_{off}]$.

Para el primer caso, i.e., $t \in (0, T_{on}]$, se tiene el siguiente circuito en el dominio de Laplace:



en donde el voltaje de salida puede ser calculado como:

$$V_{out}(s) = \frac{R_C + 1/sC}{R_L + R_C + sL + 1/sC}\overline{V} = \frac{1 + sCR_C}{s^2LC + sC(R_C + R_L) + 1}\overline{V}$$

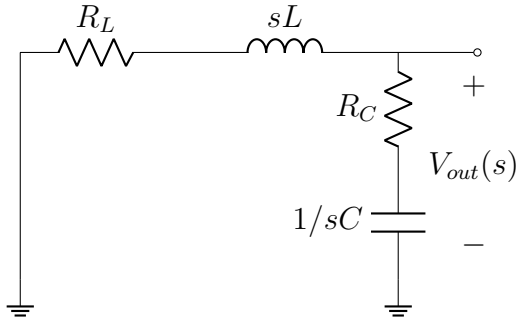
resultando en la siguiente ecuación diferencial:

$$LC\frac{d^2v_{out}(t)}{dt^2} + C(R_C + R_L)\frac{dv_{out}(t)}{dt} + v_{out}(t) = \overline{V}$$

o alternativamente

$$\frac{d^2 v_{out}(t)}{dt^2} + \frac{(R_C + R_L)}{L}\frac{dv_{out}(t)}{dt} + \frac{v_{out}(t)}{LC} = \frac{\overline{V}}{LC}$$

Para el segundo caso, i.e., $t \in (T_{on}, T_{on} + T_{off}]$, se tiene el siguiente circuito en el dominio de Laplace:



el cual es idéntico al primer caso, pero con $\overline{V} = 0$. De esta forma, se tiene la siguiente ecuación diferencial para el segundo caso:

$$\frac{d^2 v_{out}(t)}{dt^2} + \frac{(R_C + R_L)}{L}\frac{dv_{out}(t)}{dt} + \frac{v_{out}(t)}{LC} = 0$$

(b) En dicho caso se tiene que $R_C + R_L \ll L$, lo que resulta en las siguientes ecuaciones diferenciales actualizadas para el circuito:

$$\frac{d^2 v_{out}(t)}{dt^2} + \frac{v_{out}(t)}{LC} = \frac{\overline{V}}{LC} \quad \text{para } t \in (0, T_{on}]$$
$$\frac{d^2 v_{out}(t)}{dt^2} + \frac{v_{out}(t)}{LC} = 0 \quad \text{para } t \in (T_{on}, T_{on} + T_{off}]$$

De acuerdo a el polinomio característico $r^2 + 2\zeta\omega_0 r + \omega_0^2 = 0$, ambas ecuaciones tienen un coeficiente de amortiguación $\zeta = 0$ y frecuencia natural $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, por lo que tenemos las siguientes solución homogeneas (H) describiendo la respuesta del circuito:

$$v_{out,H}(t) = K_1^{ON}\cos(\omega_0 t) + K_2^{ON}\sin(\omega_0 t) \quad \text{para } t \in (0, T_{on}]$$
$$v_{out,H}(t) = K_1^{OFF}\cos(\omega_0 t) + K_2^{OFF}\sin(\omega_0 t) \quad \text{para } t \in (T_{on}, T_{off} + T_{on}]$$

Respecto a la solución forzada (P), tenemos que $g(t) = \overline{V}/LC$ para $t \in (0, T_{on}]$, y $g(t) = 0$ para $t \in (T_{on}, T_{off} + T_{on}]$, resultando en:

$$v_{out,P} = \overline{V} \quad \text{para } t \in (0, T_{on}]$$
$$v_{out,P} = 0 \quad \text{para } t \in (T_{on}, T_{off} + T_{on}]$$

Juntando las soluciones homogeneas y particulares:

$$v_{out}(t) = K_1^{ON}\cos(\omega_0 t) + K_2^{ON}\sin(\omega_0 t) + \overline{V} \quad \text{para } t \in (0, T_{on}]$$
$$v_{out}(t) = K_1^{OFF}\cos(\omega_0 t) + K_2^{OFF}\sin(\omega_0 t) \quad \text{para } t \in (T_{on}, T_{off} + T_{on}]$$

Respecto a los valores de los coeficientes K_1^{ON}, K_2^{ON}, K_1^{OFF}, y K_2^{OFF}, estos pueden ser determinados en base a las condiciones iniciales del circuito, como se describe a continuación.

