Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ingeniería Eléctrica
IEE2123 - Circuitos Eléctricos

Repaso: Circuitos de Primer Orden

1º semestre 2023 - Profesor David Watts

Ayudante: Elena Contardo (ele.contardo@uc.cl)

Problema 1

Para el circuito de la Figura 1 se sabe que el interruptor ha estado cerrado por mucho tiempo y que este se abre en t=0. Determine la expresión de Vo, el voltaje de R4, para cualquier tiempo $t > 0$ en función de los parámetros indicados en el circuito.

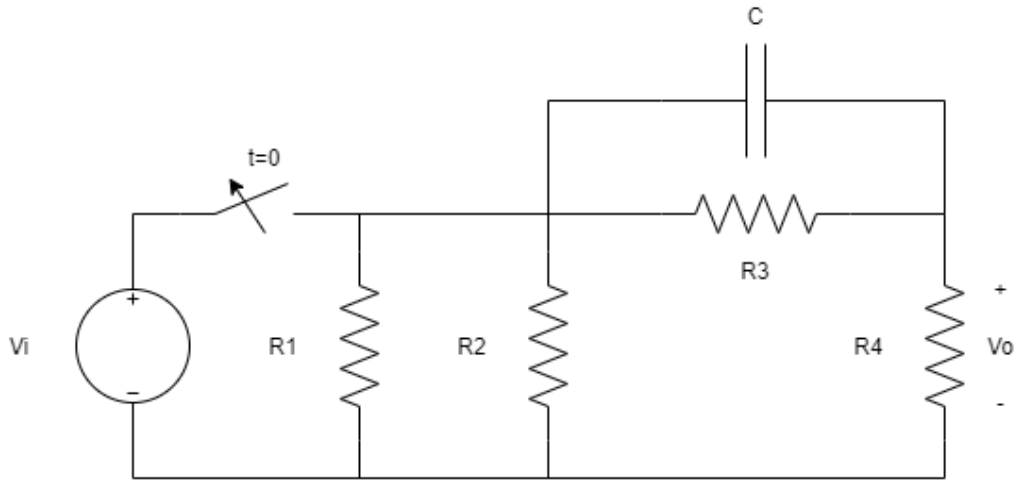
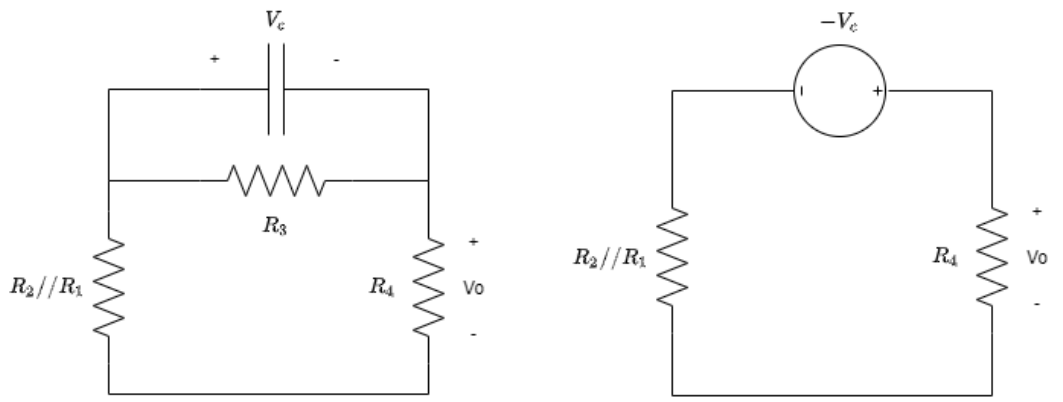


Figura 1: Circuito de primer orden con capacitor

Se quiere encontrar V_o para $t > 0$, que ocurre cuando el switch se encuentra abierto, en ese caso no hay fuentes como tal en el circuito, solo se encuentra el capacitor descargándose en las resistencias, el cual se puede considerar como una fuente de la forma:



Luego se tiene entonces que, por divisor de tensión:

$$Vo = -V_c \cdot \frac{R_4}{R_4 + (R_1//R_2)} \quad [V]$$

Por lo que para poder encontrar V_o se debe calcular en primer lugar el voltaje del capacitor V_c.

Se podría modelar la fuente equivalente del capacitor hacia el otro lado y se llegará a lo mismo, solo se debe ser consistente.

Se observa que solo hay un momento de cambio en el circuito en $t = 0$, por lo que para encontrar V_c se utilizará la ecuación general:

$$V_c(t) = (V_0 - V_c(\infty)) \cdot e^{\frac{-(t-t_o)}{R_{eq} \cdot C}} + V_c(\infty)$$

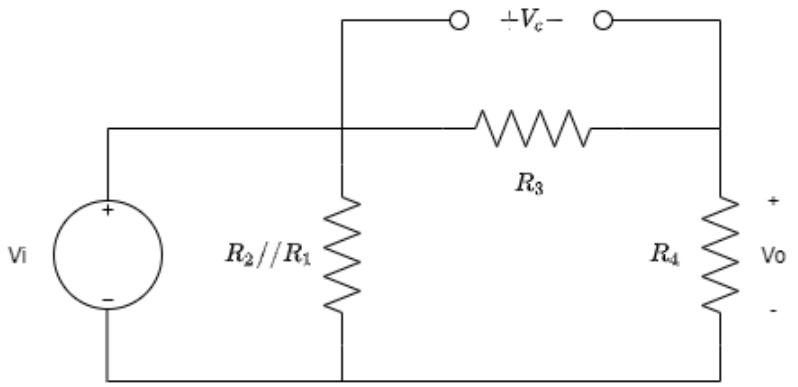
Donde como el instánte inicial es $t = 0$, $V_0 = V(0)$ (el voltaje del capacitor en t=0) y $t_o = 0$, quedando finalmente de la forma:

$$V_c(t) = (V_c(0) - V_c(\infty)) \cdot e^{\frac{-(t-0)}{R_{eq} \cdot C}} + V_c(\infty)$$

Por lo que ahora se deben encontrar los parámetros de la ecuación, partiendo por la condición inicial $V_c(0)$.

