Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento De Ingeniería Eléctrica
IEE2123 Circuitos Eléctricos
Profesor: David Watts
Ayudantes: Nicolás Garrido Eduardo Guarda Cristóbal Matute

Pauta Interrogación 2

Problema 1

a)

El método de superposición nos dice que hay que apagar todas las fuentes independientes y medir el parámetro pedido con una fuente a la vez. En este caso, como hay dos fuentes independientes de voltaje, se debe medir la corriente I_0 en dos casos, mostrados en la siguiente figura:

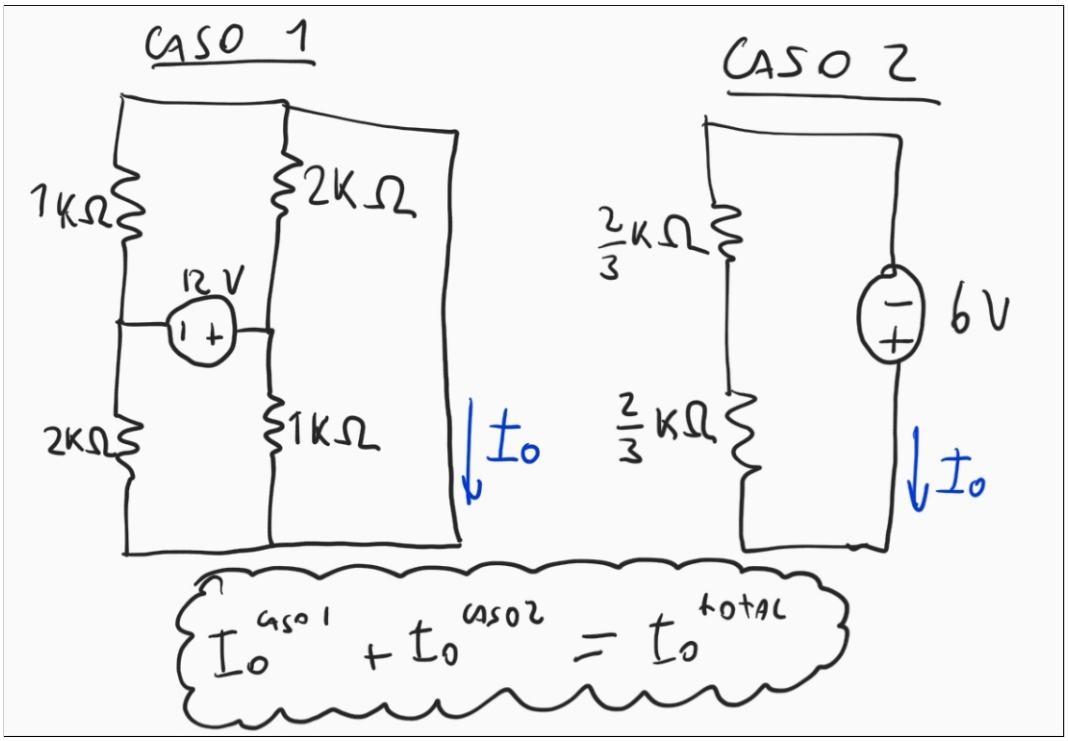


Figura 1: Circuito analizado por el método de superposición

Para el caso 1, podemos calcular el equivalente de Thévenin visto por el cable de la derecha (cualquier método sirve, Thévenin es sólo uno de ellos), para así calcular fácilmente la corriente que pasa por este. El voltaje de circuito abierto se calcula como la diferencia de voltaje entre ambos nodos de circuito abierto, los cuales pueden ser calculados mediante divisores de voltaje. En la figura 2 se muestran los parámetros a los cuales se referirá en el desarrollo.

