ESCUELA DE INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA ELECTRICA
IEE 2123
Circuitos Eléctricos
Segundo Semestre 2025

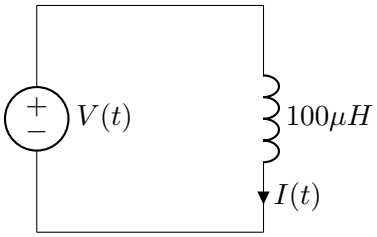
Tarea 5

Fecha Entrega: Miércoles 8 de octubre hasta las 18:00 Hrs.

- La tarea debe ser entregada en un archivo `.pdf` y cargada en el cuestionario de Canvas habilitado, antes del plazo. El formato del archivo debe ser `T1_Apellido_Nombre.pdf`
- Debe indicar claramente su desarrollo en cada ejercicio, puesto que problemas sin desarrollos no serán considerados corregidos.
- Tareas con algún problema en blanco no serán consideradas y obtendrán la nota mínima
- Las tareas deben ser entregas en en algún editor de texto como Word o LaTeX. En particular, se recomienda LaTeX(Overleaf) por su facilidad para manejar ecuaciones.
- Libros, papers o cualquier material usado debe ser referenciado apropiadamente. Material no debidamente referenciado será penalizado mediante descuentos en la nota.
- Esta tarea tiene como objetivos la revisión de ciertos temas específicos vistos en clases, los cuales son indicados en el apartado "Tema de la Tarea". La utilización de métodos distintos a los solicitados en cada ejercicio no esta permitido, y resultaran en la no corrección del ejercicio.
- En caso de utilizar herramientas de Inteligencia Artificial (IA), estas solo deben emplearse como apoyo en la búsqueda de información o en la redacción, sin incluir directamente en las respuestas una reproducción literal del contenido generado. Además, no se debe proporcionar a la IA la pregunta ni una variación de esta como instrucción directa. **En el caso de usar IA sin la debida citación, se asignará nota 1.0 en la tarea.**
- Se atenderán dudas mediante Foro en Canvas UC, el cual estará habilitado hasta 1 día antes de la fecha de entrega de la tarea.

Pregunta 1 (12 puntos)

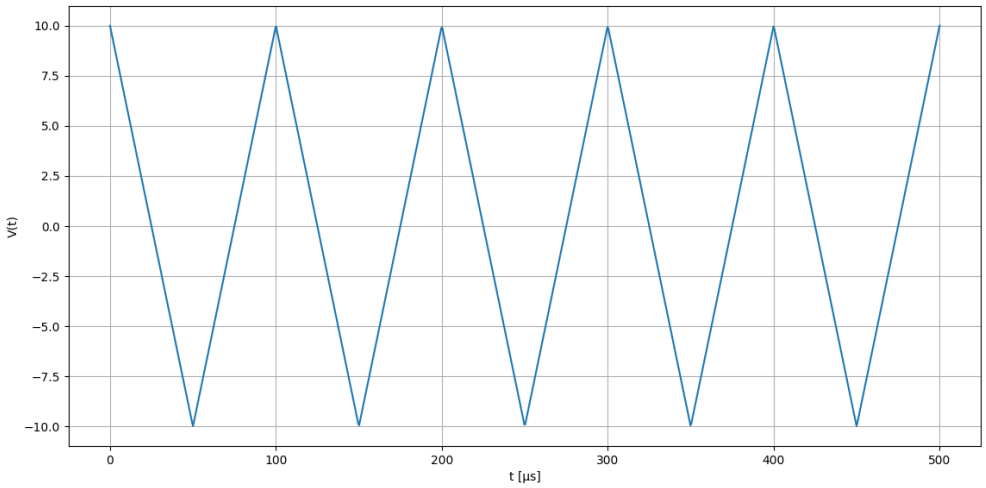
Considere el siguiente circuito alimentado por una fuente de voltaje $V(t)$ que varía en el tiempo. Considere que los elementos que almacenan energía están descargados en $t = 0$.



(a) Calcule y grafique $I(t)$ para $t = 0 \ldots 500\mu s$, considerando que $V(t)$ está dada por la siguiente expresión [5 pts]:

$$V(t) = 10 \cos\left(2\pi \cdot 10 \cdot 10^3\, t\right)$$

(b) Calcule y grafique $I(t)$, considerando que $V(t)$ está ahora dada la siguiente señal triangular *simétrica y periódica* [5 pts]:



HINT: Aproveche la simetría y periodicidad de la señal triangular para facilitar sus cálculos

(c) Compare los gráficos de $I(t)$ resultantes de los puntos (a) y (b) anteriores. Destaque las principales similitudes y diferencias observadas entre ambos casos [2pts].

Solución:

(a) Dada la ecuación del inductor:

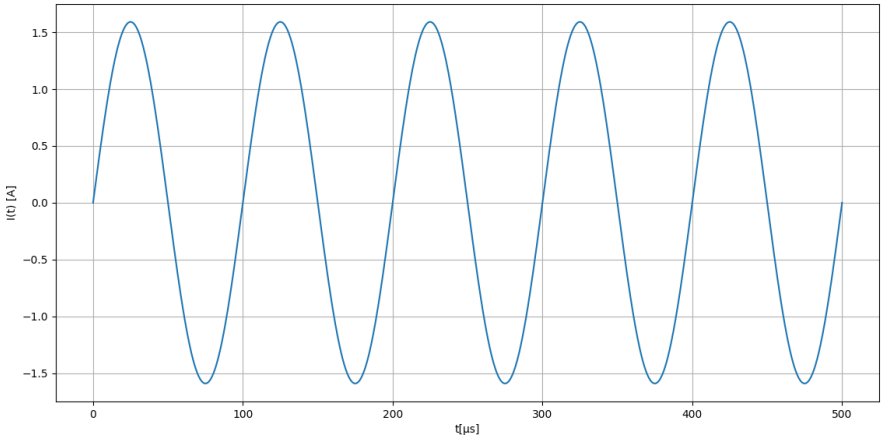
$$V = L\frac{di(t)}{dt}$$

Despejamos la derivada de la corriente e integramos:

$$I(t) = \frac{1}{L}\int_0^t V(\tau)d\tau$$

$$I(t) = \frac{1}{100 \cdot 10^{-6}} \int_0^t 10 \cos\left(2\pi \cdot 10 \cdot 10^3 \, \tau\right) d\tau = \frac{10}{2\pi} \sin(2\pi \cdot 10 \cdot 10^3 t)$$

Luego, el gráfico de la corriente se muestra a continuación:



- **3 pt por la expresión de I(t)**
- **2 pt por el gráfico de I((t)**

(b) Del item anterior sabemos que:

$$I(t) = \frac{1}{L} \int_0^t V(\tau) d\tau$$

Notemos que como la integral de la señal triangular en un periodo es 0, entonces podemos concluir que cada periodo es independiente del otro. Esto implica que la corriente también será cíclica. Entonces, calcularemos la corriente para el primer ciclo unicamente, el resto de los ciclos serán repeticiones de lo anterior.
El voltaje en el primer ciclo está dado por:

$$V(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ -4 \cdot 10^5 t + 10, & 0 \leq t \leq 0.5 \cdot 10^{-4} \\ 4 \cdot 10^5 t - 30, & 0.5 \cdot 10^{-4} \leq t \leq 10^{-4} \end{cases}$$

Entonces, la expresión de la corriente para el intervalo $0 \leq t \leq 0.5 \cdot 10^{-4}$ está dada por:

$$I(t) = \frac{1}{100 \cdot 10{-}6} \int_0^t (-4 \cdot 10^5 \tau + 10) d\tau = 10^4 (10t - 2 \cdot 10^5 t^2) = 10^5 t - 2 \cdot 10^9 t^2$$

Luego, la expresión para el intervalo $0.5 \cdot 10^{-4} \leq t \leq 10^{-4}$:

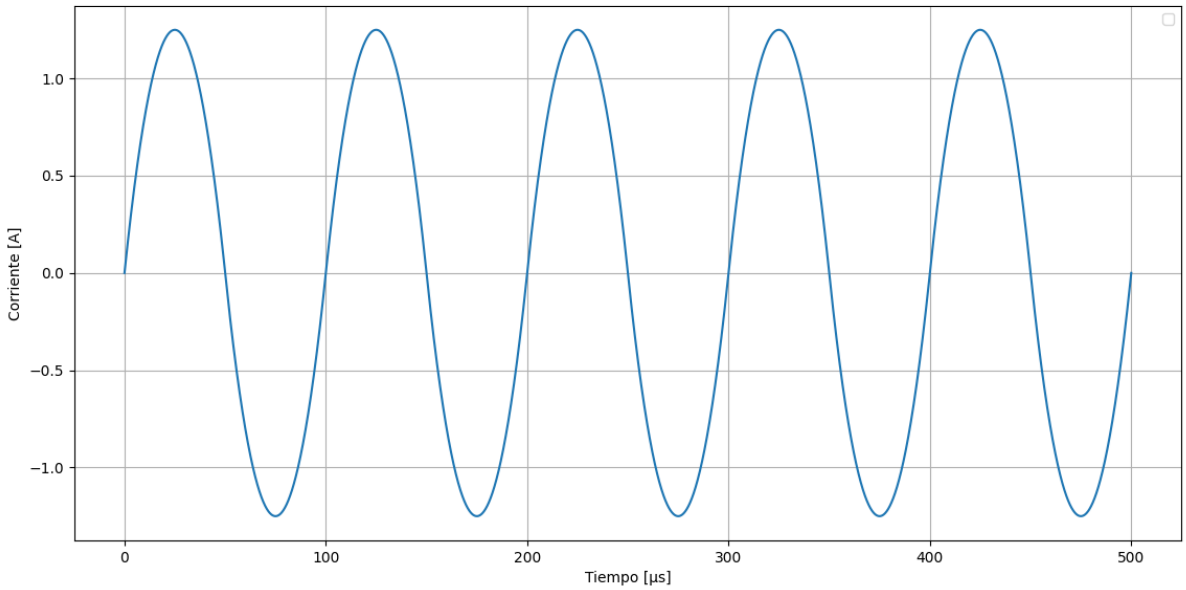
$$I(t) = (10^5 (0.5 \cdot 10^{-4}) - 2 \cdot 10^9 (0.5 \cdot 10^{-4})^2) + \frac{1}{100 \cdot 10{-}6} \int_{0.5 \cdot 10^{-4}}^t (4 \cdot 10^5 \tau - 30) d\tau$$

$$= 10^4 (2 \cdot 10^5 (t^2 - (0.5 \cdot 10^{-4})^2) - 30(t - 0.5 \cdot 10^{-4})) = 2 \cdot 10^9 (t^2 - (0.5 \cdot 10^{-4})^2) - 3 \cdot 10^5 (t - 0.5 \cdot 10^{-4})$$

Por lo tanto, una expresión para la corriente en el primer periodo, y sucesivamente, está dada por:

$$I(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 10^5 t - 2 \cdot 10^9 t^2, & 0 \leq t \leq 0.5 \cdot 10^{-4} \\ 2 \cdot 10^9 (t^2 - (0.5 \cdot 10^{-4})^2) - 3 \cdot 10^5 (t - 0.5 \cdot 10^{-4}), & 0.5 \cdot 10^{-4} \leq t \leq 10^{-4} \end{cases}$$

El gráfico resultante de la corriente está dado por:



- **3 pt por la expresión de I(t)**
- **2 pt por el gráfico de I((t)**

(c) **Principales similitudes:**

- Forma similar desde los gráficos.

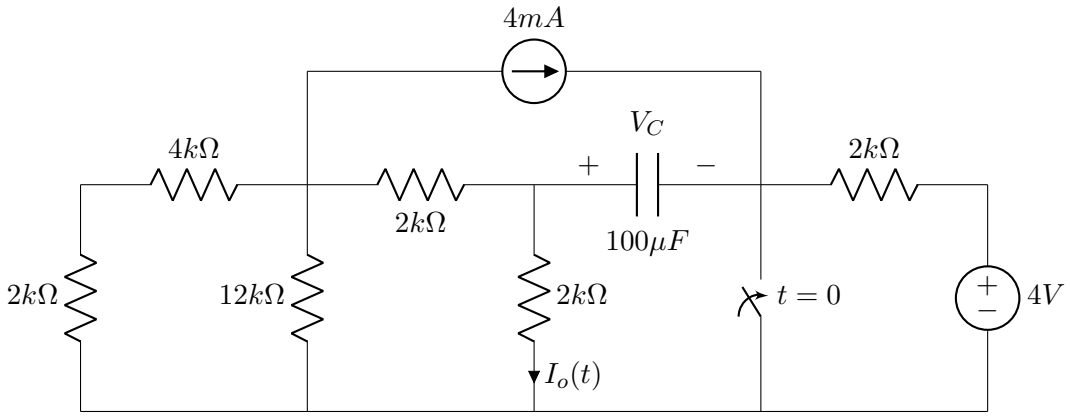
Principales diferencias:

- Distinta amplitud
- La corriente en el primer caso es sinusoidal y en el segundo caso es cuadrática.
- Lo anterior muestra que si se alimenta al inductor con una fuente sinusoidal, la corriente también será sinusoidal, pero si se alimenta con voltaje triangular, la corriente no será triangular.

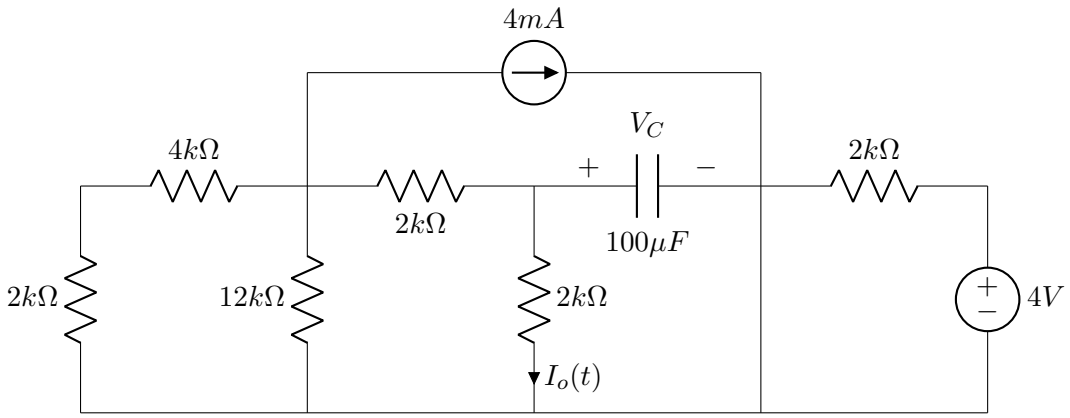
- **1 pt por explicitar que tienen formas similares**
- **1 pt por cualquiera de los puntos en la lista de diferencias**

Pregunta 2 (12 puntos)

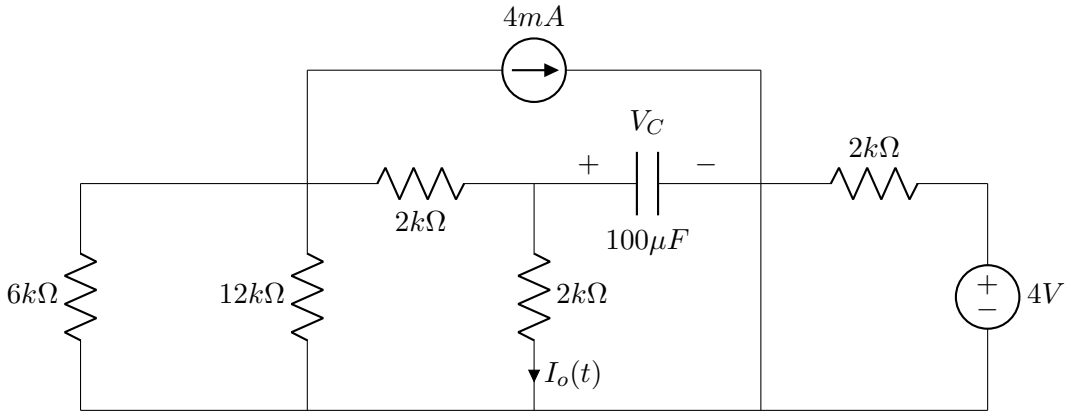
Encuentre $i_o(t)$ para $t > 0$. Asuma que el capacitor en $t = 0$ cumple que $V_c(0) = 1V$.

