

Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Eléctrica

Superposición y Circuitos Equivalentes

Profesor Álvaro Lorca

IEE2123 – Circuitos Eléctricos
Segundo Semestre 2018

Agradecimientos material: Ángel Abusleme, Enrique Álvarez, Daniel Olivares

Introducción

- Ya hemos visto algunas de las leyes básicas que rigen el comportamiento de un circuito, y ahora profundizaremos en el estudio de circuitos entendidos como sistemas lineales.

- Estudiaremos el teorema de superposición, así como también algunas de sus consecuencias directas: los equivalentes de Helmholtz-Thévenin y Mayer-Norton.

- Todas estas herramientas permiten analizar circuitos de manera más eficaz, evitando el uso de métodos sistemáticos como nodos o mallas.

- Además, también estudiaremos el teorema de máxima transferencia de potencia.

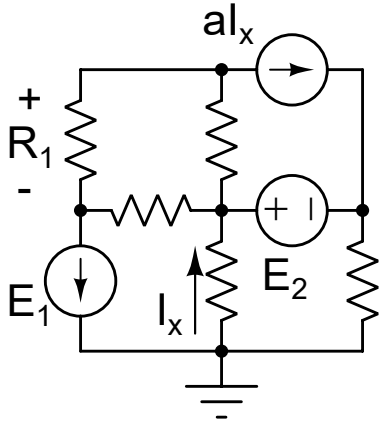
- Lectura adicional para los interesados: Origins of the Equivalent Circuit Concept, D.H. Johnson, 2001.

Teorema de superposición

- Recordemos lo que ya sabíamos sobre circuitos lineales: considere un circuito lineal con excitaciones E_1 y E_2, en el cual nos interesa medir una respuesta R_1. Como el circuito es lineal:

$$R_1 = c_1 E_1 + c_2 E_2$$

Constantes!



- Se cumplen las condiciones de linealidad (aditividad y homogeneidad):

$$R_1(\vec{x} + \vec{y}) = c_1 x_1 + c_1 y_1 + c_2 x_2 + c_2 y_2 = R_1(\vec{x}) + R_1(\vec{y})$$

$$R_1(\alpha \vec{x}) = c_1 \alpha x_1 + c_2 \alpha x_2 = \alpha R_1(\vec{x})$$

Teorema de superposición

- Supongamos que queremos calcular cuánto afecta E_1 a la respuesta R_1 (i.e. R_1/E_1). Para esto sólo consideramos la excitación E_1 y apagamos E_2 (i.e. $E_2 = 0$), así:

$$R_1 = c_1 E_1 + c_2 \cdot 0 = c_1 E_1$$

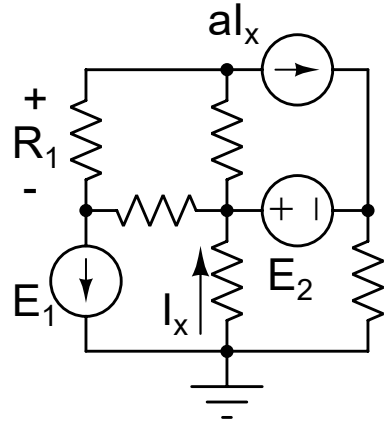
$$\rightarrow \frac{R_1}{E_1} = c_1$$

- Recordemos que apagar una excitación implica:
  - Fuente de voltaje: reemplazar la fuente por un cortocircuito (V=0).
  - Fuente de corriente: reemplazar la fuente por un circuito abierto (I=0).

Teorema de superposición

- Por lo tanto, de acuerdo al *teorema de superposición* (1853), el efecto en una señal de un circuito lineal producto de varias excitaciones distintas puede ser calculado como la superposición lineal de los efectos de cada una de las excitaciones manteniendo el resto de las excitaciones apagadas.

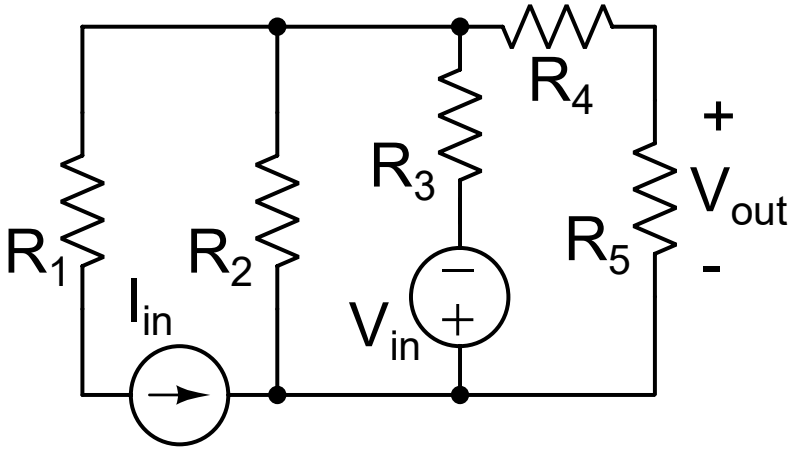
$$R_1 = \underbrace{\left.\frac{R_1}{E_1}\right|_{E_2=0}}_{c_1} E_1 + \underbrace{\left.\frac{R_1}{E_2}\right|_{E_1=0}}_{c_2} E_2$$