Al calcular el voltaje del nodo superior, queda:

$$v_{Th}^{+} = 12V * \frac{2k\Omega}{1k\Omega + 2k\Omega} = 8V$$

Al calcular el voltaje del nodo inferior, queda:

$$v_{Th}^{-} = 12V * \frac{1k\Omega}{1k\Omega + 2k\Omega} = 4V$$

Luego, queda que el voltaje de Thévenin es:

$$V_{Th} = v_{Th}^{+} - v_{Th}^{-} = 4V$$

La resistencia equivalente se calcula con la fuente de voltaje apagada. Esta queda como:

$$R_{Th} = 2 * \frac{2}{3}k\Omega = \frac{4}{3}k\Omega$$

Al reemplazar el circuito abierto por el cable, queda que la corriente en el caso 1 es:

$$I_0^{caso\,1} = \frac{4V}{4/3k\Omega} = 3mA$$

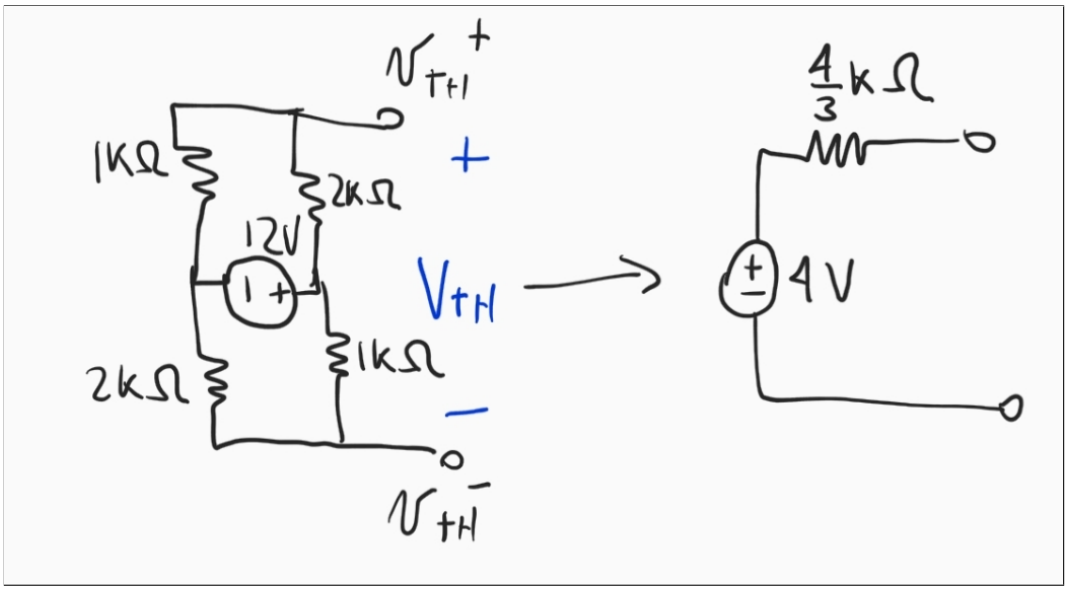


Figura 2: Equivalente de Thévenin visto por el cable en el caso 1

Para el caso 2, la corriente se calcula directamente por Ley de Ohm. Queda:

$$I_0^{caso\,2} = \frac{6V}{4/3k\Omega} = 4{,}5mA$$

Finalmente, la suma de ambos casos queda:

$$I_0 = 3mA + 4{,}5mA = 7{,}5mA$$

b)

Podemos calcular directamente el equivalente de Thévenin visto por los nodos a y b, y luego, mediante transformación de fuentes, podemos sacar el equivalente de Norton.
Para calcular el voltaje equivalente, se arman dos ecuaciones de nodos. Sea y el nodo de la izquierda, queda:

$$\frac{2}{10}V_x = \frac{V_y}{6\Omega} + \frac{V_y + 12V - V_x}{4\Omega}$$

$$\frac{V_x - V_y - 12V}{4\Omega} + \frac{V_x}{10\Omega} = 0$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones para V_x, queda:

$$V_x = 15V$$

Para calcular la resistencia equivalente, se conecta una corriente de prueba de valor I_T conectando los nodos a y b, y se apaga la fuente independiente de voltaje de $12V$. Si la fuente de corriente de prueba tiene un voltaje de valor V_T, quedan las siguientes ecuaciones de nodos:

$$I_T = \frac{V_T - V_y}{4\Omega} + \frac{V_T}{10\Omega}$$

$$\frac{2}{10}V_T = \frac{V_y - V_T}{4\Omega} + \frac{V_y}{6\Omega}$$

Despejando $\frac{V_T}{I_T}$ del sistema de ecuaciones, queda una resistencia equivalente de:

$$R_{Th} = 12{,}5\Omega$$

Pasando el equivalente de Thévenin a un equivalente de Norton por transformación de fuentes, queda:

$$I_N = \frac{15V}{12{,}5\Omega} = 1{,}2A$$

La resistencia en paralelo a la fuente de corriente es del mismo valor de $12{,}5\Omega$.