Debido a que los capacitores se oponen a los cambios bruscos de voltaje $V_c(0) = V_c(0^-) = V_c(0^+)$, por lo que se encontrará $V_c(0^-)$ en el instante antes que se mueva el switch ($t < 0$).

Para $t < 0$:
El circuito se encuentra con el switch cerrado por lo que el capacitor lleva cargándose mucho tiempo, entonces en este punto el capacitor funciona como un circuito abierto (Explicación: Esto se debe a que $I_c = C \cdot \frac{dV_c}{dt}$, y como ya se cargó completamente el voltaje es constante y la derivada es cero, entonces $I_c = 0$ cuando el capacitor esta completamente cargado, es decir, un circuito abierto).

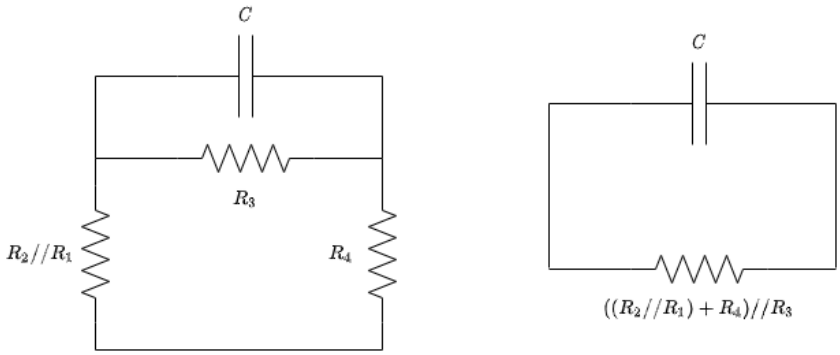


De esta forma, el voltaje del capacitor en $V_c(0) = V_c(0^-) = V_c(0^+)$ corresponde al voltaje de R_3, que por divisor de tensión se obtiene:

$$V_c(0) = V_{R_3} = V_i \cdot \frac{R_3}{R_4 + R_3} \quad [V]$$

Por lo que ya se encontró la condición inicial de la ecuación del voltaje. Luego falta encontrar R_{eq} y $V(\infty)$, lo cual se realiza en $t > 0$.

Para $t > 0$:
El switch se encuentra abierto, y reduciendo las resistencias se tiene un circuito de la forma:



La solución general corresponde a la solución de un circuito RC (Thevenin), por lo que se debe reducir el circuito a un Thevenin para encontrar los parámetros, pero se observa que luego de haber reducido las resistencias ya se obtuvo este circuito con parámetros de valor:

$$R_{thevenin} = ((R_2//R_1) + R_4)//R_3 \quad [\Omega]$$

Recordar: La resistencia de Thevenin se obtiene apagando las fuentes independientes (en este caso no se tenían), y luego se puede ver la resistencia total que tiene en serie el componente (capacitor en este caso), de no ser posible reducir en su totalidad las resistencias se debe colocar una fuente de prueba en el componente de voltaje V y corriente I, para luego encontrar la resistencia de Thevenin por ley de Ohm de la forma V/I.

Luego el voltaje de Thevenin es cero, ya que no hay fuentes alimentando el circuito.

$$V_{thevenin} = 0$$

Recordar: El voltaje de Thevenin corresponde al voltaje de circuito abierto, este se obtiene dejando en circuito abierto el componente y calculando el voltaje entre los terminales, en este caso como no había ninguna fuente el voltaje entre los terminales es cero.

Luego, se debe saber que:

$$R_{eq} = R_{thevenin}$$
$$V(\infty) = V_{thevenin}$$

Por lo que se tiene:

$$R_{eq} = R_{thevenin} = ((R_2//R_1) + R_4)//R_3$$
$$V(\infty) = V(thevenin) = 0$$

Y finalmente ya se tienen todos los parámetros de la ecuación general.

Reemplazando en la ecuación del inicio:

$$V_c(t) = (V_c(0) - V_c(\infty)) \cdot e^{\frac{-(t-0)}{R_{eq} \cdot C}} + V_c(\infty)$$

Se llega a:

$$V_c(t) = V_i \cdot \frac{R_3}{R_4 + R_3} \cdot e^{\frac{-t}{(((R_2//R_1)+R_4)//R_3) \cdot C}} \quad [V]$$

Teniendo ya el valor de V_c se puede reemplazar en la ecuación de Vo que se encontró al inicio del ejercicio.

$$Vo = -V_c \cdot \frac{R_4}{R_4 + (R_1//R_2)} \quad [V]$$

$$Vo = -V_i \cdot \frac{R_3}{R_4 + R_3} \cdot e^{\frac{-t}{(((R_2//R_1)+R_4)//R_3) \cdot C}} \cdot \frac{R_4}{R_4 + (R_1//R_2)} \quad [V] \quad t > 0$$

Problema 2

Los interruptores llevan abiertos mucho tiempo. Luego, en $t = 0$, S_1 se cierra, manteniéndose S_2 abierto. En $t = 3$ S_1 se vuelve a abrir, todavía con S_2 abierto. Finalmente, en $t = 7$, S_2 se cierra y S_1 queda abierto permanentemente. Encuentre el voltaje del capacitor en función de los parámetros del problema para todo $t > 0$.

