Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ingeniería Eléctrica
IEE2123 - Circuitos Eléctricos

Tarea 3

Método de nodos

1º semestre 2023 - Profesor David Watts

Ayudante: Elena Contardo (ele.contardo@uc.cl)

- La tarea debe ser subida en formato .pdf a Canvas al buzón correspondiente con letra legible.
- Es posible utilizar un comodín para poder entregar la tarea 3 días después del plazo final (contando fin de semana y festivos). Para esto, se debe enviar un correo al ayudante encargado avisando que se usará el comodín antes de que termine el plazo final original.

Problema 1

a) Señale cómo determinaría el voltaje en cada nodo del circuito presente en la Figura 1 utilizando método de nodos. No olvide mencionar el número de incógnitas y ecuaciones.

b) Considere que al circuito de la Figura 1 se le añade un resistor de valor R_7, tal como se observa en la Figura 2. ¿Qué cambios habría al calcular el voltaje en cada nodo por método de nodos respecto a la pregunta anterior?

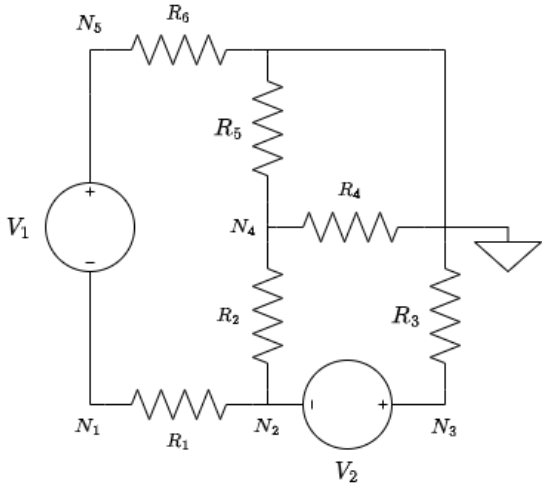


Figura 1: Circuito 1

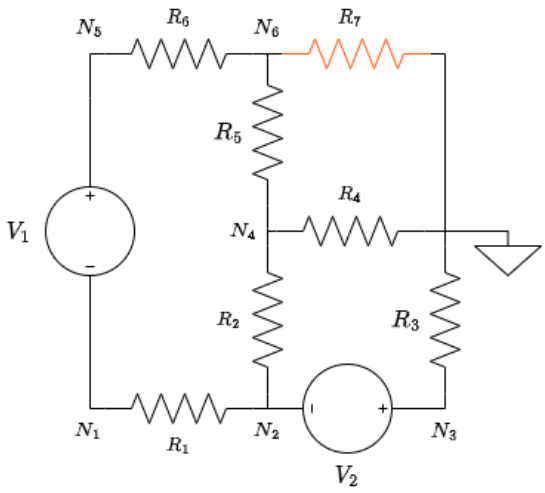


Figura 2: Circuito 2

Solución:

a) Se señalan los pasos a continuación:

1. Escoger un nodo de referencia (en este caso ya estaba definido).
2. Asociar un voltaje v_i a cada nodo restante del circuito. En este caso se tienen 5 nodos.
3. Aplicar KCL a cada nodo (excepto el nodo tierra) en función de los v_i. En este circuito, como se tienen 5 nodos (sin contar tierra) se definen 5 ecuaciones, donde cuatro corresponden a ecuaciones provenientes de dos supernodos, considerando dos ecuaciones de KCL y dos ecuaciones de la relación de los nodos a partir de las fuentes de voltaje que los unen (podrían colocarse las ecuaciones que relacionan los voltajes con la fuente dentro de las ecc. de KCL, obteniendo solo dos ecc. a partir de los dos supernodos, o inclusive tres).
4. Resolver el sistema de ecuaciones. En este caso, se podrían tener 5 ecuaciones para 5 incógnitas, o 3 ecc. para 3 incógnitas, o 4 ecc. para 4 incógnitas.

b) Añadir la resistencia incluye un nuevo nodo en el circuito (N6), por lo que se suma una nueva incógnita y una nueva ecuación de KCL al sistema de ecuaciones anterior.

Criterios de corrección:

- **2 puntos** Se menciona cantidad de incógnitas y ecuaciones para resolver.
- **2 puntos** Se menciona que hay 2 supernodos con 2 ecuaciones cada uno.
- **2 puntos** Parte b. Se menciona que se agrega una nueva ecuación y/o una nueva incógnita.

Problema 2

Encuentre los voltajes de cada nodo del circuito utilizando método de nodos.