Por un lado, para K_1^{ON} y K_2^{ON}, tenemos que $v_{out}(0) = 0$ y $v'_{out}(0) = 0$, resultando en:

$$v_{out}(0) = K_1^{ON}\cos(0) + K_2^{ON}\sin(0) + \overline{V} = 0 \Longrightarrow K_1^{ON} = -\overline{V}$$
$$v'_{out}(0) = -K_1^{ON}\omega_0\sin(0) + K_2^{ON}\omega_0\cos(0) = 0 \Longrightarrow K_2^{ON} = 0$$

por lo que la respuesta del circuito para $t \in (0, T_{on}]$ corresponde a:

$$v_{out}(t) = \overline{V}\left[1 - \cos(\omega_0\, t)\right] \tag{1}$$

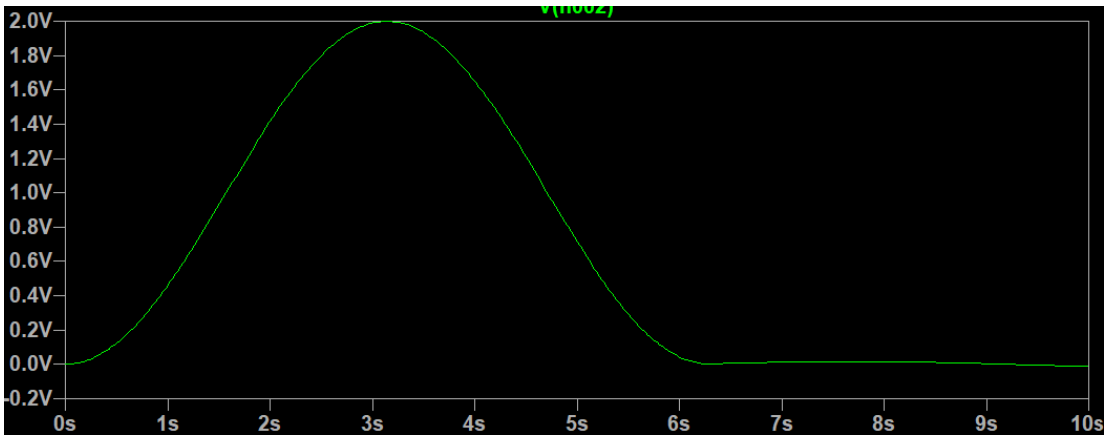
Por otro lado, para K_1^{OFF} y K_2^{OFF}, tenemos que $v_{out}(T_{on}) = 0$ por enunciado, lo cual reemplazando en (1) lleva a que $v'_{out}(T_{on}) = 0$. De esta forma, para $t \in (T_{on}, T_{on} + T_{off}]$ también tenemos condiciones iniciales nulas, y por tanto:

$$v_{out}(0) = K_1^{OFF}\cos(0) + K_2^{OFF}\sin(0) = 0 \Longrightarrow K_1^{OFF} = 0$$
$$v'_{out}(0) = -K_1^{OFF}\omega_0\sin(0) + K_2^{OFF}\omega_0\cos(0) = 0 \Longrightarrow K_2^{OFF} = 0$$

por lo que la respuesta del circuito para $t \in (T_{on}, T_{on} + T_{off}]$ corresponde a:

$$v_{out}(t) = 0$$

A continuación se muestra un gráfico con la forma de la respuesta de $v_{out}(t)$, en donde para $t \in (0, T_{on}]$ se tiene una respuesta de forma sinusoidal que dura hasta T_{on}, en donde $v_{out}(T_{on}) = 0$, y que luego empieza a ser igual a cero para $t \in (T_{on}, T_{on} + T_{off}]$.