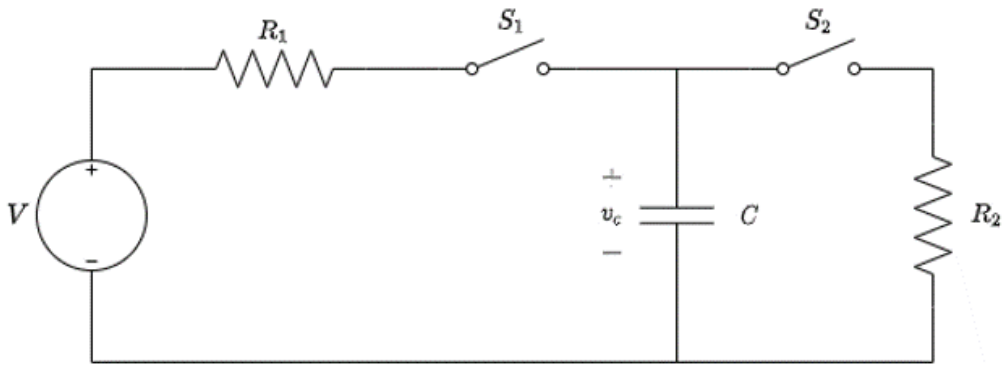


Figura 2: Circuito de primer orden

Se usará la ecuación general $v_c(t) = (V_0 - V(\infty)) \cdot e^{-\frac{(t-t_0)}{R_{eq}C}} + V(\infty)$ para encontrar v_c en cada intervalo.

Para $t < 0$ el circuito se ve de la forma:

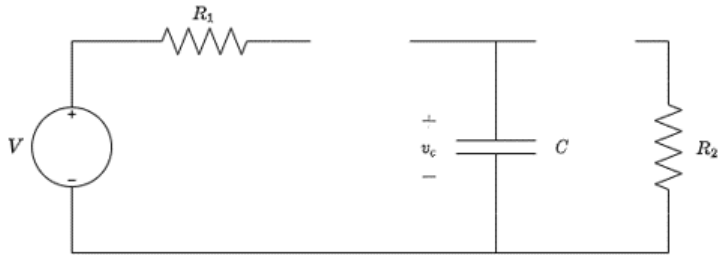


Figura 3: Circuito en $t < 0$

Luego, $v_c(0^-) = 0\ V$, ya que no se encuentra conectado a ninguna fuente, y como $v_c(0^-) = v_c(0^+) = v_c(0)$, ya que el capacitor se opone a cambios bruscos de voltaje, entonces $v_c(0) = 0V$.

Para $0 \leq t < 3$:

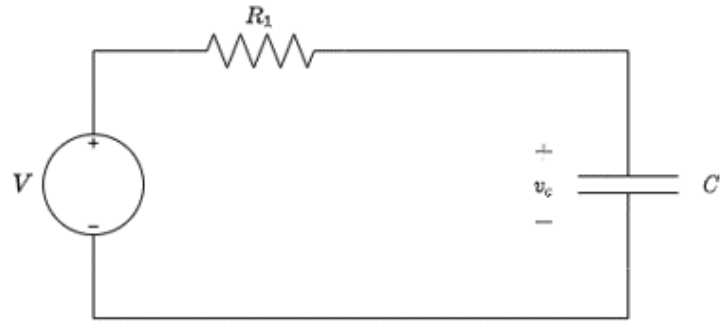


Figura 4: Circuito en $0 \leq t < 3$

El circuito corresponde a un Thevenin, por lo que no se necesita sacar su equivalente. Luego,

$$V(\infty) = V_{th} = V$$

$$R_{eq} = R_{th} = R_1\ \Omega$$

Como el instante inicial del intervalo corresponde a $t = 0$, entonces $t_o = 0$ y $V_0 = v_c(0^-) = v_c(0^+) = 0$, por lo que se calculó al inicio en $t < 0$.

Teniendo entonces todos los parámetros se procede a reemplazar en la ecuación general y se obtiene que para $0 \leq t < 3$:

$$v_c(t) = (0 - V) \cdot e^{-\frac{(t-0)}{R_1 C}} + V$$

$$v_c(t) = -V \cdot e^{-\frac{t}{R_1 C}} + V$$

Para $3 \leq t < 7$:

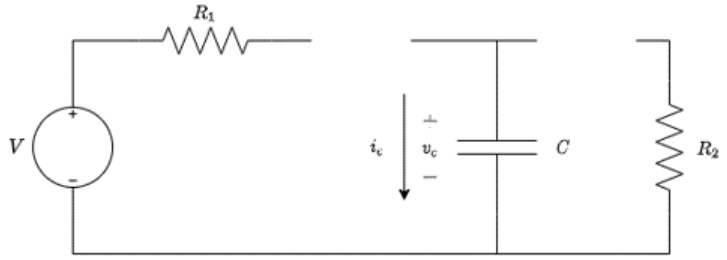


Figura 5: Circuito en $3 \leq t < 7$

Se ve que la corriente del capacitor $i_c = 0\ A$. Luego, sabiendo la relación entre corriente y voltaje de un capacitor, se llega a:

$$i_c = 0 = C \cdot \frac{dv_c}{dt} \rightarrow v_c\ constante$$

Al ser el v_c constante, significa que el voltaje que llevaba el capacitor hasta el punto antes del cambio del switch ($t = 3$), se mantendrá igual para todo este nuevo intervalo. Para encontrar este valor se usa el voltaje obtenido en el intervalo anterior ($v_c(t) = -V \cdot e^{-\frac{t}{R_1 C}} + V$) y se evalúa en $t = 3$, esto nos dará el voltaje con el que llegó cargado el capacitor a este intervalo $3 \leq t < 7$.

$$v_c(3) = -V \cdot e^{-\frac{3}{R_1 C}} + V$$

Entonces, el voltaje entre $3 \leq t < 7$ corresponde a:

$$v_c(t) = -V \cdot e^{-\frac{3}{R_1 C}} + V$$

Para $7 \leq t$:

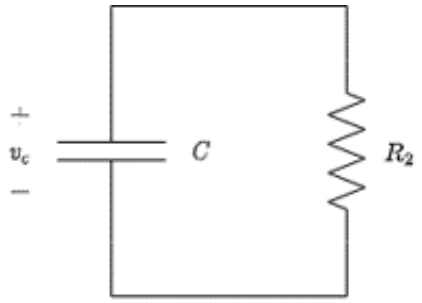


Figura 6: Circuito en $7 \leq t$

Este circuito ya corresponde a un Thevenin con voltaje de thevenin 0V, por lo que se encuentran a simple vista los parámetros:

$$V(\infty) = V_{th} = 0\ V$$

$$R_{eq} = R_{th} = R_2\ \Omega$$

Como el instante inicial del intervalo corresponde a $t = 7$, entonces $t_o = 7$ y $V_0 = v_c(7^-) = v_c(7^+)$, valor que se obtiene por medio del voltaje obtenido en el intervalo anterior $3 \leq t < 7$ evaluado en $t = 7$.

$$v_c(t) = -V \cdot e^{-\frac{3}{R_1 C}} + V$$

$$v_c(7) = -V \cdot e^{-\frac{3}{R_1 C}} + V$$

(El voltaje en el intervalo anterior era constante, por lo que no depende de t).

Entonces:

$$V_0 = v_c(7^-) = v_c(7^+) = -V \cdot e^{-\frac{3}{R_1 C}} + V$$

Teniendo ya todos los parámetros se procede a reemplazar en la ecuación general y se obtiene que para $7 \leq t$:

$$v_c(t) = ((-V \cdot e^{-\frac{3}{R_1 C}} + V) - 0) \cdot e^{-\frac{(t-7)}{R_2 C}} + 0$$

$$v_c(t) = (-V \cdot e^{-\frac{3}{R_1 C}} + V) \cdot e^{-\frac{(t-7)}{R_2 C}}$$

Por lo que finalmente:

$$\begin{aligned}
&\text{En } 0 \leq t < 3: && v_c(t) = -V \cdot e^{-\frac{t}{R_1 C}} + V \\
&\text{En } 3 \leq t < 7: && v_c(t) = -V \cdot e^{-\frac{3}{R_1 C}} + V \\
&\text{En } t \geq 7: && v_c(t) = \left(-V \cdot e^{-\frac{3}{R_1 C}} + V\right) \cdot e^{-\frac{(t-7)}{R_2 C}}
\end{aligned}$$

Problema 3

En la Figura 7 se tienen dos interrutores, $S1$ y $S2$. Ambos llevaban mucho tiempo abiertos, hasta que en t=0 $S1$ se cierra, quedando $S2$ todavía abierto. Luego, en t=3, $S2$ se cierra, con lo que ambos interruptores se encuentran cerrados. Encuentre la corriente del inductor para todo tiempo $t > 0$ y exprésela como una función por tramos.

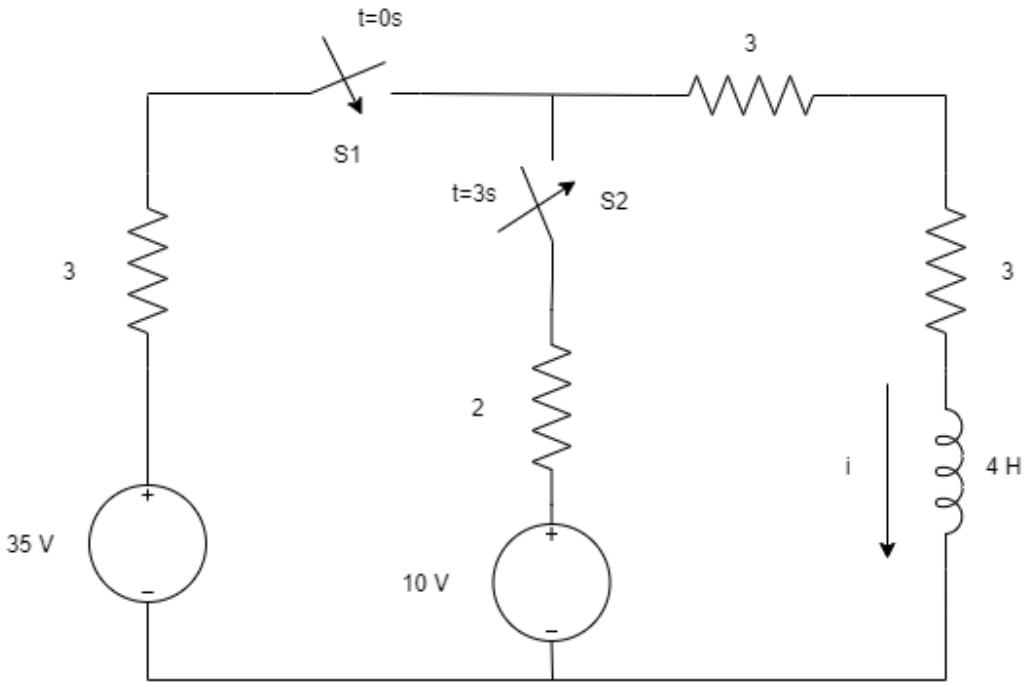


Figura 7: Circuito de primer orden con inductor

Se pide encontrar la corriente del inductor y se ve que existen dos instantes de cambio en el circuito, primero en $t = 0$ y luego en $t = 3$, lo que se traduce en dos intervalos, $0 < t < 3$ y $t > 3$, por lo que se tendrán dos expresiones de la corriente del inductor, una para cada intervalo de tiempo, dadas por la fórmula general $i_L(t) = (I_0 - I(\infty)) \cdot e^{-\frac{(t-t_O)}{L/Req}} + I(\infty)$.