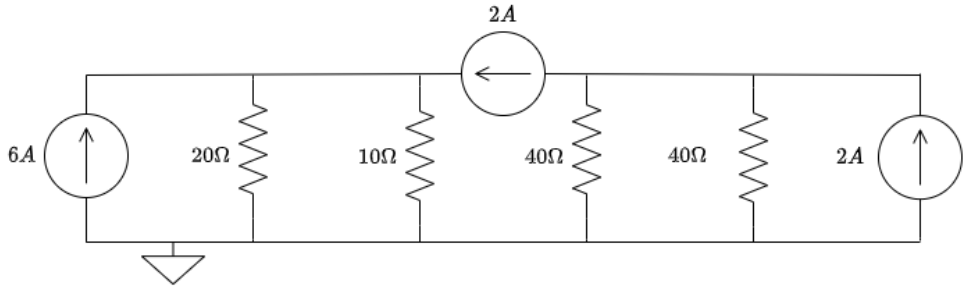


Figura 3: Circuito 3

Solución: El circuito tiene dos nodos, N_1 y N_2. Para cada uno se aplica KCL:

- Nodo 1:
$$6 + 2 = \frac{V_{N1} - 0}{20//10}$$
- Nodo 2:
$$-2 + 2 = \frac{V_{N2} - 0}{40//40}$$

Las ecuaciones anteriores sólo dependen de una incógnita, por lo que es posible encontrar los voltajes fácilmente despejando estas en cada una.

$$V_{N1} = 53{,}33V$$

$$V_{N2} = 0V$$

Criterios de corrección:

- 1 punto por identificar correctamente cada nodo (2 en total).
- 1 punto por plantear bien la ecuación de cada nodo (2 en total).
- 1 punto por cada resultado (2 en total).

Problema 3

Encuentre la matriz obtenida por el método de nodos para el circuito de la Figura 1. Defina los voltajes en cada nodo con los números ya definidos en la figura.

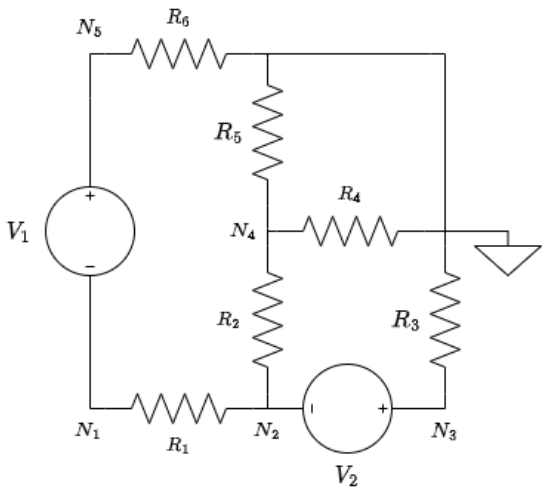


Figura 4: Circuito 1

Solución: Se aplica KCL para cada nodo, notando que existen dos supernodos, $N_1 - N_5$ y $N_2 - N_3$:

- Supernodo $N_1 - N_5$:

$$\frac{0 - V_{N5}}{R_6} = \frac{V_{N1} - V_{N2}}{R_1}$$
$$V_{N1} + V_1 = V_{N5}$$

- Supernodo $N_2 - N_3$:

$$\frac{V_{N1} - V_{N2}}{R_1} + \frac{V_{N4} - V_{N2}}{R_2} = \frac{V_{N3} - 0}{R_3}$$
$$V_{N2} + V_2 = V_{N3}$$

- Nodo $N4$:

$$\frac{V_{N2} - V_{N4}}{R_2} + \frac{0 - V_{N4}}{R_5} + \frac{0 - V_{N4}}{R_4} = 0$$

Trabajando las ecuaciones anteriores:

- Supernodo $N_1 - N_5$:

$$\frac{V_{N5}}{R_6} + \frac{V_{N1}}{R_1} - \frac{V_{N2}}{R_1} = 0$$
$$V_{N5} - V_{N1} = V_1$$

- Supernodo $N_2 - N_3$:

$$\frac{V_{N1}}{R_1} - \frac{V_{N2}}{R_1 // R_2} - \frac{V_{N3}}{R_3} + \frac{V_{N4}}{R_2} = 0$$
$$V_{N3} - V_{N2} = V_2$$

- Nodo $N4$:

$$\frac{V_{N2}}{R_2} - \frac{V_{N4}}{R_2//R_4//R_5} = 0$$

A partir de lo anterior se plantea el sistema matricial:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_1} & 0 & 0 & \frac{1}{R_6} \\ \frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_1 \| R_2} & -\frac{1}{R_3} & \frac{1}{R_2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2} & 0 & -\frac{1}{R_2 \| R_4 \| R_5} & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{N1} \\ V_{N2} \\ V_{N3} \\ V_{N4} \\ V_{N5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$$

Criterios de corrección:

Pregunta 1 y pregunta 3 se tratan independientemente.