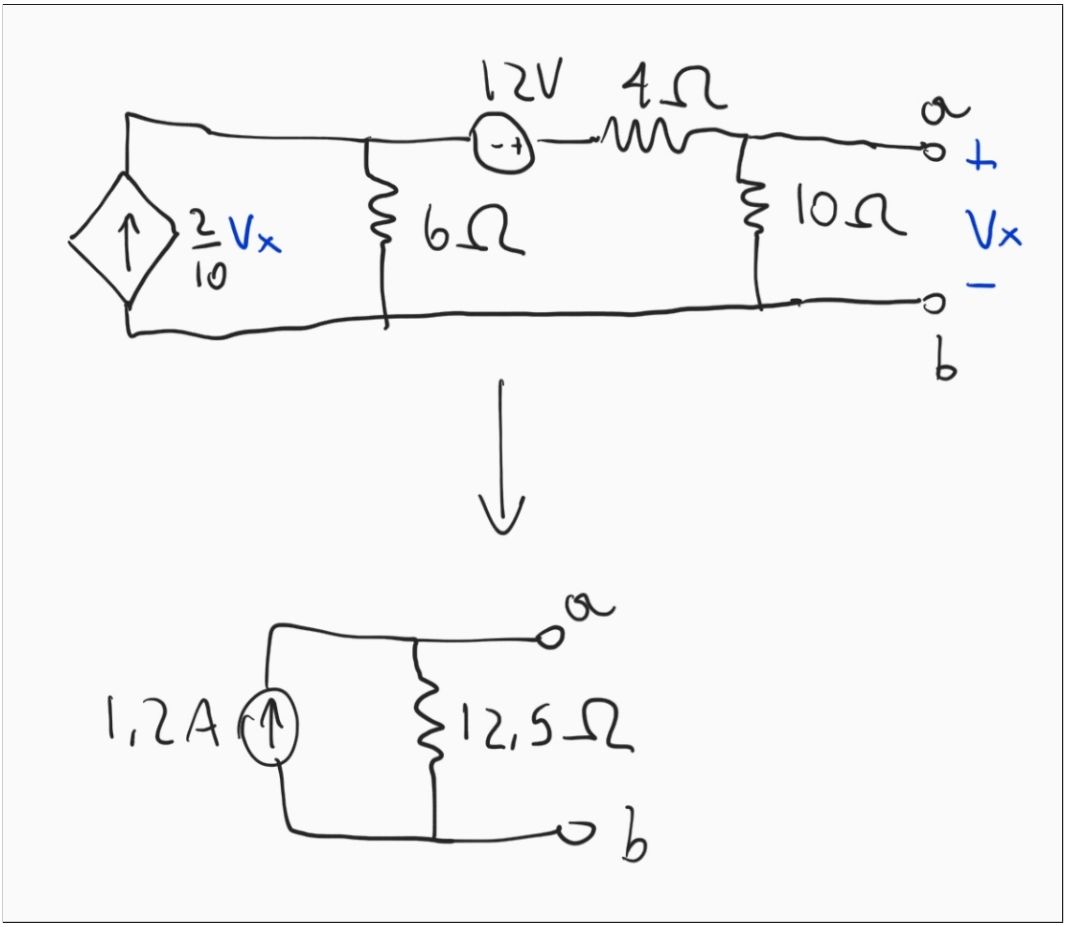


Figura 3: Equivalente de Norton del circuito de la parte b visto por los terminales a y b

c)

Para reducir este circuito, conviene reducir mediante transformación de fuentes de izquierda a derecha, hasta quedarnos con un sistema RL paralelo con una fuente de corriente o bien un sistema RL serie con una fuente de voltaje en serie.
Primero, podemos eliminar la resistencia de $5k\Omega$ ya que está en serie con una fuente de corriente. Luego, podemos transformar la fuente de voltaje en serie con la resistencia de $2k\Omega$ en una fuente de corriente en paralelo con la resistencia. La fuente de corriente queda de un valor de:

$$I_1 = \frac{10V}{2k\Omega} = 5mA$$

Luego, esta fuente se puede sumar con la de $2mA$ para crear una sóla fuente de corriente de $7mA$. Hasta ahora, el circuito equivalente se ve de la siguiente manera:

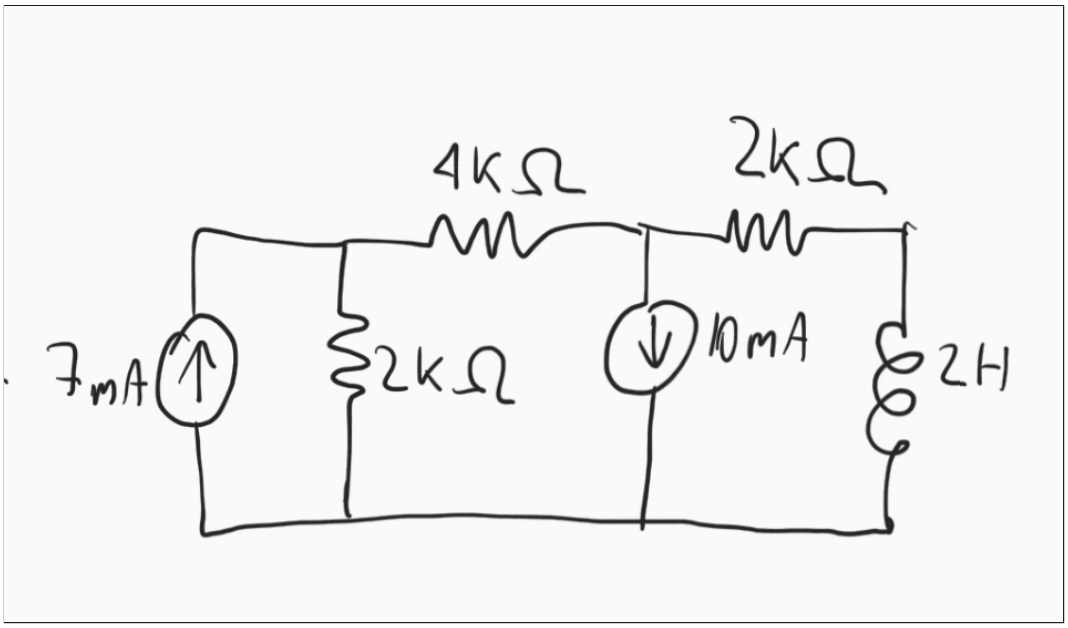


Figura 4: Circuito intermedio de reducción de fuentes

Luego, si se transforma la fuente de corriente de $7mA$ en paralelo con la resistencia de $2k\Omega$ a una fuente de voltaje en serie con la resistencia, la fuente de voltaje queda de un valor de:

$$V_1 = 7mA * 2k\Omega = 14V$$

Luego, si volvemos a pasar de fuente de voltaje a fuente de corriente, queda de un valor de:

$$I_2 = \frac{7}{3}mA$$

Esta fuente se puede reducir con la de $10mA$ que está en paralelo. Queda una fuente apuntando hacia abajo de un valor de $\frac{23}{3}mA$. Finalmente, transformando una vez mas, queda el siguiente circuito equivalente, en sus dos versiones:

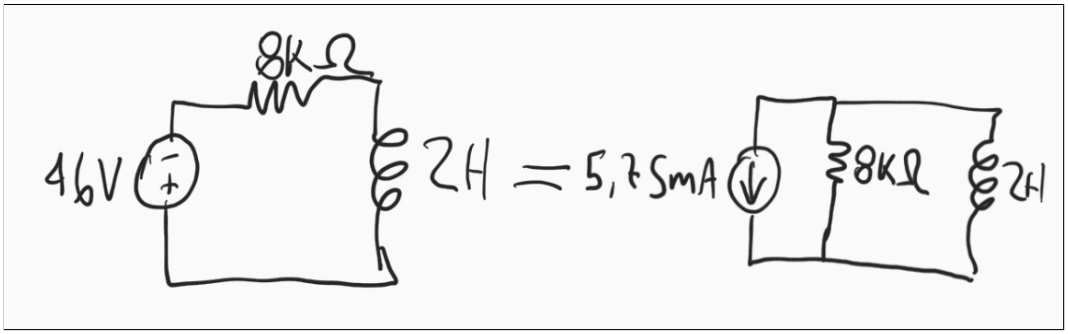
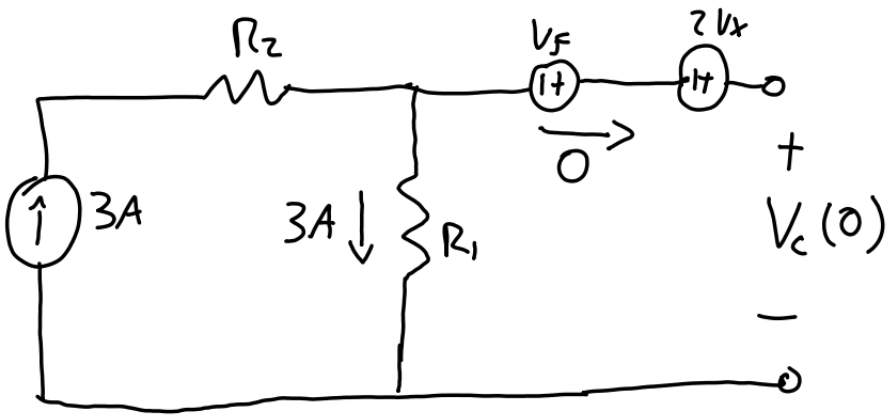


Figura 5: Equivalentes de Thévenin y Norton del circuito original

Problema 2

a)

Sabemos que los capacitores se comportarán como circuito abierto en $t < 0$, por lo que el circuito es el siguiente:



Por la ley de voltajes de Kirchhoff:

$$3V_x + V_f$$

Además, por ley de ohm, el voltaje V_x será:

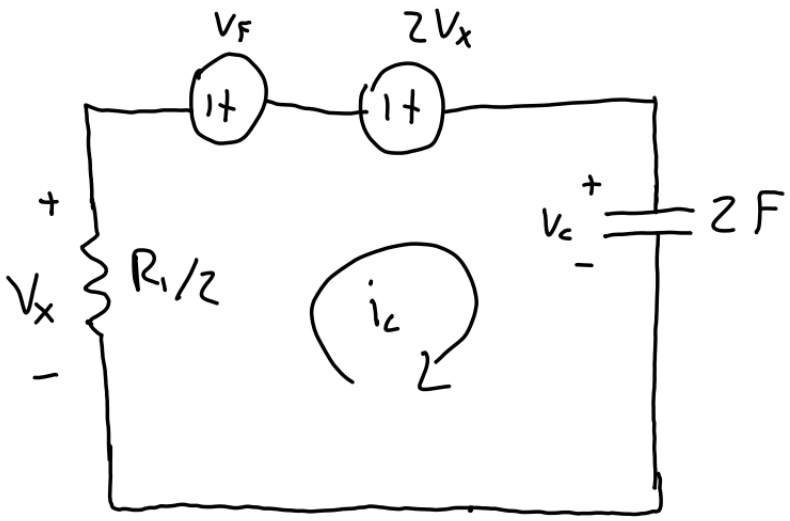
$$V_x = I * R_1 = 3R_1$$

Finalmente:

$$V_c(0) = 9R_1 + V_f = 24 + 9R_1$$

b)

Al cerrar el switch, quedan los dos resistores en paralelo. Además, si se simplifican los capacitores se obtiene que la capacitancia equivalente es 2F. El circuito simplificado es el siguiente:



Con la malla:

$$V_x + V_f + 2V_x = V_c$$

Se sabe que:

$$i_c = C\frac{dV_c}{dt}$$

Además, se usa la ley de ohm en el resistor para obtener V_x:

$$V_x = -i_c \cdot \frac{R_1}{2} = -C\frac{dV_c}{dt}\frac{R_1}{2}$$

Reemplazando en la ecuación de la malla y dividiendo por el coeficiente que acompaña al término de primer orden, se obtiene la ecuación diferencial:

$$\frac{dV_c}{dt} + \frac{2}{3R_1C}V_c = \frac{2}{3R_1C}V_f$$

c)