(c) Para el análisis hay que recordar que la respuesta homogenea del circuito estaba originalmente descrita por:

$$\frac{d^2 v_{out}(t)}{dt^2} + \frac{(R_C + R_L)}{L}\frac{dv_{out}(t)}{dt} + \frac{v_{out}(t)}{LC} = 0$$

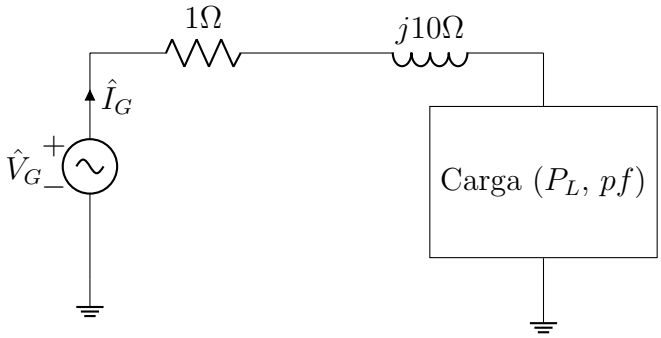
en donde para (b) se tenía que $R_C + R_L \ll L$, lo cual resultaba a un coeficiente de amortiguacion $\zeta = 0$ y por tanto en una respuesta puramente sinusoidal.

De esta forma, a medida que R_C y R_L vayan aumentando, el valor de ζ irá creciendo, lo cual alterará la forma de la respuesta $v_{out}(t)$, la cual:

- Seguirá siendo sinosoidal pero junto a una amortiguación exponencial en caso que $\zeta < 1$
- O cambiará a una respuesta del tipo exponencial en caso que $\zeta \geq 1$

Problema 3 (35 puntos)

Considere el siguiente circuito alimentado por una fuente sinusoidal de frequencia 50 Hz:



donde $\hat{V}^G$ e $\hat{I}^G$ son fasores representado el voltaje y corriente de la fuente de generación G; $P_L = 100$ W es la potencia activa consumida por la carga; y $pf = 0{,}8$ (en adelanto) indica el factor de potencia de la carga. Además, considere que el voltaje de carga tiene una magnitud de 220 Vrms.

(a) (10 puntos) Determine la potencia aparente, activa y real consumida por la carga. Además, explique con sus propias palabras el significado de cada uno de estos conceptos.

(b) (15 puntos) ¿Cuál es el voltaje $\hat{V}^G$ y corriente $\hat{I}^G$ que deben ser suministrados por G? Grafique sus resultados en función del tiempo, haciendo énfasis en la magnitud y desfases de las ondas AC.

(c) (10 puntos) Suponga que ahora desea modificar el factor de potencia de la carga a $pf = 0$, para la cual dispone de un capacitor/inductor que puede ser conectado en paralelo a la carga. ¿Conectaría un inductor o un capacitor? ¿Cual debería ser la capacitancia/inductancia del componente?.

Solución:

(a) Primero procedemos a calcular la potencia aparente $|\hat{S}_L|$ en base a la potencia activa $P_L = 100$ W y factor de potencia $pf = 0{,}8$:

$$|\hat{S}_L| = \frac{P_L}{pf} = \frac{100}{0{,}8} = 125 \text{ VA}$$

Luego, podemos obtener el valor absoluto de la potencia reactiva utilizando la siguiente expresion

$$|Q_L| = \sqrt{125^2 - 100^2} = 75 \text{ VAr}$$

Recordando que el factor de potencia está en adelanto, sabemos que $\theta_v - \theta_i < 0$ (corriente adelanta a voltaje), por lo que $Q_L < 0$ (carga capacitiva), resultando en:

$$Q_L = -75 \Longrightarrow \hat{S}_L = 100 - j75 = 125\angle -36{,}87^\circ$$

(**OJO:** En el enunciado solo se pide calcular la potencia aparente $|\hat{S}_L|$ y la potencia activa/real P_L. El cálculo de Q_L no es solicitado, pero si necesario para los puntos (b) y (c) del problema.)