- **6 puntos** si la matriz está correcta.
- En caso de estar todo incorrecto, se asigna un punto por plantear la matriz forma $A.x = b$.
- Si solo se plantea ecuaciones **máximo 2 puntos**.
- Se **descuenta 0.5** por cambiar nombres de los nodos.
- Si hay solo **un** signo incorrecto se **descuenta 0.5**.
- Si falta solo **un** término se **descuenta 1**.

Problema 4

Utilizando el método de nodos encuentre el voltaje V_o definido en el circuito de la Figura 4.

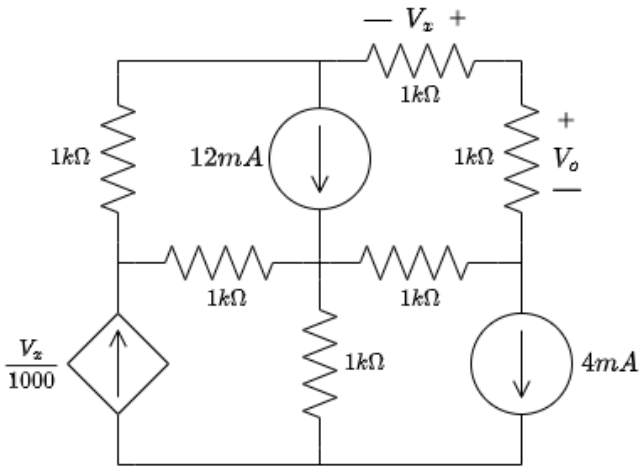


Figura 5: Circuito 4

Solución: Para iniciar el ejercicio se fija un nodo tierra de referencia y se enumera el resto de los nodos:

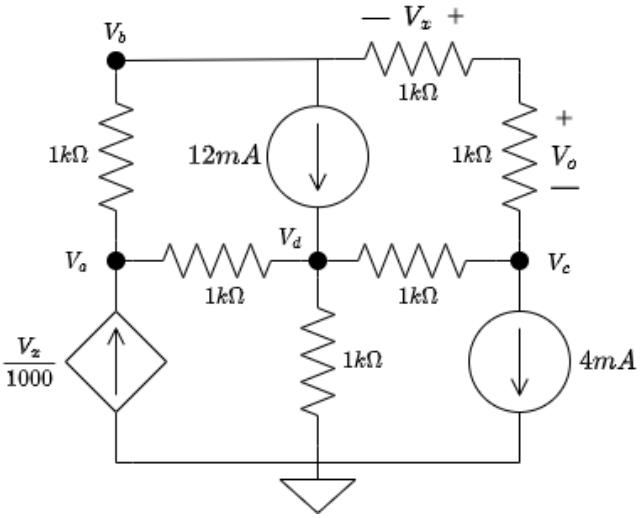


Figura 6: Circuito 4 con nodos definidos

Luego, a cada nodo se le aplica KCL:

- Nodo A:

$$\frac{V_a - V_b}{1k} + \frac{V_a - V_d}{1k} = \frac{V_x}{1000}$$

$$V_x = \frac{V_c - V_b}{1k + 1k} \cdot 1k$$

- Nodo B:

$$\frac{V_a - V_b}{1k} = 12m + \frac{V_b - V_c}{1k + 1k}$$

- Nodo C:

$$\frac{V_b - V_c}{1k + 1k} = \frac{V_c - V_d}{1k} + 4m$$

- Nodo D:

$$\frac{V_a - V_d}{1k} + 12m + \frac{V_c - V_d}{1k} + \frac{0 - V_d}{1k} = 0$$

Resolviendo:

$$V_a = -6V$$

$$V_b = -14{,}66V$$

$$V_c = -8V$$

$$V_d = -0{,}66V$$

Luego, se calcula V_o:

$$V_o = \frac{V_b - V_c}{1k + 1k} \cdot 1k = -3{,}33V$$

Criterios de corrección:

- 1 punto por definir bien los nodos.
- 1 punto por identificar ecuaciones para V_o y/o V_x. Si no lo hace, pero el procedimiento esta bien este punto se asignara según desarrollo.
- 3 puntos por las ecuaciones de nodos.
- 1 punto por el resultado.

