IEE2123 Circuitos Eléctricos
Profesor: David Watts

Tarea 6

Máxima Transferencia de Potencia

Problema 1

El circuito representa la carga de un auto eléctrico. R_L es la resistencia que presenta el auto al conectarse a la red eléctrica, R_{eq} es la resistencia que presentan las líneas de transmisión. ¿Cuál es el valor de la resistencia R_{eq} que maximiza la transferencia de potencia desde la fuente a la carga? Explique su respuesta.

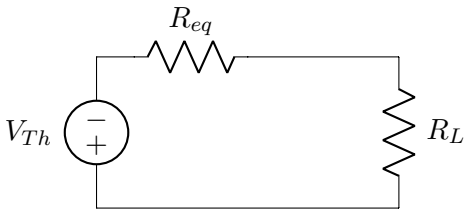


Figura 1: Circuito para la pregunta 2b.

Solución:

La resistencia R_{eq} que maximiza la transferencia de potencia debe una tal que toda la potencia que entrega la fuente la reciba la resistencia de carga. Para lograr esto, simplemente hacemos que $R_{eq} = 0$, y luego toda la potencia se traspasa a la carga.

Problema 2

Encuentre el valor de R_X que maximiza la disipación de potencia en esta resistencia, y luego calcule la potencia en términos de los demás parámetros.

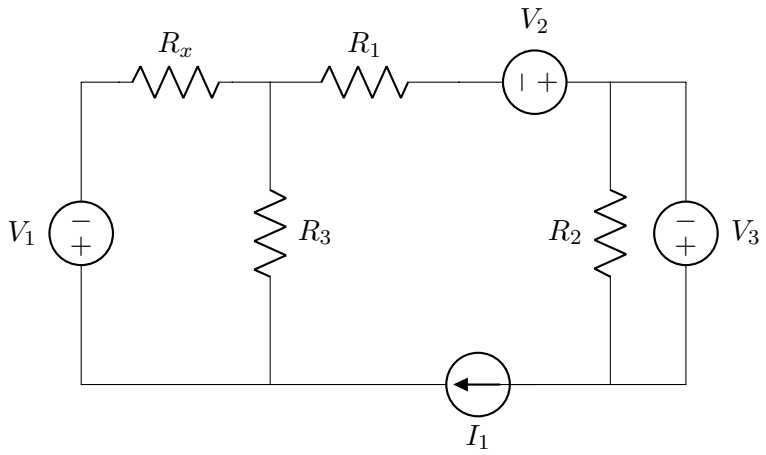


Figura 2: Circuito para la pregunta 2a.

Solución del problema original caso A:

CASO A (Con fuente de corriente I_1): El ejercicio propuesto es muy simple, pues al remover R_X , para calcular el equivalente del resto del circuito, resulta en un circuito simple que al apagar las fuentes, deja aislado R_3 del resto del circuito. Es decir, La resistencia de Thevenin es simplemente R_3 y es precisamente ese valor de R_X el que maximiza la transferebncia de potencia.

Solución del problema modificado caso B:

CASO B (Alternativa sin fuente de corriente): Notar que el problema original (Caso A) es muy simple gracias a la fuente de corriente y por ello resolvemos también el caso sin la fuente (Si, la pauta de otro semestre anterior tiene un error!).

Para maximizar la disipación de potencia en R_x, se buscará la corriente que pasa a través de esta. Luego se obtendrá la potencia mediante $P = I^2R$ y se derivará para encontrar un máximo (¿O un mínimo?).

Se consideran tres mallas y se definen tres corriente (I_2, I_1, I_0) de izquierda a derecha, en sentido horario. Luego las ecuaciones de malla son las siguientes:

$$V_1 - I_2R_x - (I_2 - I_1)R_3 = 0 \tag{1}$$
$$(I_1 - I_2)R_3 + I_1R_1 + V_2 + (I_1 - I_0)R_2 = 0 \tag{2}$$
$$(I_0 - I_1)R_2 + V_3 = 0 \tag{3}$$

Donde la ecuación (1) representa a la malla de la izquierda, la ecuación (2) representa la malla del centro y la ecuación (3) representa la malla de la derecha.