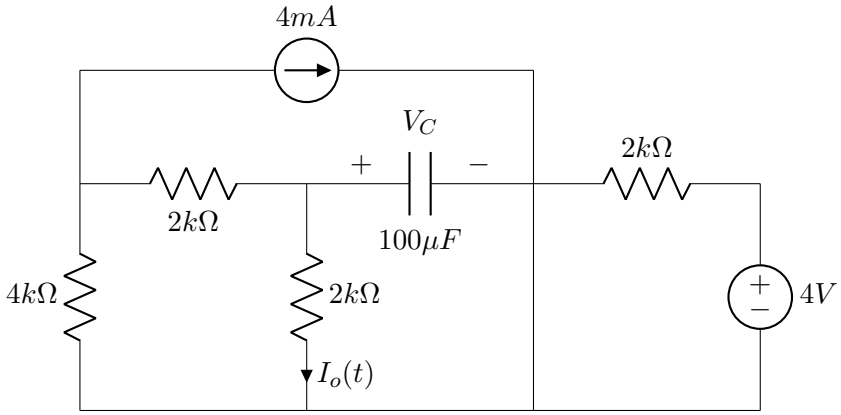


Solución
El circuito en para $t > 0$ está dado por:

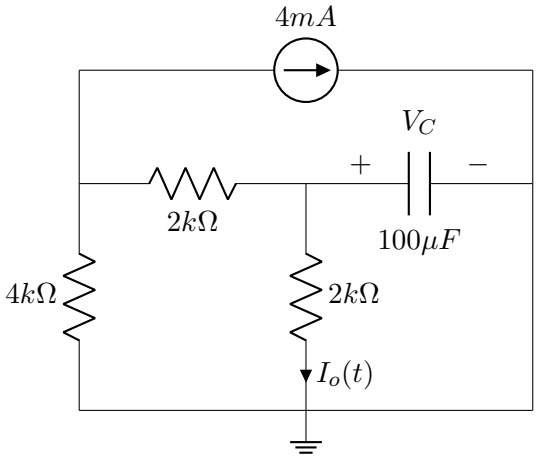


Es posible simplificar algunos aspectos del circuito mediante reducción de resistencias:

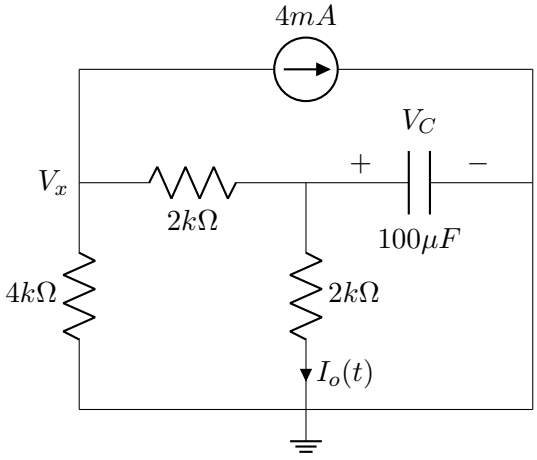




Además, la parte derecha del circuito es independiente de la parte izquierda:



Luego definiendo el nodo V_x:



Aplicando método de nodos:

$$\frac{V_x - V_c}{2 \cdot 10^3} = \frac{V_c}{2 \cdot 10^3} + C\frac{dV_c}{dt}$$

$$\frac{V_x}{4 \cdot 10^3} + \frac{V_x - V_c}{2 \cdot 10^3} + 4 \cdot 10^{-3} = 0$$

Desarrollando los sistemas:

$$\frac{V_x}{2\cdot 10^3} = V_C(\frac{1}{2\cdot 10^3}+\frac{1}{2\cdot 10^3}) + 10^{-4}\frac{dV_c}{dt}$$

$$V_x(\frac{1}{4\cdot 10^3}+\frac{1}{2\cdot 10^3}) + 4\cdot 10^{-3} = \frac{V_c}{2\cdot 10^3}$$

De la segunda ecuación tenemos que:

$$V_x = \frac{\frac{V_c}{2\cdot 10^3} - 4\cdot 10^{-3}}{(\frac{1}{4\cdot 10^3}+\frac{1}{2\cdot 10^3})} = \frac{2V_c}{3} - \frac{16}{3}$$

Reemplazando en la primera ecuación:

$$(\frac{1}{2\cdot 10^3})(\frac{2V_c}{3} - \frac{16}{3}) = V_C(\frac{1}{2\cdot 10^3}+\frac{1}{2\cdot 10^3}) + 10^{-4}\frac{dV_c}{dt}$$

$$\frac{V_c}{3\cdot 10^3} - \frac{8}{3\cdot 10^3} = V_C(\frac{1}{2\cdot 10^3}+\frac{1}{2\cdot 10^3}) + 10^{-4}\frac{dV_c}{dt} =$$

$$\frac{V_c}{3\cdot 10^3} - \frac{8}{3\cdot 10^3} = V_C\frac{1}{\cdot 10^3} + 10^{-4}\frac{dV_c}{dt} =$$

$$-\frac{80}{3} = V_C\frac{20}{3} + \frac{dV_c}{dt}$$

La solución homogénea se calcula con el polinomio característico:

$$\lambda = \frac{-20}{3}$$

Entonces, la solución homogénea está dada por:

$$V_{c,h}(t) = ke^{-\frac{20t}{3}}$$

Luego, para la solución particular proponemos una solución constante. Si evaluamos en la edo llegamos a que:

$$V_{c,p}(t) = -4$$

Por lo que la solución general es:

$$V_c(t) = -4 + ke^{-\frac{20t}{3}} = -4 + ke^{-\frac{20t}{3}}$$

El valor de la constante lo encontramos con la condición:

$$V_c(0) = -4 + k = 1 \implies k = 5$$

Entonces, el voltaje está dado por:

$$V_c(t) = -4 + 5e^{-\frac{20t}{3}}$$

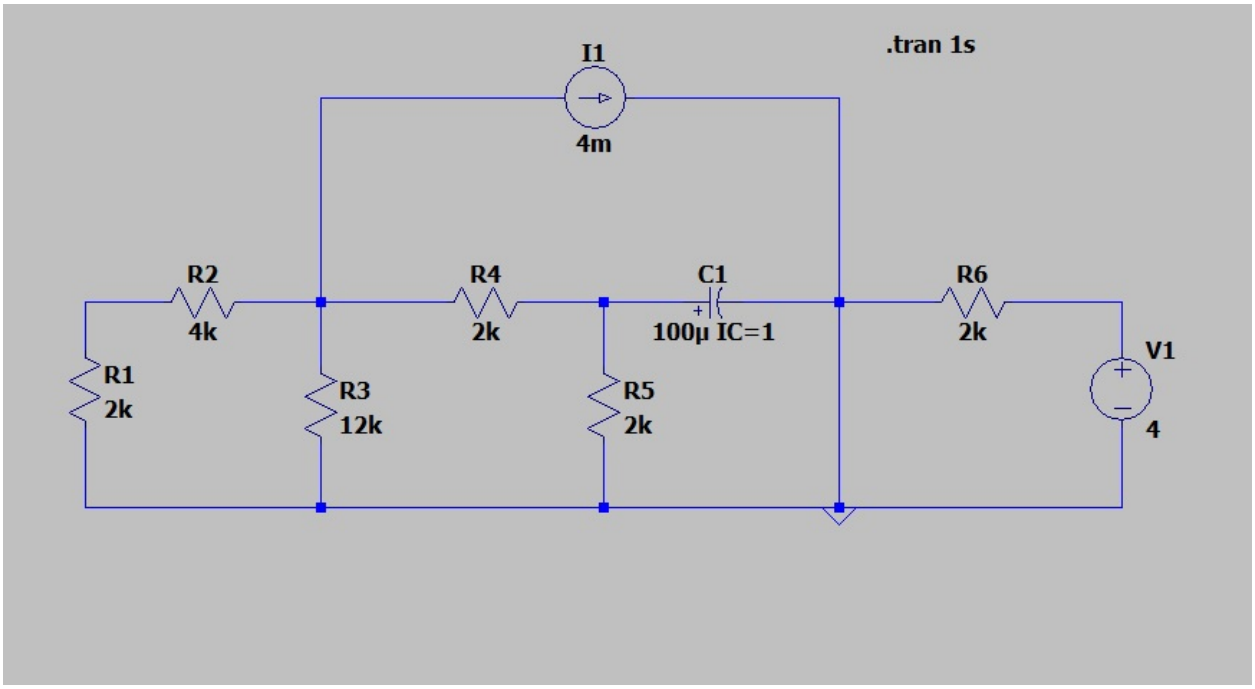
Finalmente, la corriente $I_o(t)$ está dada por:

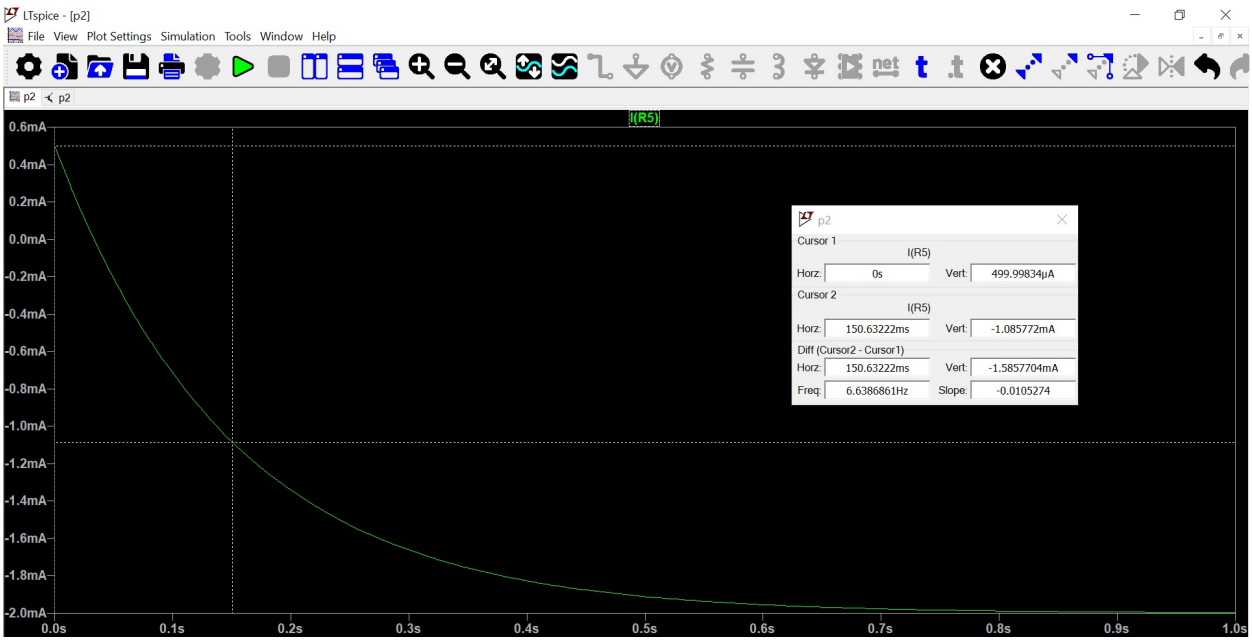
$$I_o(t) = \frac{V_c(t)}{2\cdot 10^3} = -2\cdot 10^{-3} + 2.5\cdot 10^{-3}e^{-\frac{20t}{3}}$$

- **6 por la ecuación diferencial que modela el voltaje en el capacitor u otra variable**

- **2 pt por la solución homogénea**
- **2 pt por la solución particular**
- **2 pt por la solución incorporando la condición inicial**

Si se resuelve por otros métodos y llega al resultado correcto asignar todo el puntaje.
A continuación, se muestra una simulación en LTSpice que comprueba el resultado:

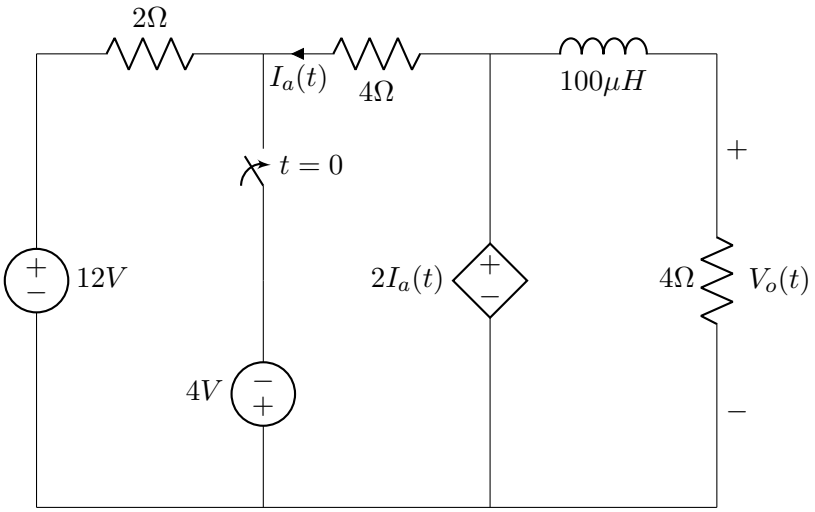




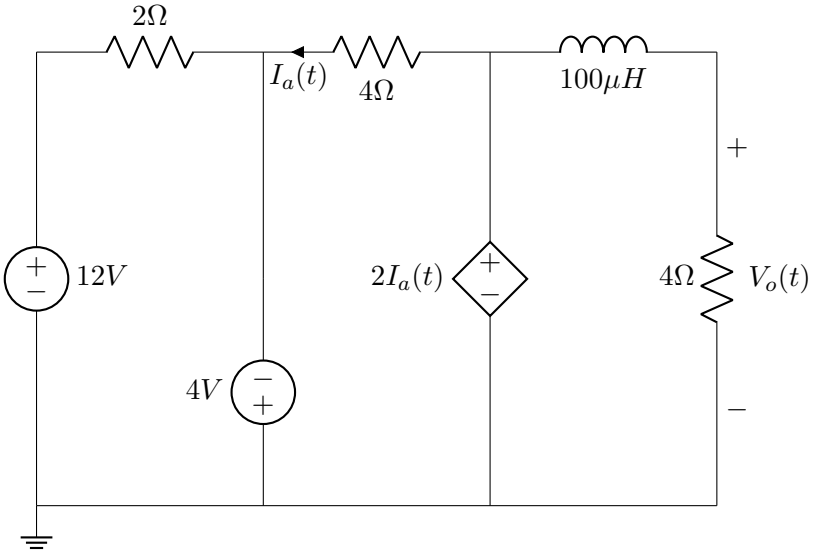
Del gráfico se observa claramente la concordancia entre las condiciones iniciales y finales. Además, si evaluamos en la constante de tiempo $\tau = 3/20s = 0.15s = 150ms$ en la expresión obtenida anteriormente, obtenemos $I_o(t) = -1.08mA$, lo cual coincide con el cursor 2 del gráfico.

Pregunta 3 (12 puntos)

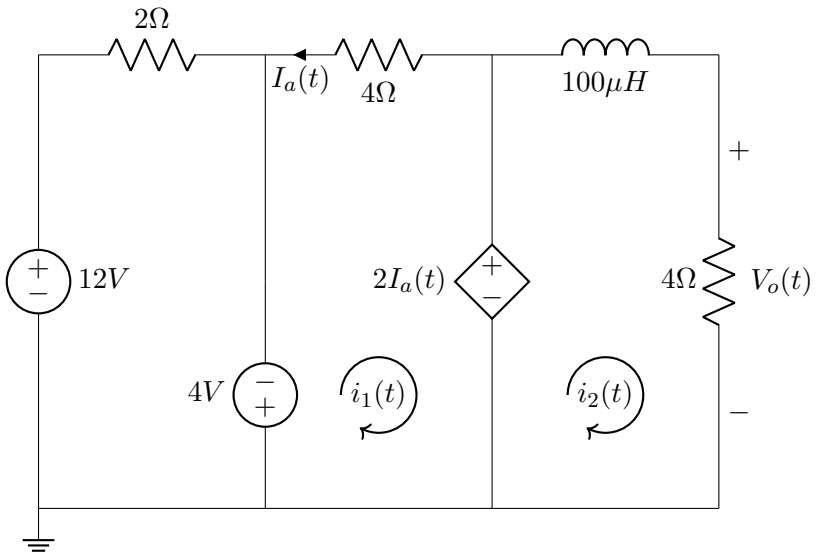
Encuentre $V_o(t)$ para $t > 0$. Asuma que en $t = 0$ el inductor está descargado



Solución
El circuito en $t > 0$ está dado por:



Aplicando método de mallas en las mallas 2 y 3:



$$4 + 4i_1 + 2I_a = 0$$
$$-2I_a + V_L + 4i_2 = 0$$

Utilizando la primera ecuación junto con $I_a = -i_1$

$$4 + 4i_1 - 2i_1 = 0 \implies i_1 = -2$$

Luego, en la segunda ecuación:

$$-2I_a + V_L + 4i_2 = 0$$
$$2i_1 + V_L + 4i_2 = 0$$
$$V_L + 4i_2 = 4$$

Luego $V_L = L\frac{di_2}{dt} = 100 \cdot 10^{-6}\frac{di_2}{dt}$

$$10^{-4}\frac{di_2}{dt} + 4i_2 = 4$$
$$\frac{di_2}{dt} + 4 \cdot 10^4 i_2 = 4 \cdot 10^4$$