Ejercicio extra

Utilizando el método de nodos encuentre el voltaje V_o. Además, determine el valor de I_y y V_x.

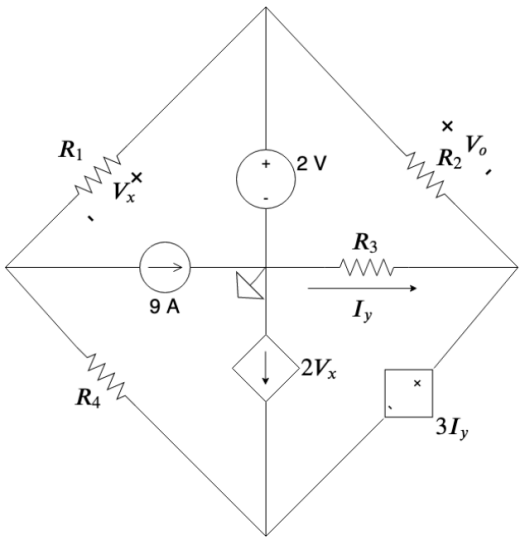


Figura 7: Circuito 5

Solución: En primer lugar, se definen los nodos del circuito de la siguiente forma:

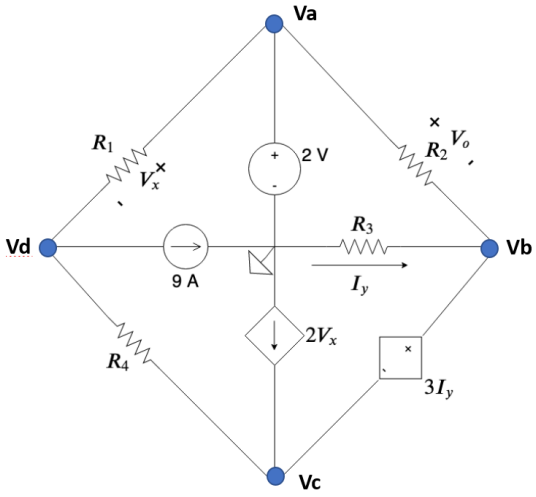


Figura 8: Circuito 5 con nodos definidos

Luego, a cada nodo se le aplica KCL:

- Nodo A: Como se tiene una fuente de voltaje entre el nodo y tierra, inmediatamente se obtiene el voltaje del nodo:

$$V_a = 0 + 2 = 2V$$

- Supernodo B-C: Debido a la fuente de voltaje de valor $3I_y$ entre los nodos B y C se define un supernodo, junto con la ecuación que relaciona la fuente de voltaje y los voltajes de los nodos.

$$\frac{V_a - V_b}{R_2} + \frac{0 - V_b}{R_3} = -2V_x + \frac{V_c - V_d}{R_4}$$

$$V_x = V_a - V_d$$

$$V_b = V_c + 3 \cdot I_y$$

$$I_y = \frac{0 - V_b}{R_3}$$

- Nodo D:

$$\frac{V_a - V_d}{R_1} + \frac{V_c - V_d}{R_4} = 9$$

Resolviendo el sistema anterior con el software Wolfram Mathematica se llega a lo siguiente:

```
Out[9]= {{Va → 2.0, Vb → 1/(-1.0 R2 R4 - 1.0 R3 R4) (-2.0 R3 R4 - 2.0 R2 R3 R4 (-6.0 R1 + 29. R1 R2 + 9.0 R1 R2 R3 + 9.0 R1 R2 R4 + 9.0 R1 R3 R4)/(3.0 R2 + 7.0 R1 R2 + R1 R3 + R2 R3 + 2.0 R1 R2 R3 + R2 R4 + R3 R4) -
    1.0 R2 R3 (2.0 - 1.0 (-6.0 R1 + 29. R1 R2 + 9.0 R1 R2 R3 + 9.0 R1 R2 R4 + 9.0 R1 R3 R4)/(3.0 R2 + 7.0 R1 R2 + R1 R3 + R2 R3 + 2.0 R1 R2 R3 + R2 R4 + R3 R4)) + 1/R1
    R2 R3 (-2.0 R4 + 9.0 R1 R4 + R1 (2.0 - 1.0 (-6.0 R1 + 29. R1 R2 + 9.0 R1 R2 R3 + 9.0 R1 R2 R4 + 9.0 R1 R3 R4)/(3.0 R2 + 7.0 R1 R2 + R1 R3 + R2 R3 + 2.0 R1 R2 R3 + R2 R4 + R3 R4)) +
      R4 (2.0 - 1.0 (-6.0 R1 + 29. R1 R2 + 9.0 R1 R2 R3 + 9.0 R1 R2 R4 + 9.0 R1 R3 R4)/(3.0 R2 + 7.0 R1 R2 + R1 R3 + R2 R3 + 2.0 R1 R2 R3 + R2 R4 + R3 R4))),
  Vc → 1/R1 (-2.0 R4 + 9.0 R1 R4 + R1 (2.0 - 1.0 (-6.0 R1 + 29. R1 R2 + 9.0 R1 R2 R3 + 9.0 R1 R2 R4 + 9.0 R1 R3 R4)/(3.0 R2 + 7.0 R1 R2 + R1 R3 + R2 R3 + 2.0 R1 R2 R3 + R2 R4 + R3 R4)) +
    R4 (2.0 - 1.0 (-6.0 R1 + 29. R1 R2 + 9.0 R1 R2 R3 + 9.0 R1 R2 R4 + 9.0 R1 R3 R4)/(3.0 R2 + 7.0 R1 R2 + R1 R3 + R2 R3 + 2.0 R1 R2 R3 + R2 R4 + R3 R4))),
  Vd → 2.0 - 1.0 (-6.0 R1 + 29. R1 R2 + 9.0 R1 R2 R3 + 9.0 R1 R2 R4 + 9.0 R1 R3 R4)/(3.0 R2 + 7.0 R1 R2 + R1 R3 + R2 R3 + 2.0 R1 R2 R3 + R2 R4 + R3 R4),
  Vx → (-6.0 R1 + 29. R1 R2 + 9.0 R1 R2 R3 + 9.0 R1 R2 R4 + 9.0 R1 R3 R4)/(3.0 R2 + 7.0 R1 R2 + R1 R3 + R2 R3 + 2.0 R1 R2 R3 + R2 R4 + R3 R4),
  Iy → 0.33 (-1/R1 1.0 (-2.0 R4 + 9.0 R1 R4 + R1 (2.0 - 1.0 (-6.0 R1 + 29. R1 R2 + 9.0 R1 R2 R3 + 9.0 R1 R2 R4 + 9.0 R1 R3 R4)/(3.0 R2 + 7.0 R1 R2 + R1 R3 + R2 R3 + 2.0 R1 R2 R3 + R2 R4 + R3 R4)) +
      R4 (2.0 - 1.0 (-6.0 R1 + 29. R1 R2 + 9.0 R1 R2 R3 + 9.0 R1 R2 R4 + 9.0 R1 R3 R4)/(3.0 R2 + 7.0 R1 R2 + R1 R3 + R2 R3 + 2.0 R1 R2 R3 + R2 R4 + R3 R4)) +
    1/(-1.0 R2 R4 - 1.0 R3 R4) (-2.0 R3 R4 - 2.0 R2 R3 R4 (-6.0 R1 + 29. R1 R2 + 9.0 R1 R2 R3 + 9.0 R1 R2 R4 + 9.0 R1 R3 R4)/(3.0 R2 + 7.0 R1 R2 + R1 R3 + R2 R3 + 2.0 R1 R2 R3 + R2 R4 + R3 R4) -
      1.0 R2 R3 (2.0 - 1.0 (-6.0 R1 + 29. R1 R2 + 9.0 R1 R2 R3 + 9.0 R1 R2 R4 + 9.0 R1 R3 R4)/(3.0 R2 + 7.0 R1 R2 + R1 R3 + R2 R3 + 2.0 R1 R2 R3 + R2 R4 + R3 R4)) + 1/R1
      R2 R3 (-2.0 R4 + 9.0 R1 R4 + R1 (2.0 - 1.0 (-6.0 R1 + 29. R1 R2 + 9.0 R1 R2 R3 + 9.0 R1 R2 R4 + 9.0 R1 R3 R4)/(3.0 R2 + 7.0 R1 R2 + R1 R3 + R2 R3 + 2.0 R1 R2 R3 + R2 R4 + R3 R4)) +
        R4 (2.0 - 1.0 (-6.0 R1 + 29. R1 R2 + 9.0 R1 R2 R3 + 9.0 R1 R2 R4 + 9.0 R1 R3 R4)/(3.0 R2 + 7.0 R1 R2 + R1 R3 + R2 R3 + 2.0 R1 R2 R3 + R2 R4 + R3 R4))))}}
```

Figura 9: Solución sistema de ecc.

Luego, habiendo encontrado I_y y V_x con el sistema anterior, sólo falta calcular V_o:

$$V_o = V_a - V_b$$