Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ingeniería Eléctrica
IEE2123 - Circuitos Eléctricos

Tarea 4

Método de mallas

1º semestre 2023 - Profesor David Watts

Ayudante: Elena Contardo (ele.contardo@uc.cl)

- La tarea debe ser subida en formato .pdf a Canvas al buzón correspondiente con letra legible.
- No hay posibilidad de utilizar un comodín para poder entregar la tarea 3 días después del plazo final.

Problema 1 (6 ptos.)

Responda las siguientes preguntas:

a) ¿Cuáles son los pasos para resolver un ejercicio utilizando el método de mallas?

b) ¿Qué es una supermalla?

c) Diseñe un circuito en el que usted crea que es más conveniente utilizar método de mallas antes que método de nodos. Explique la razón.

Solución:

a) Los pasos para resolver un ejercicio utilizando el método de mallas son:
   a) Definir una corriente para cada malla.
   b) Encontrar la ecuación KVL para cada malla.
   c) Resolver el sistema de ecuaciones.

b) Es cuando hay una fuente de corriente entre dos mallas, por lo que al hacer la ecuación KVL se consideran las mallas unidas por la fuente como una gran malla.

c) Se busca la justificación a partir de que uno de los métodos implica una menor cantidad de variables o ecuaciones.

Criterios de corrección:

- 1 punto por cada sub-ítem de la parte a) (3 puntos en total).

- 1,5 puntos por decir qué es una supermalla.
- 1,5 puntos si justifica c) (0,5 puntos si sólo dibuja un circuito y no justifica).

Problema 2 (6 ptos.)

a) Plantee el sistema matricial con forma Ri=v, siendo v el vector de fuentes independientes de voltaje, que permita directamente encontrar las corrientes de malla para el circuito de la Figura 1.

b) Verifique si la matriz R obtenida en la parte a) es o no la inversa de la matriz de admitancia Y que se obtiene en el método de nodos cuando se formula matricialmente. Recuerden que en clases se vio el problema de construcción matricial por simple inspección que generaba un problema matricial simple de la forma Yv = i , donde v era el vector de voltajes de nodos, i era el vector de corrientes inyectadas a los nodos por las fuentes independientes de corriente e Y es la matriz que contiene a los inversos de las resistencias 1/Ri, es decir, las admitancias, por lo que se llama la matriz de admitancia. Los detalles de construcción de la matriz fueron presentados en clases.

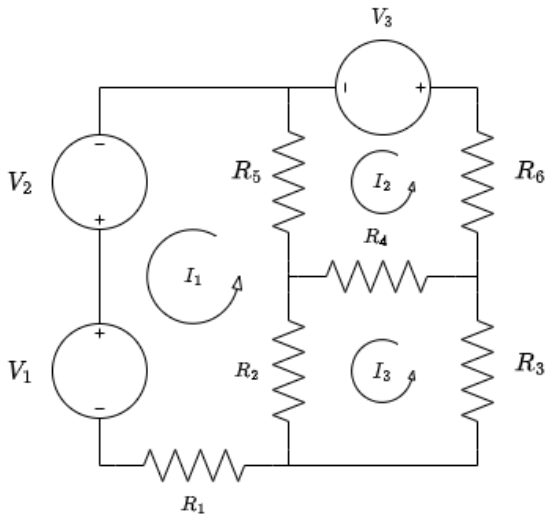


Figura 1: Circuito 1

Solución:

a) Teniendo ya definidas las corrientes en cada malla, se hace ley de mallas en cada una:

- Malla 1:

$$-V_2 + V_1 + R_1 \cdot I_1 + R_2 \cdot (I_1 - I_3) + R_5 \cdot (I_1 - I_2) = 0$$

- Malla 2:

$$V_3 + R_5 \cdot (I_2 - I_1) + R_4 \cdot (I_2 - I_3) + R_6 \cdot I_2 = 0$$

- Malla 3:

$$R_3 \cdot I_3 + R_4 \cdot (I_3 - I_2) + R_2 \cdot (I_3 - I_1) = 0$$

Ordenando las ecuaciones:

- Malla 1:

$$I_1 \cdot (R_1 + R_2 + R_5) - I_2 \cdot R_5 - I_3 \cdot R_2 = V_2 - V_1$$

- Malla 2:

$$-I_1 \cdot R_5 + I_2 \cdot (R_5 + R_4 + R_6) - I_3 \cdot R_4 = -V_3$$

- Malla 3:

$$-I_1 \cdot R_2 - I_2 \cdot R_4 + I_3 \cdot (R_2 + R_3 + R_4) = 0$$

Luego, el sistema matricial es el siguiente:

$$\begin{pmatrix} R_1 + R_2 + R_5 & -R_5 & -R_2 \\ -R_5 & R_4 + R_5 + R_6 & -R_4 \\ -R_2 & -R_4 & R_2 + R_3 + R_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_2 - V_1 \\ -V_3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) Se observa a simple vista que al realizar método de nodos se tendrían 4 nodos y la referencia, por lo que la matriz Y tendría dimensión 4x4, mientras que la matriz R obtenida tiene dimensión 3x3, por lo que inmediatamente se observa que la inversa de R no será igual a Y. Además, cada matriz R y matriz Y dependerá de dónde se colocó la referencia, del sentido de las corrientes de malla, etc. De todas formas, sí existe una relación entre la matriz R y la matriz Y, que viene a partir de la Ley de Ohm, donde en casos específicos la matriz Y será la inversa de la matriz R, pero para eso se debe trabajar con las ecuaciones definidas.