Luego, la solución homogénea está dada por:

$$i_{2,h}(t) = ke^{-4\cdot 10^4 t}$$

Para la solución particular, proponemos una solución constante. Si reemplazamos en la edo llegamos a que:

$$i_{2,p}(t) = 1$$

Entonces, la solución general está dada por:

$$i_2(t) = 1 + ke^{-4\cdot 10^4 t}$$

Incorporando la condición inicial $i_2(0) = 0$:

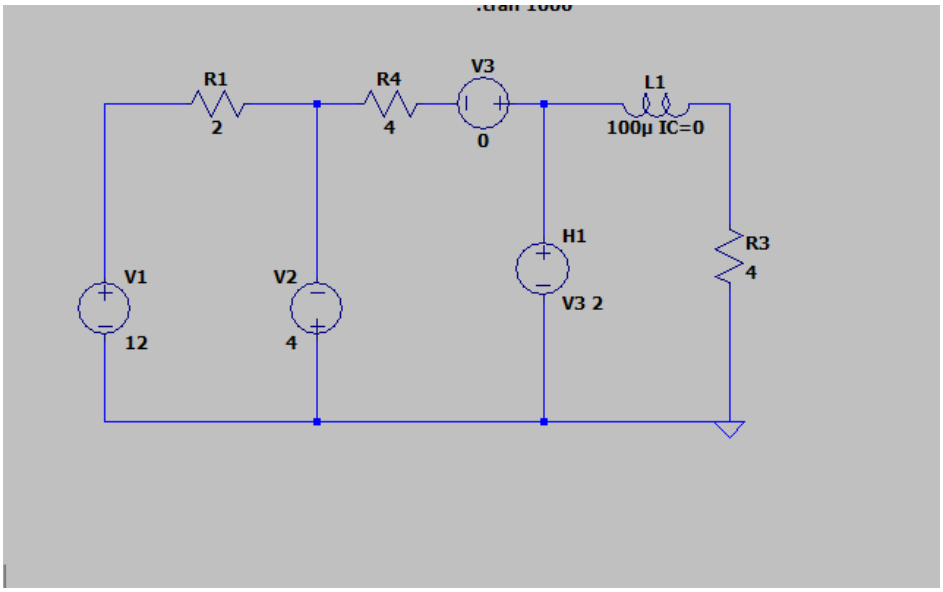
$$i_2(t) = 1 - e^{-4\cdot 10^4 t}$$

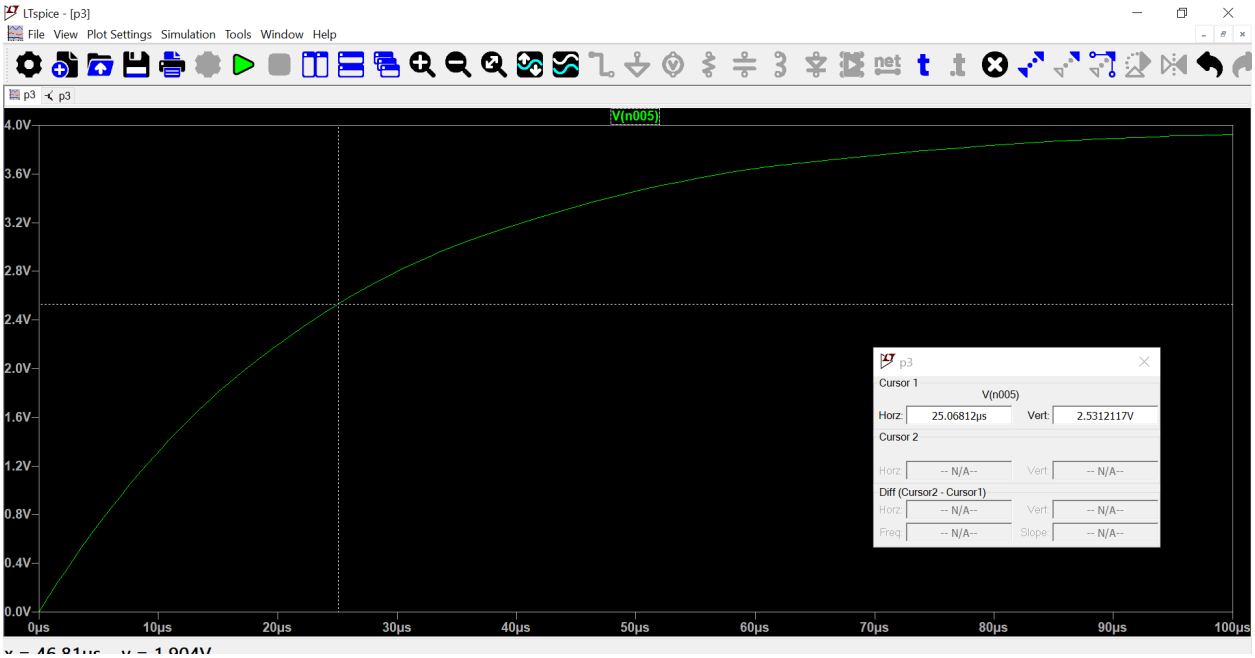
Finalmente, para calcular $V_o(t)$:

$$V_o(t) = 4i_2(t) = 4 - 4e^{-4\cdot 10^4 t}$$

- **6 por la ecuación diferencial que modela la corriente en el inductor u otra variable**
- **2 pt por la solución homogénea**
- **2 pt por la solución particular**
- **2 pt por la solución incorporando la condición inicial**

Si se resuelve por otros métodos y llega al resultado correcto asignar todo el puntaje.
A continuación, una simulación en LTSpice que demuestra el resultado:



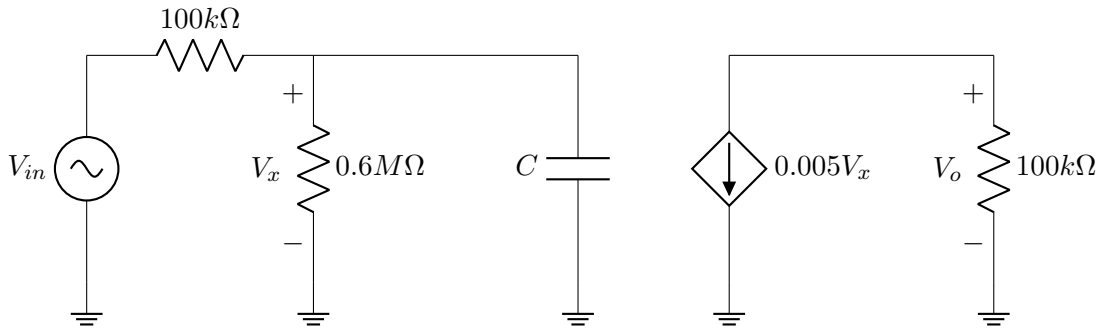


Del gráfico se observa claramente la concordancia entre las condiciones iniciales y finales. Además, si

evaluamos en la constante de tiempo $\tau = 1/(4{\cdot}10^4)s = 25\mu s$ en la expresión obtenida anteriormente, obtenemos $V_o(t) = 2.528V$, lo cual coincide con el cursor 1 del gráfico.

Problema 4 (14 puntos)

Considere el siguiente circuito, con $V_{in}(t) = 10 \cdot 10^{-3} \sin(2\pi f\, t)$ [V] y el capacitor inicialmente descargado



(a) Determine $V_0(t)$ considerando una capacitancia genérica C [F] para el capacitor [6 pts]

(b) Estudie el caso en que la capacitancia es aproximadamente $C = 0$ [F]. ¿Como seria $V_0(t)$ en este caso? [1 pts]

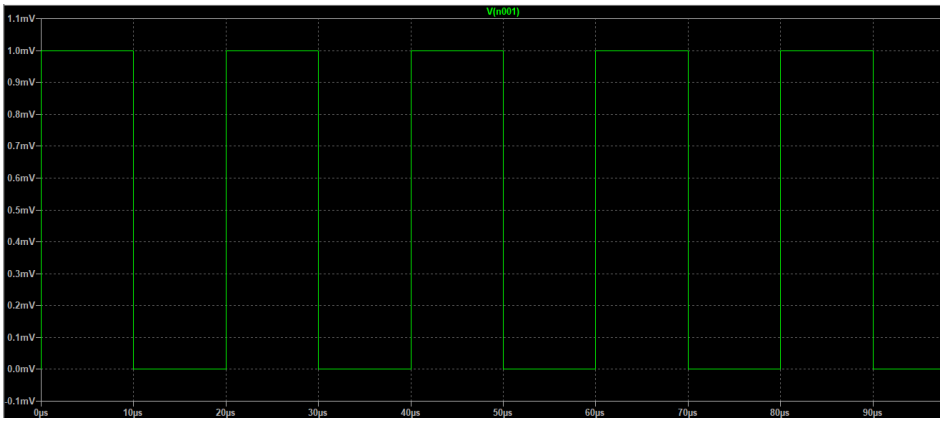
(c) Asuma que $C = 12$ [pF], grafique la salida $V_o(t)$ para distintos rangos de frecuencia f especificados a continuacion:

- *Frecuencias Bajas*: en el rango de 0Hz a 100 kHz
- *Frecuencias Medias*: en el rango de 100 kHz a 10 MHz
- *Frecuencias Altas*: frecuencias mayores a 10 MHz

¿Cómo varía la salida del circuito $V_0(t)$ al aplicar distintas frecuencias f para la señal sinusoidal de entrada $V_{in}(t)$? [2pts]

(d) ¿Para qué rango de frecuencias es válida la aproximación realizada en el ítem (b)? Guíese en los análisis y gráficos del ítem anterior (c) [1pt]

(e) Simule en LTSpice el circuito considerando una señal cuadrada periódica con amplitud 1 mV, frecuencia 50 kHz y ciclo de trabajo del 50% (ver figura de abajo). Analice cómo varía la salida $V_0(t)$ al modificar los valores del capacitor. Pruebe los siguientes valores: $C = \{1, 5, 50\}$ [pF]. Muestre los gráficos obtenidos en cada caso y discuta cómo el valor del capacitor afecta la forma de la señal de salida. [4 pts]



Solución

(a) Realizando método de nodos:

$$\frac{V_{in} - V_x}{10^5} = i_c + \frac{V_x}{6 \cdot 10^5}$$

Reagrupando y utilizando que $i_c = C\frac{dV_c}{dt}$.

$$C\frac{dV_x}{dt} + V_x\frac{7}{6 \cdot 10^5} - \frac{V_{in}}{10^5} = 0$$

En primer lugar, la respuesta homogénea está dada por:

$$V_{x,h}(t) = ke^{\frac{-7t}{6 \cdot 10^5 C}}$$

Luego, para la respuesta particular suponemos que es de la forma:

$$V_{x,p} = A\sin(2\pi ft) + B\cos(2\pi ft)$$

Reemplazando en la ecuación diferencial obtenemos:

$$C(2A\pi f\cos(2\pi ft) - 2B\pi f\sin(2\pi ft)) + \frac{7}{6 \cdot 10^5}(A\sin(2\pi ft) + B\cos(2\pi ft)) = \frac{10 \cdot 10^{-3}\sin(2\pi f\, t)}{10^5}$$

Igualando los coeficientes de los senos y cosenos:

$$2A\pi fC + \frac{7B}{6 \cdot 10^5} = 0$$

$$-2B\pi fC + \frac{7A}{6 \cdot 10^5} = 10^{-7}$$

Resolviendo en algún software llegamos a que:

$$A = \frac{0.42}{49 + 1.42122 \cdot 10^{13}C^2f^2}$$

$$B = \frac{-2.26195 \cdot 10^5 Cf}{49 + 1.42122 \cdot 10^{13}C^2f^2}$$

Por lo tanto, V_X está dado por:

$$V_x(t) = ke^{\frac{-7t}{6 \cdot 10^5 C}} + \frac{0.42}{49 + 1.42122 \cdot 10^{13}C^2f^2} \cdot \sin(2\pi ft) + \frac{-2.26195 \cdot 10^5 Cf}{49 + 1.42122 \cdot 10^{13}C^2f^2} \cdot \cos(2\pi ft)$$

Para determinar el valor de la constante simplemente evaluamos en $t = 0$ y obtenenemos que:

$$V_x(0) = k + \frac{-2.26195 \cdot 10^5 Cf}{49 + 1.42122 \cdot 10^{13}C^2f^2}$$

$$k = \frac{2.26195 \cdot 10^5 Cf}{49 + 1.42122 \cdot 10^{13}C^2f^2}.$$

Luego, notemos que

$$V_0(t) = -0.005V_x \cdot 10^5$$

Entonces:

$$V_o(t) = -500V_x(t)$$

$$V_o(t) = -500(ke^{\frac{-7t}{6 \cdot 10^5 C}} + \frac{0.42}{49 + 1.42122 \cdot 10^{13}C^2f^2} \cdot \sin(2\pi ft) + \frac{-2.26195 \cdot 10^5 Cf}{49 + 1.42122 \cdot 10^{13}C^2f^2} \cdot \cos(2\pi ft))$$

- **2 pt por la EDO de $V_o(t)$**
- **1 pt por la solución homogénea de $V_o(t)$**
- **2 pt por la solución particular de $V_o(t)$**
- **1 pt por la solución general de $V_o(t)$ incorporando condiciones iniciales**

Si se resuelve por otros métodos y llega al resultado correcto asignar todo el puntaje.

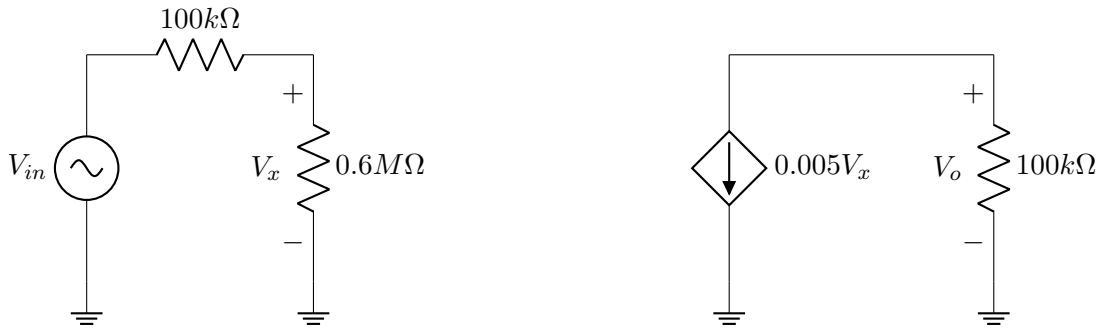
(b) Hay dos formas de enfrentar este item. La primera es evaluando la capacitancia de la expresión anterior en 0 y la otra es volviendo analizar el circuito. Veamos la primera opción:

$$V_o(t) = -500\frac{0.42\sin(2\pi ft)}{49} = -4.28\sin(2\pi ft)$$

Por la ecuación del capacitor tenemos que:

$$i_c(t) = C\frac{dV_c}{dt}$$

Por lo que si la capacitancia es 0 la corriente es nula y el capacitor actua como circuito abierto. En este caso, el circuito equivalente sería:



Entonces, en este caso:

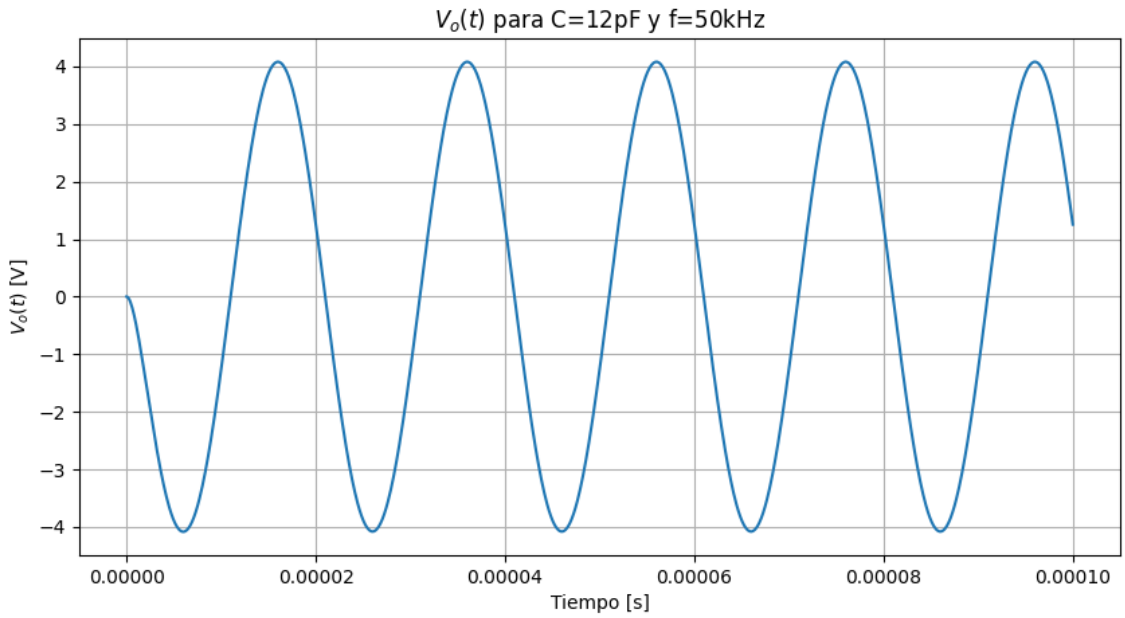
$$V_x(t) = \frac{6}{7}V_{in} = \frac{6}{7}\cdot 10\cdot 10^{-3}\sin(2\pi ft)$$