CASO A (sin fuente de corriente): La ecuación (2) que representa la malla del centro no tiene sentido en

presencia de fuente de corriente pues en ese caso la corriente es conocida y es simplemente I_1.

Resolviendo estas ecuaciones para encontrar I_2 (CASO B) obtenemos:

$$I_2 = \frac{V_1R_3 + V_1R_1 - V_2 - V_3R_2}{R_xR_3 + R_xR_1 + R_3R_1} \tag{4}$$

Luego, la potencia disipada es $P = R_xI_2^2 = R_x \cdot \left(\frac{V_1R_3+V_1R_1-V_2-V_3R_2}{R_xR_3+R_xR_1+R_3R_1}\right)^2$.

Para maximizar, buscamos un R_x tal que $\frac{\partial P}{\partial R_x} = 0$

Derivando e igualando a cero, tenemos que R_x toma un valor de $R_x = \frac{R_1R_3}{R_1+R_3}$.

Para comprobar, derivamos por segunda vez, esto es:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial R_x^2} = \frac{6\left(R_1+R_3\right)^2\left(\left(R_1+R_3-1\right)V_1 - R_2V_3\right)^2R_x}{\left(R_3R_x + R_1\left(R_x+R_3\right)\right)^4} - \frac{4\left(R_1+R_3\right)\left(\left(R_1+R_3-1\right)V_1 - R_2V_3\right)^2}{\left(R_3R_x + R_1\left(R_x+R_3\right)\right)^3} \tag{5}$$

Evaluando esta expresión en el resultado obtenido anteriormente, tenemos que $\left.\frac{\partial^2 P}{\partial R_x^2}\right|_{R_x=\frac{R_1R_3}{R_1+R_3}} < 0$. Por lo tanto la resistencia R_x que maximiza la potencia disipada es $R_x = \frac{R_1R_3}{R_1+R_3}$.
Luego la potencia disipada es:

$$P = \frac{(-(R_1+R_3)V_1 + V_2 + R_2V_3)^2}{4R_1R_3(R_1+R_3)} \tag{6}$$

Es evidente que este no es el método a usar en una prueba, pues el profesor Watts les mostró que simplemente la resistencia equivalente del resto del circuito era R_1 paralelo con R_3 y esa es la solución que sale de remover R_x y apagar las fuentes independientes.

Problema 3

a) Encuentre La corriente I_o señalada en el circuito usando el teorema de Thévenin o de Norton.

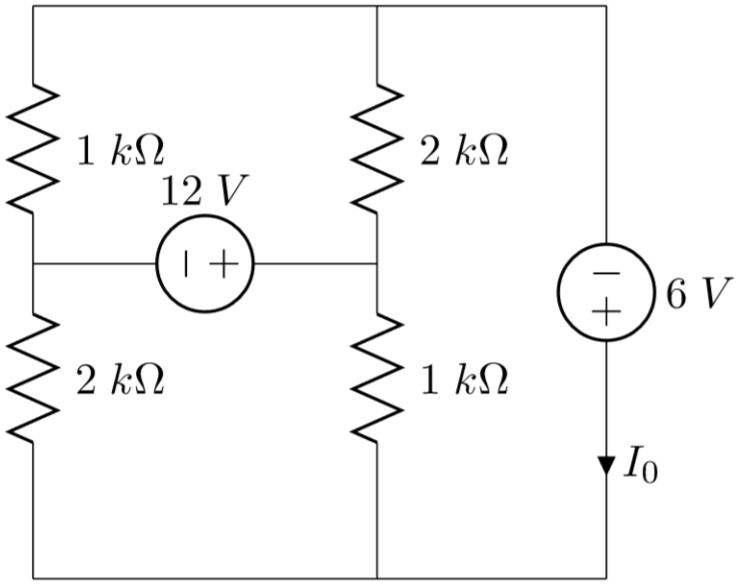


Figura 3: Circuito para la pregunta 3a.

b) La red de la figura 4 representa un componente electronico desconocido, y para facilitar su analisis se desea encontrar su circuito equivalente. Calcule la resistencia del circuito equivalente vista de la resistencia R_L