Al resolver la ecuación característica se encuentra que $r = -2/(3R_1C)$. La solución homogénea:

$$V_{ch} = c_1 e^{-\frac{2}{3}\frac{t}{R_1C}}$$

Se propone solución particular como una combinación lineal de la entrada y su derivada, que al ser una exponencial, queda como:

$$V_{cp} = A + Be^{-t}$$

Al reemplazar en la EDO:

$$-Be^{-t} + \frac{2}{3}\frac{1}{R_1C}A + \frac{2}{3}\frac{1}{R_1C}Be^{-t} = 24\frac{2}{3}\frac{1}{R_1C}(1 + e^{-1})$$

Comparando los coeficientes sin exponencial:

$$A = 24$$

Comparando los coeficientes de las exponenciales a ambos lados:

$$B = \frac{48}{2 - 3R_1C}$$

Se suman ambas respuestas, y se reemplaza C=2F:

$$V_c(t) = V_{ch}(t) + V_{cp}(t) = c_1 e^{-\frac{1}{3R_1}t} + 24 + \frac{24}{1 - 3R_1} e^{-t}$$

Condiciones iniciales:

$$V_c(0) = c_1 + 24 + \frac{24}{1 - 3R_1} = 24 + 9R \Rightarrow c_1 = 9R_1 + \frac{24}{3R_1 - 1}$$

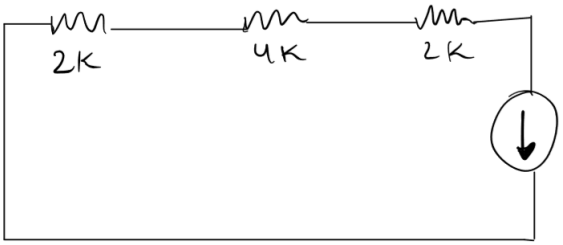
Entonces:

$$V_c(t) = 24 + \left(9R_1 + \frac{24}{3R_1 - 1}\right) e^{-\frac{1}{3R_1}t} + \frac{24}{1 - 3R_1} e^{-t}$$

Problema 3

a)

Al calcular el equivalente de Norton se debe apagar todas las fuentes independientes del circuito quedando el siguiente esquematico.



De donde Podemos notar que la resistencia equivalente sera la suma de todas las resistencias. Dando un resistencia equivalente de $8k\Omega$ Para el calculo del valor de la fuente de corriente debemos estudiar el comportamiento del circuito original. Aplicando nodos vemos las siguientes ecuaciones

$$\frac{V_1 - 10}{2} + \frac{V_1 - V_2}{4} - 2 = 0$$

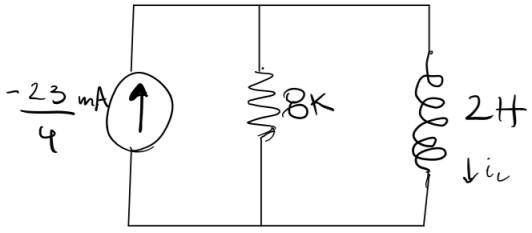
$$\frac{V_2 - V_1}{4} + \frac{V_2}{2} + 10 = 0$$

De donde despejando obtenemos los siguientes valores:

$$V_1 = \frac{11}{2}V$$

$$V_2 = \frac{-23}{2}V$$

Entonces $I_L = \frac{-23}{4}mA$, que es igual a el valor de la fuente de Norton. Finalmente el circuito equivalente es:



b)

Para obtener la ecuacion diferencial debemos recordar la ecuacion del inductor la cual es $V_L = \frac{dI_L}{dt}L$. Aplicando La ecuacion de nodos en el circuito simplificado nos queda

$$\frac{V_L}{8} + i_L = \frac{-23}{4}$$

Donde remplazando nos queda la siguiente EDO.

$$\frac{\partial i_L}{\partial t}\frac{1}{4} + i_L + \frac{23}{4} = 0$$

c)