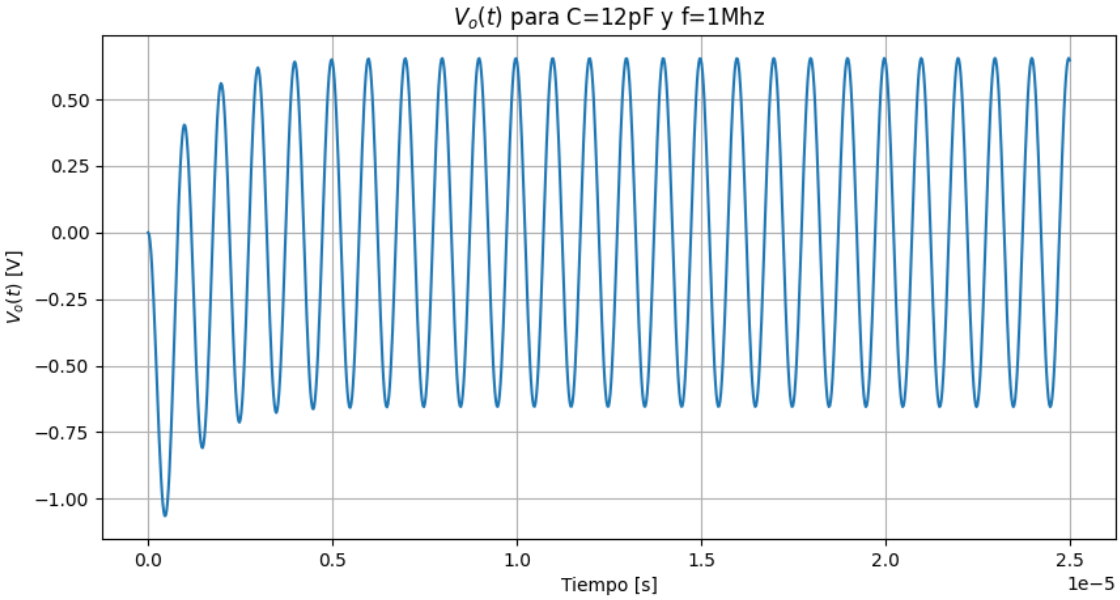
$$V_o(t) = -500V_x = -500\cdot\frac{6}{7}\cdot 10\cdot 10^{-3}\sin(2\pi ft) = -4.28\sin(2\pi ft)$$

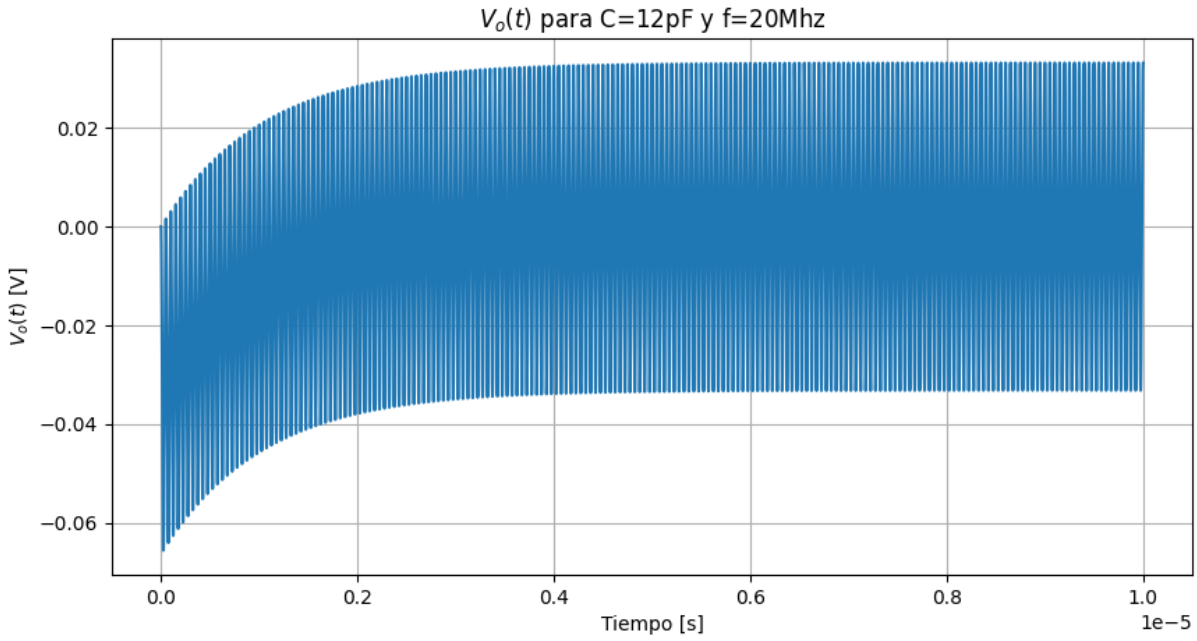
- **1 pt por expresión de $V_o(t)$**

Si se resuelve por otros métodos y llega al resultado correcto asignar todo el puntaje.

(c) A continuación, se muestran los gráficos para los distintos rangos de frecuencia:


$V_o(t)$ para C=12pF y f=50kHz
$V_o(t)$ [V]
Tiempo [s]
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
0.00000
0.00002
0.00004
0.00006
0.00008
0.00010


$V_o(t)$ para C=12pF y f=1Mhz
$V_o(t)$ [V]
Tiempo [s]
1e−5
0.50
0.25
0.00
−0.25
−0.50
−0.75
−1.00
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5



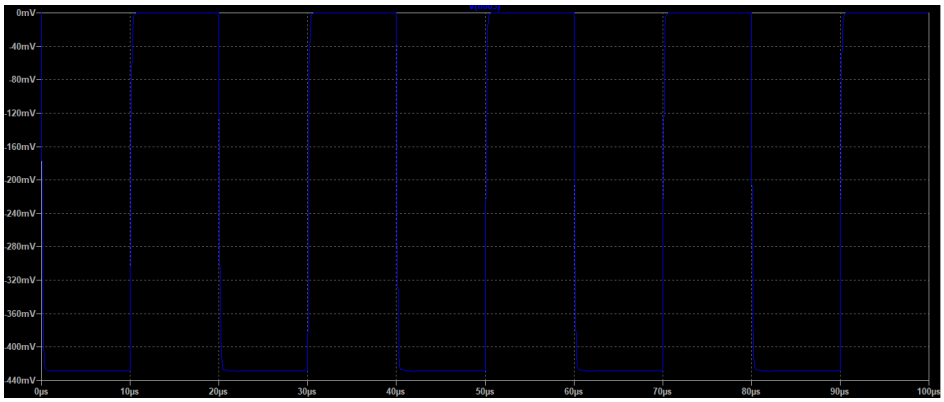
De esto se concluye que la amplitud de la sinusoide de salida decae concorde f aumenta. Es decir, el circuito está filtrando las frecuencias medias y altas.

- **0.5 pt el gráfico para las frecuencias bajas.**
- **0.5 pt el gráfico para las frecuencias medias.**
- **0.5 pt el gráfico para las frecuencias altas.**
- **0.5 pt por la conclusión de que la amplitud de la salida cae concorde f aumenta.**

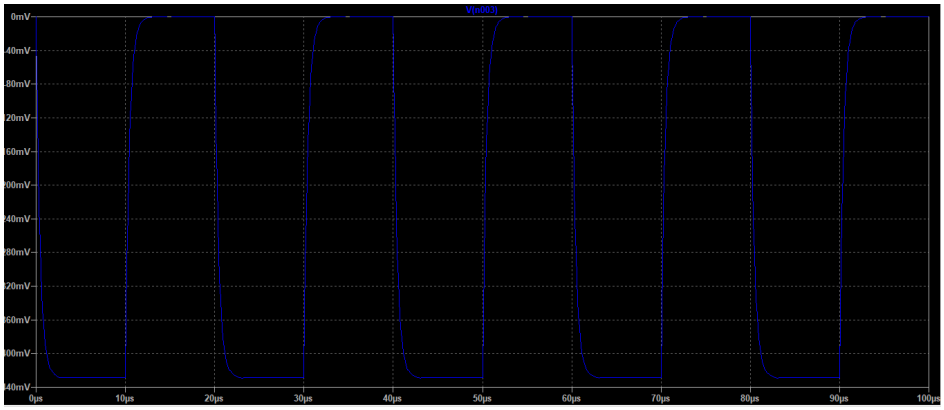
(d) Del item b) observamos que la salida era una sinusoide de amplitud $4.28V$. Solamente el gráfico de la salida para las frecuencias bajas muestra un escenario similar, teniendo en $50kHz$ una señal de amplitud aproximadamente $4V$. Por lo tanto, la aproximación es aceptable para frecuencias bajas.