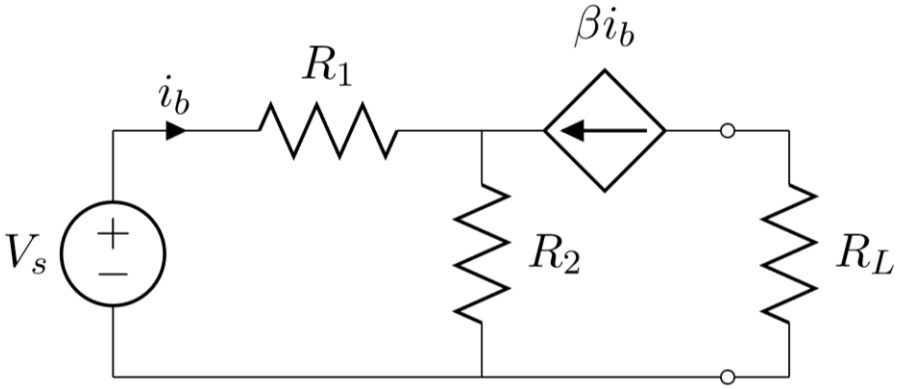
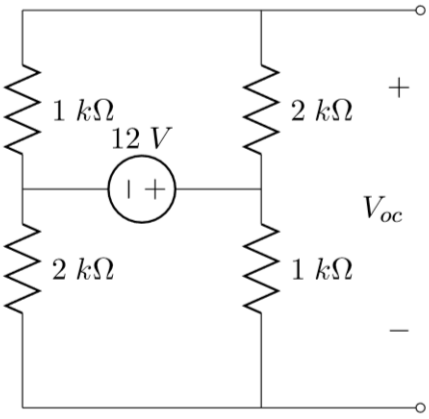


Figura 4: Circuito para la pregunta 3b.

Solución: Para encontrar la corriente I_o, primero quitamos la fuente de voltaje de $6[V]$ y buscamos la R_{eq} y V_{oc}. Luego, en nuestro circuito de Thévenin equivalente, conectamos la fuente de $6[V]$ y medimos la corriente del circuito.

El circuito sin la fuente es de la forma:

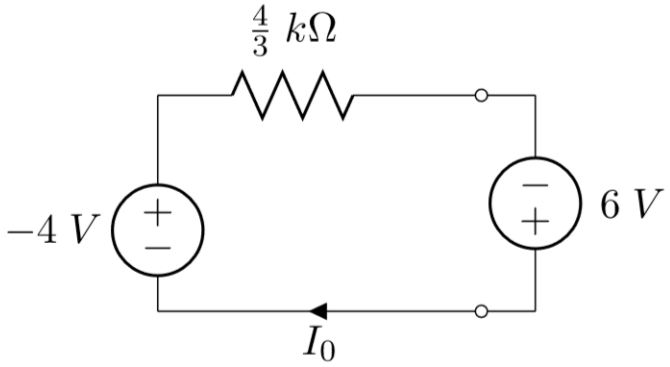


Para calcular la resistencia equivalente, se apagan las fuentes independientes y se calcula la resistencia vista desde los bornes en donde se extrajo la fuente de voltaje.
Luego, $R_{eq} = 1[k\Omega] \,||\, 2[k\Omega] + 1[k\Omega] \,||\dot{2}[k\Omega] = \frac{4}{3}[k\Omega]$.
Para calcular el voltaje de circuito abierto, basta con calcular el voltaje entre los bornes ya sen˜alados. Para esto, hacemos el metodo de mallas:

$$\mathrm{I}_1\, 3000 - 12 = 0 \implies I_1 = 4[mA] \qquad (1)$$
$$12 = 3000\, \mathrm{I}_2 \implies I_2 = 4[mA] \qquad (2)$$

Donde I_1 es la corriente de la malla superior denida en sentido horario, e I_2 es la corriente de la malla inferior denida en sentido horario.

Luego, si establecemos un tierra en el nodo inferior, entonces tenemos que $V_{oc} = I_2\, 1000 + I_1\, 2000 = 4[V]$. Por lo tanto, el circuito resultante es:



Haciendo malla, se obtiene que la corriente $I_0 = 1,5[mA]$.