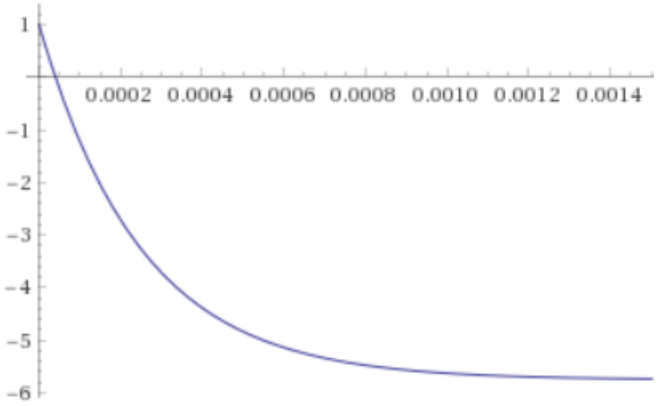
Calculando la constante de tiempo τ y teniendo la condicion inicial y el comportamiento en el infinito podemos aplicar la siguiente formula

$$i_L(t) = (i_L(0) - i_L(\infty))e^{\frac{-t}{\tau}} + i_L(\infty)$$

Con $\tau = \frac{L}{R}$, finalmente:

$$i_L(t) = (1 + \frac{23}{4})e^{-4000t} - \frac{23}{4}$$

Graficando obtenemos:

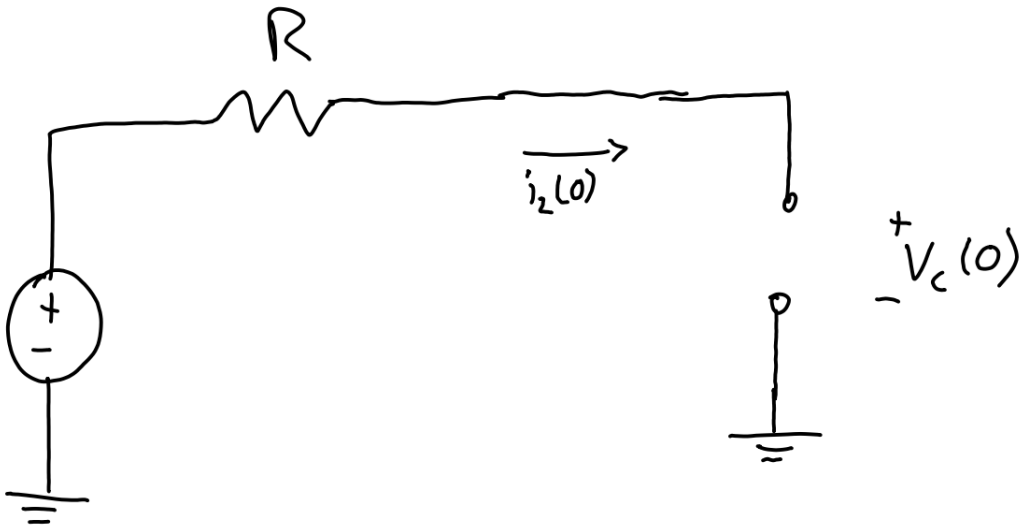


Con el eje X como tiempo en segundos y el eje Y como mA

Problema 4

a)

Como el capacitor se comporta como circuito abierto, no hay corriente. El circuito equivalente es:

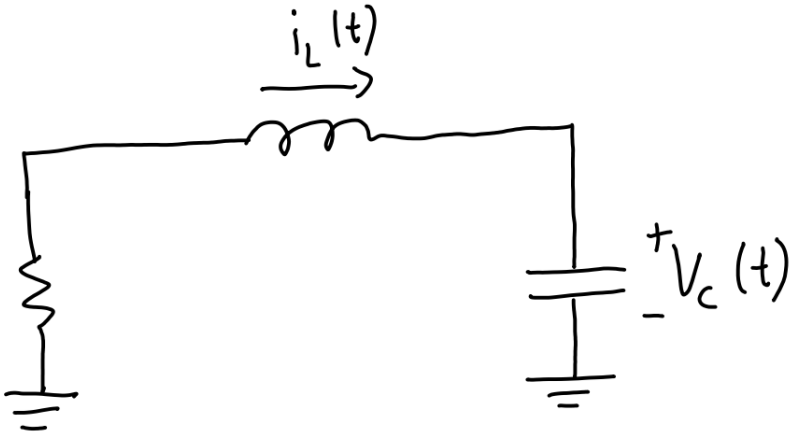


Y se cumple:

$$i_L(0) = 0$$
$$V_c(0) = V$$

b)

El circuito para $t > 0$ es:



Debe tenerse cuidado el sentido en que se define la corriente del inductor. En caso de haberla definido al revés a esta pauta, el resultado debe ser el mismo pero con el signo contrario. Siguiendo el sentido de la corriente definido aquí:

$$i_L R + V_L + V_c = 0$$

Derivamos la expresión anterior:

$$\frac{dV_L}{dt} + R\frac{di_L}{dt} + \frac{dV_c}{dt} = 0$$

Considerando que la corriente del inductor es igual a la del capacitor, y con la relación de voltaje y corriente del inductor:

$$\frac{dV_L}{dt} = L\frac{d^2i_L}{dt^2}$$

$$C\frac{dV_c}{dt} = i_c = i_L$$

Reemplazando en la ecuación de malla y dividiendo por el coeficiente del término de segundo orden, se obtiene la ecuación diferencial del sistema:

$$\frac{d^2i_L}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di_L}{dt} + \frac{1}{LC}i_L = 0$$

Se identifican los siguientes valores:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\zeta = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}$$

c)

De la ecuación de la malla, y considerando las condiciones iniciales encontradas en a):

$$i_L(0)R + V_L(0) + V_c(0) = i_L(0)R + Li'_L(0) + V_c(0) = 0 \Rightarrow i'_L(0) = -\frac{10}{L}$$

Reemplazando los valores del enunciado, al resolver el polinomio característico se obtiene:

$$r_{1,2} = -\frac{1}{4} \pm j\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{7}{8}}$$

Corresponde a una respuesta subamortiguada, por lo tanto, sinusoidal:

$$i_L(t) = e^{-\frac{t}{4}}\left(k_1 \sin\left(\frac{\sqrt{7}}{4}t\right) + k_2 \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{4}t\right)\right)$$

Condiciones iniciales:

$$i_L(0) = k_2 = 0$$

$$i'_L(t) = -\frac{1}{4}e^{-t/4}k_1 \sin\left(\frac{\sqrt{7}}{4}t\right) + \frac{\sqrt{7}}{4}e^{-t/4}k_1 \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{4}t\right)$$

Evaluando en t=0:

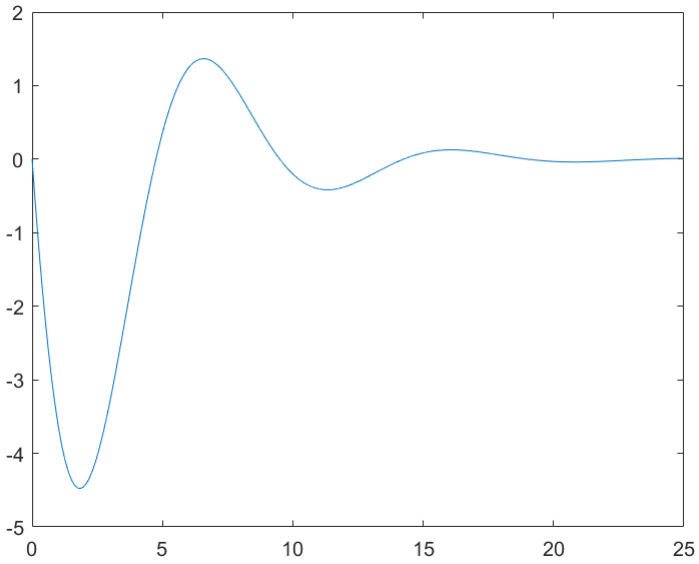
$$i'_L(0) = k_1\frac{\sqrt{7}}{4} = \frac{-10}{L} = 5 \Rightarrow k_1 = -\frac{20}{\sqrt{7}}$$

Finalmente:

$$i_L(t) = -\frac{20}{\sqrt{7}}e^{-t/4} \sin\left(\frac{\sqrt{7}}{4}t\right)$$

d)

El gráfico es una sinusoide que decae exponencialmente:



Respecto al tipo de respuesta, hay que ver el factor de amortiguamiento ζ:

$$\text{sobreamortiguado} \quad \zeta > 0 \Rightarrow R > 2\sqrt{2}$$

$$\text{críticamente amortiguado} \quad \zeta = 0 \Rightarrow R = 2\sqrt{2}$$

$$\text{subamortiguado} \quad \zeta < 0 \Rightarrow R < 2\sqrt{2}$$