Respecto a la definición de los conceptos de potencia activa/real y potencia aparente, lo importante es destacar que la primera se refiere a la potencia promedio entregada y/o consumida en un periodo completo T, mientras que la segunda además incorpora la componente sinusoidal que oscila en torno a la potencia promedio.

(b) Primero procedemos a determinar la corriente $\hat{I}_G$ usando el voltaje de la carga $\hat{V}_L = 220\sqrt{2}\angle 0°$ y la potencia compleja $\hat{S}_L$ anteriormente determinada:

$$\hat{I}_G = \left(\frac{2 \cdot \hat{S}_L}{\hat{V}_L}\right)^* = \frac{2 \cdot \hat{S}_L^*}{\hat{V}_L^*} = \frac{250\angle 36{,}87°}{220\sqrt{2}\angle 0°} \approx 0{,}804\angle 36{,}87° \text{ A}$$

en donde es importante destacar que se optó por tomar como referencia (0°) a $\hat{V}_L$ en vez de $\hat{V}_G$ para facilitar los cálculos.

Luego, usando $\hat{I}_G$, es posible calcular $\hat{V}_G$ de acuerdo a las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
\hat{V}_G - \hat{V}_L = \hat{I}_G \cdot (1 + j10) &= (0{,}804\angle 36{,}87°) \cdot (10{,}05\angle 84{,}29°) \\
\hat{V}_G - \hat{V}_L &= 8{,}08\angle 121{,}16° = -4{,}18 + j6{,}914 \\
\hat{V}_G = -4{,}18 + j6{,}914 + \hat{V}_L &= -4{,}18 + j6{,}914 + 220\sqrt{2} \\
\hat{V}_G &= 306{,}95 + j6{,}914 \approx 307{,}028\angle 1{,}29° \text{ V}
\end{aligned}$$

Respecto a los gráficos solicitados, lo importante es que se sepan interpretar las magnitudes y desfases calculados para $\hat{V}_G$ y $\hat{I}_G$. Basta que se muestren las ondas sinusoidales con sus amplitudes y desfases correspondientes, así como la frequencia del sistema (50 Hz por enunciado).

(c) (**OJO:** En el enunciado se pide $pf = 0$ cuando en realidad el ejercicio estaba enfocado al caso de $pf = 1$, i.e., $P_L = |\hat{S}_L|$. Por esta razón, la pregunta (c) fue eliminada. De todas maneras, a continuación se muestra la solución del problema para el caso de $pf = 1$)

Para lograr un factor de potencia $pf = 1$, basta con anular la componente reactiva de la carga, la cual ya fue calculada en (a) y corresponde a $Q_L = -75$ VAr. De esta forma, basta conectar un inductor en paralelo ($Q > 0$) que entregue una potencia reactiva de $Q_{IND} = +75$ VAr.

Respecto a la inductancia L del inductor, esta puede ser calculada usando la siguiente

fórmula:

$$\begin{aligned} S_{IND} = 0 + jQ_{IND} = \frac{1}{2}\frac{|V_L|^2}{Z_{IND}^*} = \frac{1}{2}\frac{|V_L|^2}{(-j\omega L)} \\ \implies j75 = \frac{1}{2}\frac{\left(220\sqrt{2}\right)^2}{(-j \cdot 2\pi 50 \cdot L)} \\ \implies L = \frac{2\pi 50 \cdot 75}{220^2} \approx 0{,}487 \text{ H} \end{aligned}$$

donde Z_{IND} corresponde a la impedancia del inductor, con $\omega = 2\pi 50$.