Primer intervalo: $0 < t < 3$

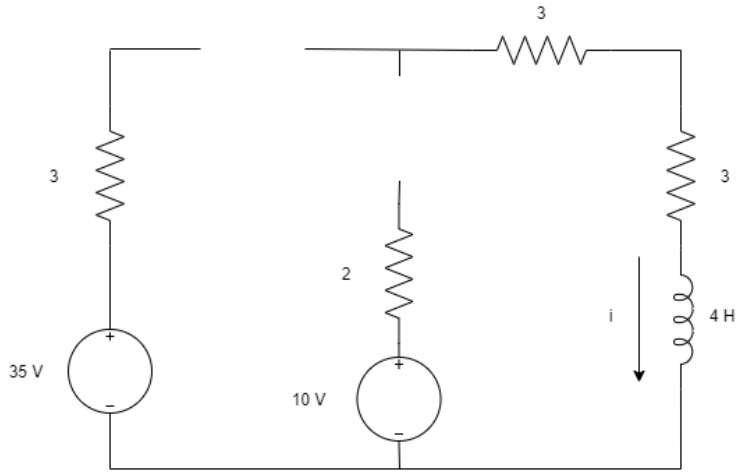
El instante inicial del intervalo corresponde a $t = 0$, por lo que $t_o = 0$ y $I_0 = I(0)$, luego la ecuación general queda de la forma:

$$i_L(t) = (I(0) - I(\infty)) \cdot e^{-\frac{(t-0)}{L/Req}} + I(\infty)$$

Ahora se deben encontrar los parámetros de la ecuación, partiendo por $I(0)$, que es la corriente del inductor en $t = 0$, para la cual se considerará el circuito antes de que el switch cambiara, es decir, en $t < 0$:

$t < 0$:

En este intervalo ambos switch están abiertos, por lo que el circuito equivalente es de la forma:



Se ve que el inductor lleva mucho tiempo sin estarse cargando, por lo que su corriente inicial es nula, de esa forma:

$$I_L(0^-) = 0$$

Debido a que el inductor se opone a cambios bruscos de corriente se cumple la siguiente igualdad:

$$I_L(0^+) = I_L(0^-) = 0$$

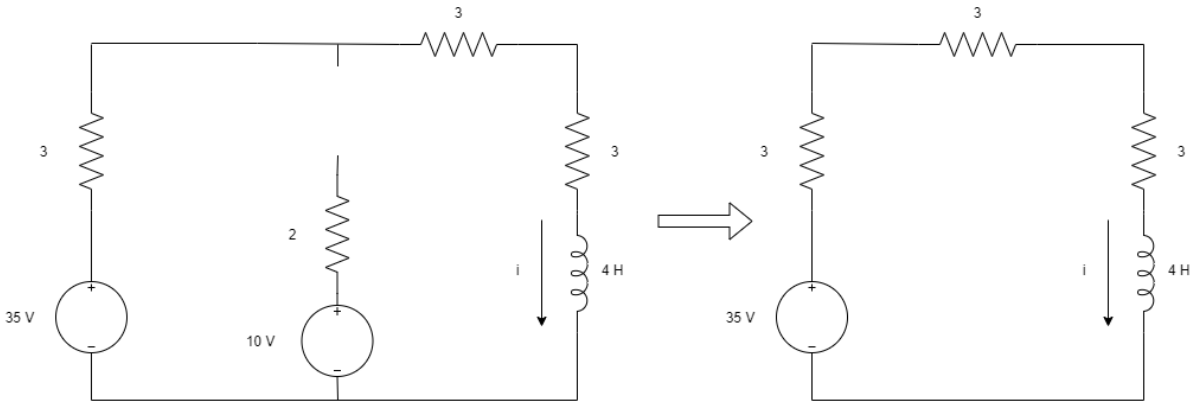
Luego, se quería encontrar $I(0)$, que es equivalente a $I_L(0^+)$, por lo tanto:

$$I(0) = I_L(0^+) = I_L(0^-) = 0\ [A]$$

Por lo que se encontró la condición inicial.

Ahora se necesita encontrar R_{eq} y $I(\infty)$, los cuales al corresponder a los parámetros del circuito en $0 < t < 3$ se deben encontrar en el circuito equivalente de $0 < t < 3$.

$0 < t < 3$:
En ese intervalo el switch 1 esta cerrado y el 2 abierto, por lo que el circuito queda de la forma:

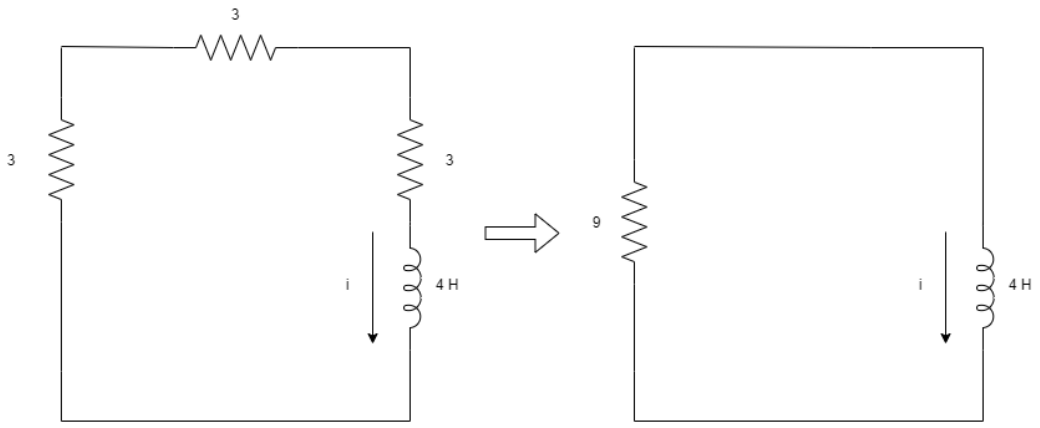


Luego, como la solución general corresponde a la solución de un circuito RL (Norton), se debe encontrar el equivalente de Norton de nuestro circuito visto por el inductor en este instante:

$\underline{R_{norton}}$:

Se deben apagar las fuentes independientes (de voltaje CC y de corriente CA), y luego, en caso de que se pueda ver a simple vista, ver la resistencia total que queda en serie a mi componente en que estoy calculando (en este caso el inductor), o si no se puede colocar una fuente de prueba de voltaje V y corriente I en el lugar del inductor y encontrar la resistencia por medio de la ley de Ohm, $R_{norton} = V/I$. *La resistencia de Norton es igual a la de Thevenin.*

En este caso se apaga la fuente de voltaje de 35V dejandola como un cortocircuito y luego se suman las resistencias que se encuentran en serie, obteniendo:



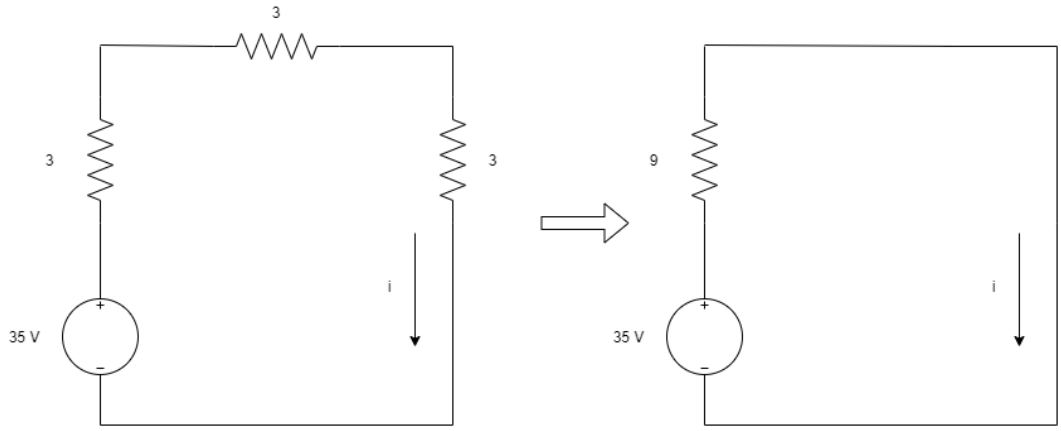
En este caso se ve a simple vista que la resistencia total que queda en serie con nuestro inductor es de 9Ω, por lo tanto:

$$R_{norton} = 9\Omega$$

$\underline{I_{norton}}$:

La corriente de Norton corresponde a la corriente de cortocircuito, es decir, se debe cortocircuitar nuestro componente y encontrar la corriente que pasa por ahí.

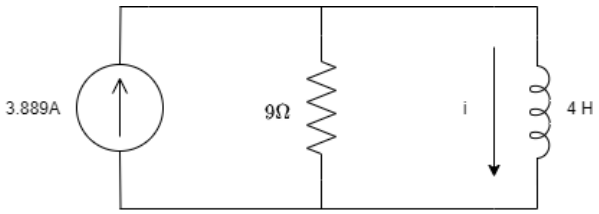
Cortocircuitando nuestro inductor y sumando las resistencias en serie para un cálculo más fácil se obtiene:



Donde se puede obtener la corriente fácilmente por la ley de Ohm, ya que solo se tiene una fuente de voltaje y una resistencia en serie, de esa forma:

$$I_{norton} = \frac{V}{R} = \frac{35}{9} = 3{,}889\ [A]$$

Habiendo obtenido R_{norton} y I_{norton} el equivalente de Norton es de la forma:



Luego, se sabe que:

$$R_{eq} = R_{norton}$$
$$I(\infty) = I_{norton}$$

De esta forma:

$$R_{eq} = R_{norton} = 9\Omega$$
$$I(\infty) = I_{norton} = 3{,}889\ [A]$$

Por lo que ya se encontraron todos los parámetros de la ecuación general.

Reemplazando:

$$i_L(t) = (I(0) - I(\infty)) \cdot e^{-\frac{(t-0)}{L/R_{eq}}} + I(\infty)$$
$$i_L(t) = (0 - 3{,}889) \cdot e^{-\frac{(t-0)}{4/9}} + 3{,}889$$
$$i_L(t) = -3{,}889 \cdot e^{-\frac{9t}{4}} + 3{,}889 \qquad 0 < t < 3$$

Por lo que ya se encontró la corriente en el primer intervalo, luego se debe obtener la corriente para el otro.

Segundo intervalo: $t > 3$

El instante inicial del intervalo corresponde a $t = 3$, por lo que $t_o = 3$ y $I_0 = I(3)$, luego la ecuación general queda de la forma:

$$i_L(t) = (I(3) - I(\infty)) \cdot e^{-\frac{(t-3)}{L/R_{eq}}} + I(\infty)$$

Ahora se deben encontrar los parámetros de la ecuación, partiendo por $I(3)$, que es la corriente del inductor en $t = 3$, para la cual se considerará la corriente del inductor antes de que el switch cambiara, es decir, en el intervalo $0 < t < 3$, donde se obtuvo que la corriente era:

$$i_L(t) = -3{,}889 \cdot e^{-\frac{9t}{4}} + 3{,}889 \qquad 0 < t < 3$$

Evaluando en $t = 3$:

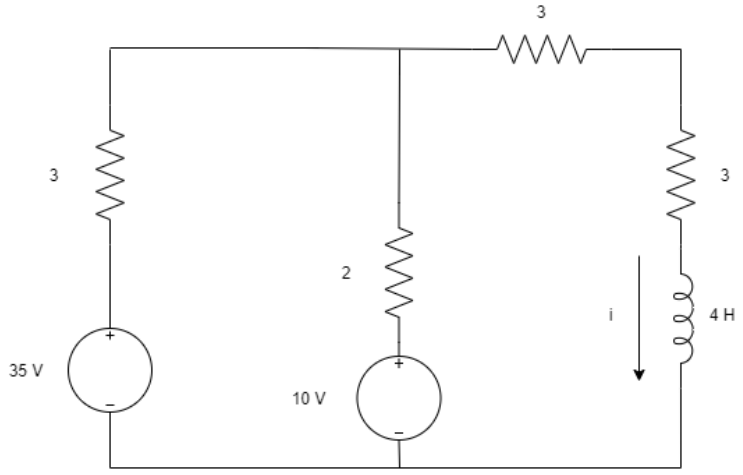
$$i_L(3^-) = -3{,}889 \cdot e^{-\frac{9 \cdot 3}{4}} + 3{,}889$$
$$i_L(3^-) = 3{,}884\ [A]$$

Como el inductor se opone a cambios bruscos de corriente $I(3) = i_L(3^+) = i_L(3^-)$. Por lo tanto,

$$I(3) = 3{,}884\ [A]$$

Por lo que se encontró la condición inicial de este intervalo. Ahora se necesita encontrar R_{eq} y $I(\infty)$, los cuales al corresponder a los parámetros del circuito en $t > 3$ se deben encontrar en el circuito equivalente de $t > 3$.

$t > 3$:
En ese intervalo ambos switch estan cerrados, por lo que el circuito queda de la forma:

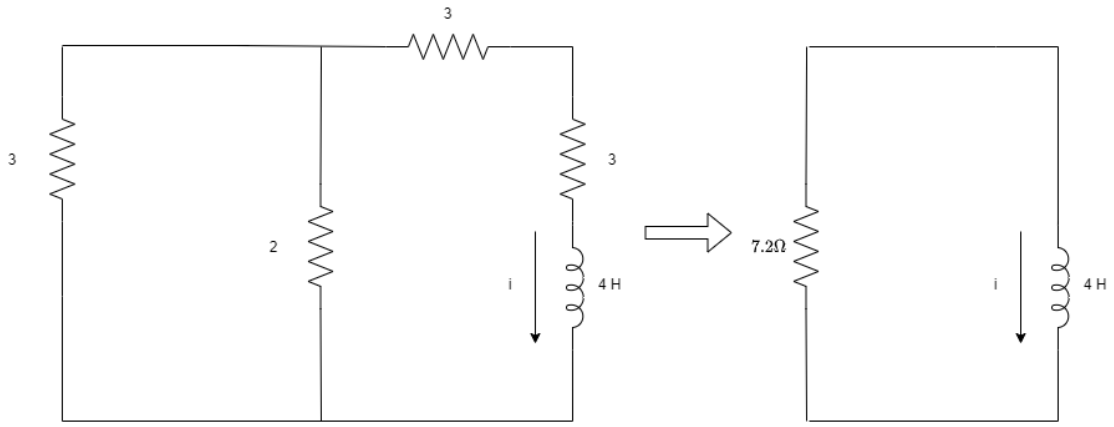


Luego, como la solución general corresponde a la solución de un circuito RL (Norton), se debe encontrar el equivalente de Norton de nuestro circuito visto por el inductor en este

instante:

$\underline{R_{norton}}$:
Se hace de la misma forma que se explicó en el intervalo anterior, se apagan las fuentes independientes y luego, si se puede, se ve la resistencia total que queda en serie al componente.

En este caso las dos fuentes de voltaje se dejan como cortocircuito y luego se reducen las resistencias, primero sacando el paralelo entre la resistencia de la izquierda de 3Ω y la resistencia de 2Ω, obteniendo $\frac{3\cdot 2}{3+2} = 1{,}2\Omega$, y luego sumandio esta en serie con las otras dos resistencias de 3Ω, obteniendo una final de valor $1{,}2 + 3 + 3 = 7{,}2\Omega$.

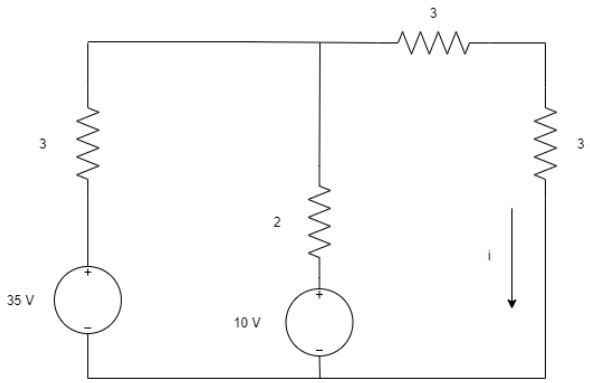


Aquí se puede ver a simple vista que la resistencia de Norton corresponde a la resistencia total de $7{,}2\Omega$, es decir:

$$R_{norton} = 7{,}2\Omega$$

$\underline{I_{norton}}$:
La corriente de Norton, como se dijo anteriormente, corresponde a la corriente de cortocircuito, es decir, se debe cortocircuitar nuestro componente y encontrar la corriente que pasa por ahí.

Cortocircuitando nuestro inductor se obtiene:



Para encontrar la corriente se puede hacer método de mallas o por medio de superposición. *También se podría encontrar el voltaje de Thevenin, en vez de la corriente de Norton, y luego obtener la corriente de Norton por medio de:* $I_{norton} = V_{thevenin}/R_{eq}$.