Criterios de corrección:

- 1 punto por plantear la ecuación de cada malla (3 puntos en total).
- 1 punto por representar correctamente el sistema matricial final.
- 2 puntos por verificar y argumentar que no se cumple que R es la matriz inversa de Y.

Problema 3 (6 ptos.)

Encuentre el valor de V_o a partir del método de mallas en el circuito de la Figura 2.

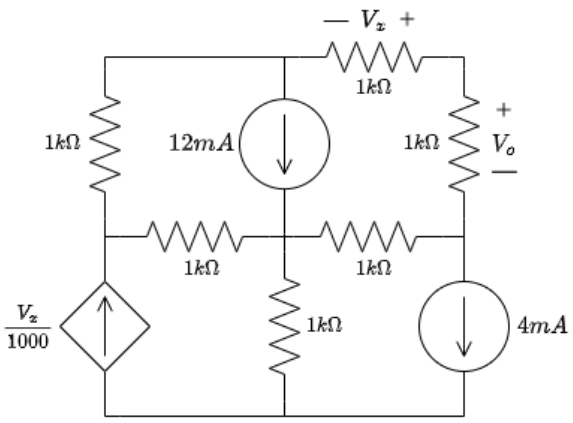


Figura 2: Circuito 2

Solución:
Inicialmente se definen las corrientes dentro de cada malla:

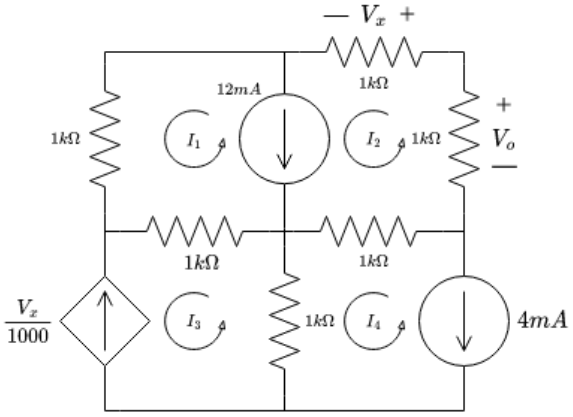


Figura 3: Circuito 2 con corrientes definidas

Luego, se define la ecuación KVL para cada malla:

- Supermalla 1-2:

$$1k \cdot I_1 + 1k \cdot (I_1 - I_3) + 1k \cdot (I_2 - I_4) + (1k + 1k) \cdot I_2 = 0$$

$$I_1 + 12m = I_2$$

- Malla 3:

$$I_3 = -\frac{V_x}{1000}$$
$$V_x = I_2 \cdot 1k$$

- Malla 4:

$$I_4 = -4m$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones anterior se obtiene:

$$I_1 = -0{,}00866A$$

$$I_2 = 0{,}00333A$$

$$I_3 = -0{,}0033A$$

$$I_4 = -0{,}004A$$

$$V_x = 3{,}33V$$

Luego, V_o es:

$$V_o = -I_2 \cdot 1000 = -3{,}33V$$

Criterios de corrección:

- 1 punto por cada ecuación KVL (5 puntos en total).
- 1 punto por resolver y encontrar V_o correctamente.

Problema 4 (6 ptos.)

En base al método de mallas, establezca un sistema de ecuaciones de la forma Ai = b para el circuito de la Figura 3, reduciendo al máximo el número de variables.

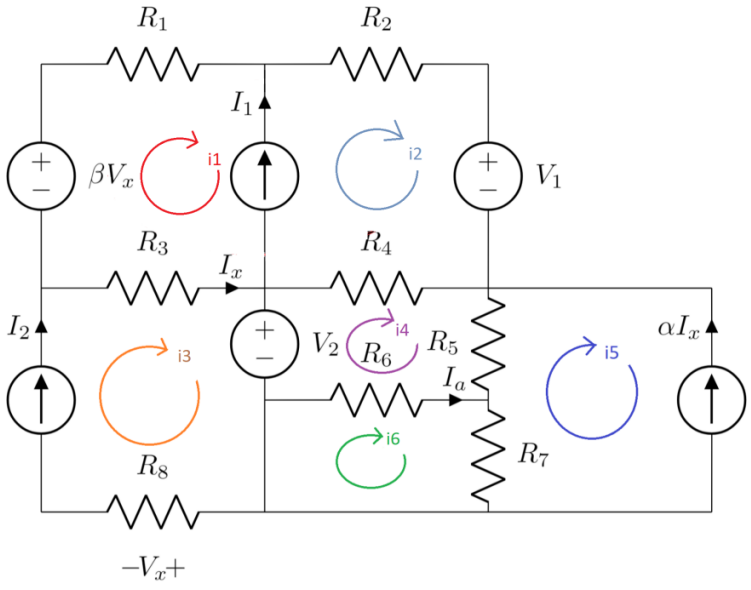


Figura 4: Circuito 3

Solución: Se hace KVL en cada malla:

- Supermalla 1-2:

$$R_3 \cdot (i_1 - i_3) - \beta V_x + R_1 \cdot i_1 + R_2 \cdot i_2 + V_1 + R_4 \cdot (i_2 - i_4) = 0$$

$$i_1 + I_1 = i_2$$

$$V_x = i_3 \cdot R_8$$

- Malla 3:

$$i_3 = I_2$$

- Malla 4:

$$-V_2 + R_4 \cdot (i_4 - i_2) + R_5 \cdot (i_4 - i_5) + R_6 \cdot (i_4 - i_6) = 0$$

- Malla 5:

$$i_5 = -\alpha I_x$$

$$I_x = i_3 - i_1$$

- Malla 6:

$$R_6(i_6 - i_4) + R_7 \cdot (i_6 - i_5) = 0$$

Ordenando las ecuaciones anteriores:

- Supermalla 1-2:

$$i_1 \cdot (R_1 + R_3) + i_2 \cdot (R_2 + R_4) - i_3 \cdot (R_3 + \beta R_8) - i_4 \cdot R_4 = -V_1$$

$$i_1 - i_2 = -I_1$$

- Malla 3:

$$i_3 = I_2$$

- Malla 4:

$$-i_2 \cdot R_4 + i_4 \cdot (R_4 + R_5 + R_6) - i_5 \cdot R_5 - i_6 \cdot R_6 = V_2$$

- Malla 5:

$$i_5 = -\alpha \cdot (i_3 - i_1) \rightarrow -i_1 \cdot \alpha + i_3 \cdot \alpha + i_5 = 0$$

- Malla 6:

$$-i_4 \cdot R_6 - i_5 \cdot R_7 + i_6 \cdot (R_6 + R_7) = 0$$

Se puede obtener el sistema matricial a partir de las ecuaciones anteriores, donde se tienen 6 ecuaciones para 6 variables, o existe la posibilidad de reducir las variables a partir de reemplazar estas en otras ecuaciones.

Reemplazando el valor de i_3 (ecuación de la malla 3), i_1 o i_2 (a partir de la segunda ecuación de la supermalla 1-2), e i_5 (ecuación de la malla 5) en el resto de ecuaciones es posible disminuir las variables. Lo anterior se hace a continuación:

- Supermalla 1-2:

$$i_1 \cdot (R_1 + R_3) + (I_1 + i_1) \cdot (R_2 + R_4) - I_2 \cdot (R_3 + \beta R_8) - i_4 \cdot R_4 = -V_1$$

$$i_1 \cdot (R_1 + R_3 + R_2 + R_4) - I_2 \cdot (R_3 + \beta R_8) - i_4 \cdot R_4 = -V_1 - I_1 \cdot (R_2 + R_4)$$

- Malla 4:

$$-(I_1 + i_1) \cdot R_4 + i_4 \cdot (R_4 + R_5 + R_6) - (-\alpha \cdot (I_2 - i_1)) \cdot R_5 - i_6 \cdot R_6 = V_2$$

$$-i_1 \cdot (R_4 + \alpha R_5) + i_4 \cdot (R_4 + R_5 + R_6) - i_6 \cdot R_6 = V_2 + I_1 \cdot R_4 - \alpha I_2 \cdot R_5$$

- Malla 6:

$$-i_4 \cdot R_6 - (-\alpha \cdot (I_2 - i_1)) \cdot R_7 + i_6 \cdot (R_6 + R_7) = 0$$

$$-i_1 \cdot \alpha R_7 - i_4 \cdot R_6 + i_6 \cdot (R_6 + R_7) = -\alpha I_2 \cdot R_7$$

De esta forma, se tienen 3 ecuaciones que dependen de 3 variables (i_1, i_4 e i_6), con las cuales es posible hacer el sistema matricial, obteniendo una matriz de 3x3.

Criterios de corrección:

- 0,5 puntos por cada ecuación (son 8, aunque hay algunas redundantes por lo que se asignará puntaje completo si están las 6 principales) encontrada en las mallas (4 puntos en total).
- 1 punto por reemplazar ecuaciones y llegar a máximo 3 ecuaciones con tres variables (si quedó con 4 o 5 variables asignar 0,5 puntos).
- 1 punto por mostrar correctamente la ecuación matricial (si quedó con matriz de 4x4 o 5x5 asignar 0,5 puntos).