- **1 pt por concluir que la aproximación es válida para las frecuencias bajas**

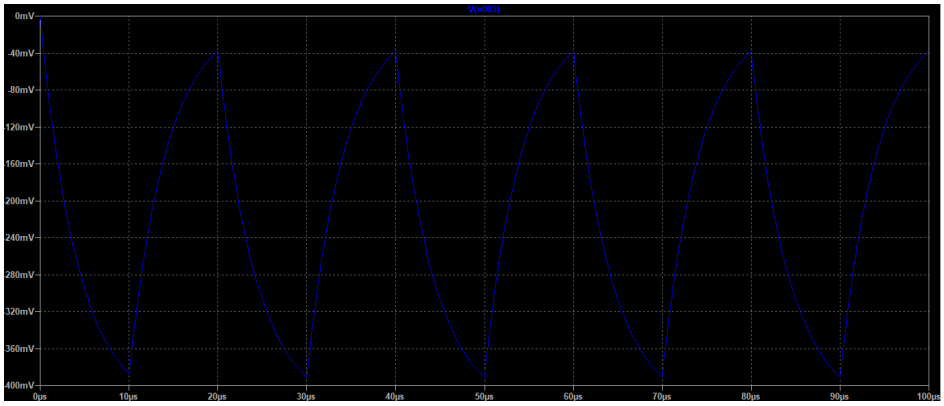
(e) A continuación se muestra la salida cuando $C = 1pf$:



A continuación se muestra la salida cuando $C = 5pf$:



A continuación se muestra la salida cuando $C = 50pf$:



De los gráficos se puede observar que, mientras mayor es la capacitancia, la salida sigue de peor manera la forma de la señal de entrada. Es decir, a medida que aumenta la capacitancia, el pulso ideal de la señal de salida se va deformando. Esto se debe a que los capacitores se oponen a cambios bruscos en el voltaje, intensificando este efecto a medida que aumenta la capacitancia.

- **1 pt el gráfico cuando** $C = 1pf$
- **1 pt el gráfico cuando** $C = 5pf$
- **1 pt el gráfico cuando** $C = 50pf$
- **1 pt por la conclusión mencionada anteriormente**

Pregunta 5 (10 puntos)

(a) **Tipos de capacitores:** Enumere al menos cuatro tipos de capacitores actualmente disponibles, y describa brevemente sus características principales (e.g., capacitancia, voltaje nominal, polaridad y frecuencia de operación). Indique para qué tipo de aplicaciones es más adecuado cada uno [2pt].

(b) **Aplicaciones de capacitores:** Describa dos aplicaciones prácticas de capacitores en circuitos eléctricos o electrónicos. Explique el papel del capacitor en cada caso [2pt].

(c) **Aplicaciones de inductores:** Describa dos aplicaciones prácticas de inductores en circuitos eléctricos o electrónicos. Explique el papel del inductor en cada caso [2pt].

(d) **Modelos reales:** Investigue sobre el modelo real de un capacitor y un inductor, incluyendo resistencias y elementos parasitarios. Dibuje el circuito equivalente en cada caso [2pt].

(e) **Capacitores e inductores parásitos:** Investigue en qué consisten las *capacitancias* e *inductancias parásitas*. Dé ejemplos concretos de capacitancias e inductancias parásitas en componentes habituales [2pt].

Solución
En general, mientras la respuesta sea extraída de alguna fuente confiable, todas las respuestas deberían estar correctas. A continuación, se muestra un ejemplo de respuesta:

(a) **Tipos de capacitores:**

- **Cerámicos:**
  - Capacitancia: pF a μF
  - Voltaje nominal: hasta varios kV
  - Polaridad: no polarizados
  - Frecuencia de operación: alta (MHz–GHz)
  - Aplicaciones: desacoplo, filtrado de ruido y circuitos RF.
- **Electrolíticos (Aluminio o Tántalo):**
  - Capacitancia: μF a mF
  - Voltaje nominal: 6–450 V
  - Polaridad: sí
  - Frecuencia de operación: baja a media
  - Aplicaciones: filtrado de fuentes de alimentación, acoplamiento en audio.
- **Película (Film):**
  - Capacitancia: nF a μF
  - Voltaje nominal: hasta varios kV
  - Polaridad: no polarizados
  - Frecuencia de operación: media
  - Aplicaciones: temporización, supresión de picos, audio de alta calidad.
- **Tantalio:**
  - Capacitancia: μF a mF

- Voltaje nominal: 4–50 V
- Polaridad: sí
- Frecuencia de operación: baja a media
- Aplicaciones: dispositivos portátiles, circuitos de bajo ruido y alta estabilidad.

(b) **Aplicaciones de capacitores:**

(a) **Filtrado de fuente de alimentación:** El capacitor suaviza las ondulaciones de voltaje en fuentes DC, eliminando el rizado.

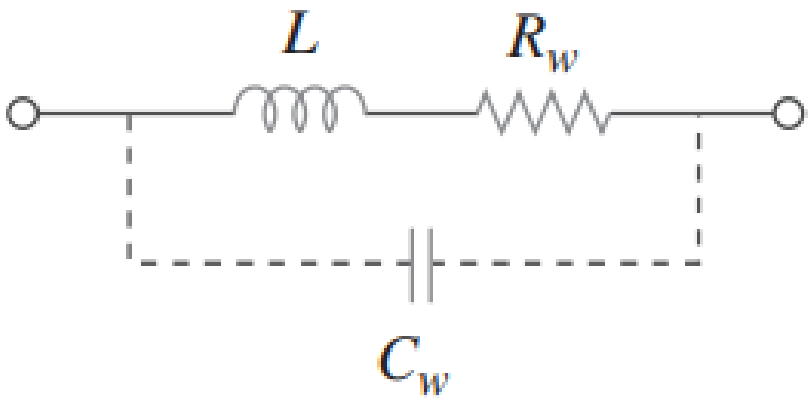
(b) **Acoplamiento de señales en audio:** Permite pasar la señal AC de un circuito a otro, bloqueando la componente DC que podría afectar al siguiente circuito.

(c) **Aplicaciones de inductores:**

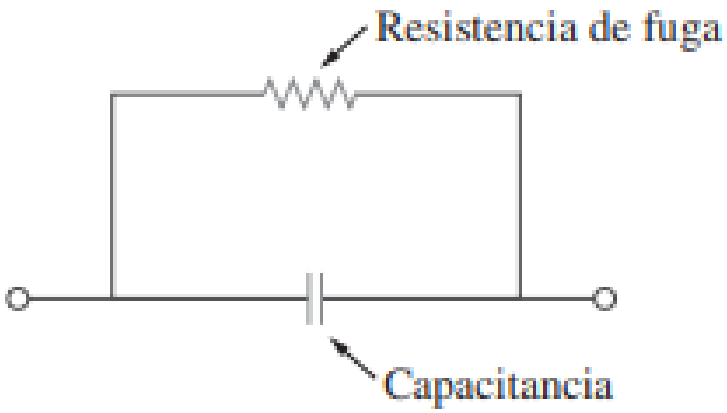
(a) **Filtros LC:** El inductor junto con un capacitor selecciona o rechaza ciertas frecuencias en filtros pasa-bajo, pasa-alto o pasa-banda.

(b) **Transformadores y fuentes conmutadas:** El inductor almacena energía magnética temporalmente, regula corriente y suaviza variaciones en fuentes de potencia.

(d) **Modelos reales:** Un modelo real del inductor está dado por:



Mientras que un modelo real del capacitor está dado por:



Se aceptarán modelos con más variables y que consideren otros aspectos, pero deben ser especificados y correctamente citados.

(e) **Capacitores e inductores parásitos:**

- **Capacitancias parásitas:** capacitancia no deseada entre conductores o espiras. **Ejemplos:** entre bobinas adyacentes de un transformador o entre terminales de un inductor.
- **Inductancias parásitas:** inductancia no deseada generada por trazas de PCB o cables. **Ejemplos:** inductancia de cables de alimentación o de pistas largas de PCB.