Método de mallas:

$$35 - 3 \cdot i_1 - 2 \cdot (i_1 - i_2) - 10 = 0 \tag{1}$$

$$10 - 2 \cdot (i_2 - i_1) - 3 \cdot i_2 - 3 \cdot i_2 = 0 \tag{2}$$

Resolviendo el sistema de ecuación se llega a:

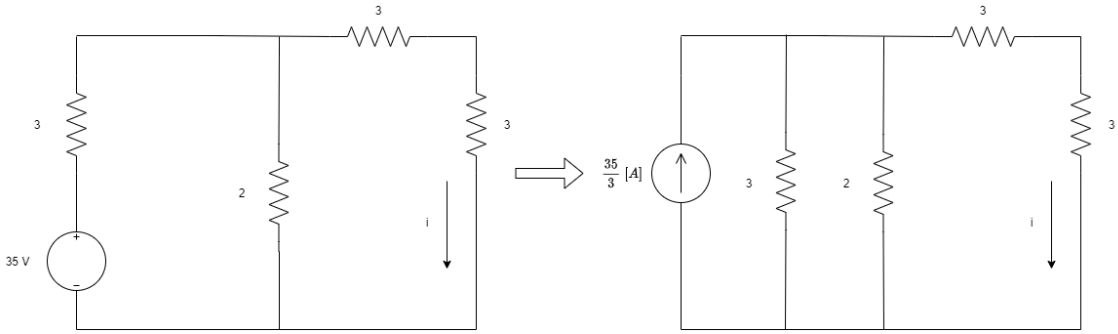
$$i_1 = 6{,}11\ [A]$$

$$i_2 = 2{,}77\ [A]$$

Donde i_2 corresponde a la corriente de Norton, ya que es la corriente que pasa por donde se encontraba antes el inductor.

Superposición:

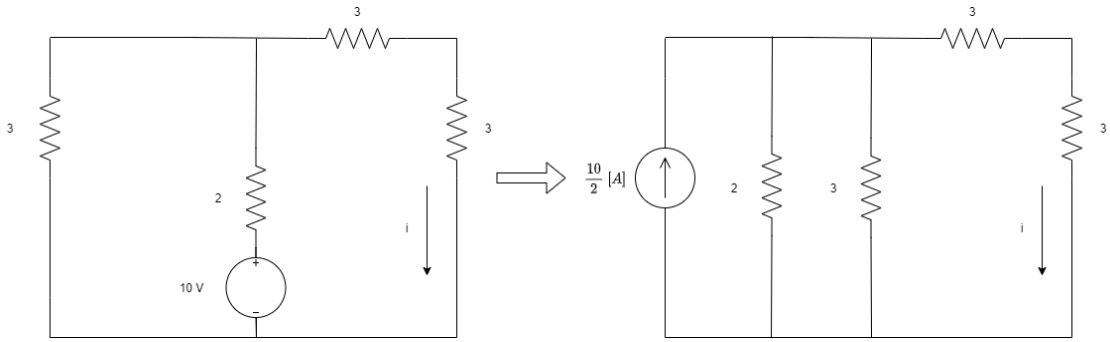
Fuente 35V encendida:
Se apaga la fuente de 10V con un cortocircuito, luego la fuente de voltaje de 35V se pasa a una de corriente (Thevenin->Norton), diviendo el voltaje en la resistencia de 3Ω que tiene en serie (recordar además que cuando esto se hace la resistencia en serie a la fuente de voltaje pasa a estar en paralelo a la de corriente), obteniendo:



Luego, por divisor de corriente se llega a que la corriente I que entrega la fuente de 35V es:

$$I_{35V} = \frac{35}{3} \cdot \frac{3//2}{(3//2) + 3 + 3} = 1{,}944\ [A]$$

Fuente de 10V encendida:
Se apaga la fuente de 35V con un cortocircuito, luego la fuente de voltaje de 10V se pasa a una de corriente (Thevenin->Norton), diviendo el voltaje en la resistencia de 2Ω que tiene en serie (recordar además que cuando esto se hace la resistencia en serie a la fuente de voltaje pasa a estar en paralelo a la de corriente), obteniendo:

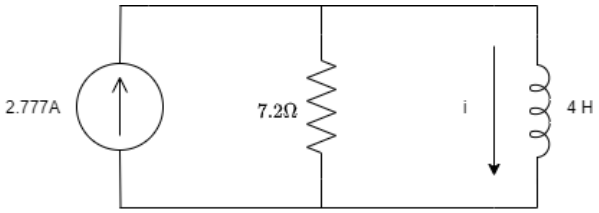


Luego, por divisor de corriente se llega a que la corriente I que entrega la fuente de 10V es:

$$I_{10V} = \frac{10}{2} \cdot \frac{2//3}{(2//3)+3+3} = 0{,}833\ [A]$$

Luego, por superposición, se tiene que la corriente de Norton total es: $I_{norton} = I_{35V} + I_{10V} = 1{,}944 + 0{,}833 = 2{,}777\ [A]$ Se puede ver que este fue el mismo valor al que se llegó por método de mallas.

Habiendo obtenido R_{norton} y I_{norton}, el equivalente de Norton es de la forma:



Luego, se sabe que:

$$R_{eq} = R_{norton}$$
$$I(\infty) = I_{norton}$$

De esta forma:

$$R_{eq} = R_{norton} = 7{,}2\Omega$$
$$I(\infty) = I_{norton} = 2{,}777\ [A]$$

Por lo que ya se encontraron todos los parámetros de la ecuación general.

Reemplazando:

$$i_L(t) = (I(3) - I(\infty)) \cdot e^{-\frac{(t-3)}{L/R_{eq}}} + I(\infty)$$
$$i_L(t) = (3{,}884 - 2{,}777) \cdot e^{-\frac{(t-3)}{4/7{,}2}} + 2{,}777$$
$$i_L(t) = 1{,}107 \cdot e^{-1{,}8(t-3)} + 2{,}777 \qquad t > 3$$

Finalmente, se tiene que la corriente del inductor corresponde a:

$$I_L(t) = \begin{cases} -3{,}889 \cdot e^{-\frac{9t}{4}} + 3{,}889 \in [0, 3) \\ 1{,}107 \cdot e^{-1{,}8(t-3)} + 2{,}777 \in [3, \infty) \end{cases}$$