  - El teorema de superposición es simplemente una consecuencia directa de la linealidad del sistema.

Teorema de superposición

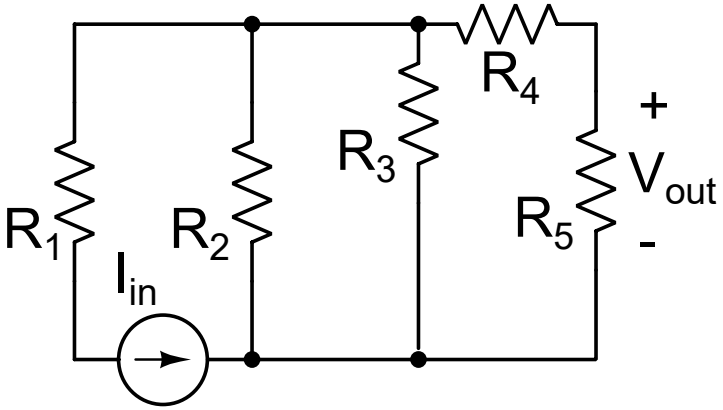
- **Ejemplo**: Calcular V_{out}.



- Primero calculamos V_{out}/I_{in} con $V_{in} = 0$, luego calculamos V_{out}/V_{in} con $I_{in} = 0$, y finalmente:

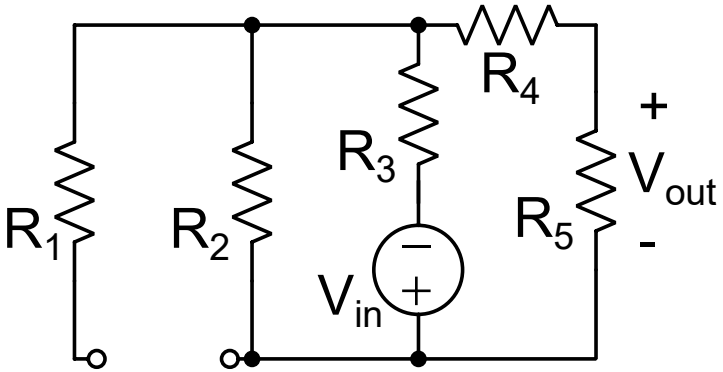
$$V_{out} = \left.\frac{V_{out}}{I_{in}}\right|_{V_{in}=0} I_{in} + \left.\frac{V_{out}}{V_{in}}\right|_{I_{in}=0} V_{in}$$

Teorema de superposición



$$V_{in} = 0$$

$$V_{out} = -R_5 \frac{R_2||R_3}{R_2||R_3+R_4+R_5} I_{in}$$



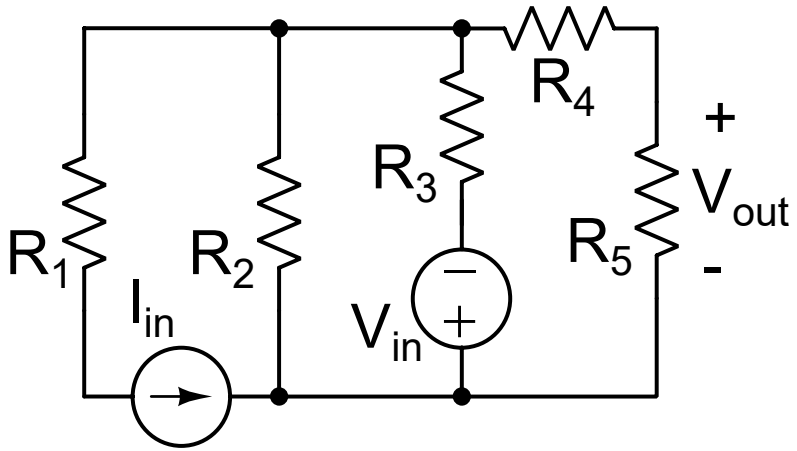
$$I_{in} = 0$$

$$V_{out} = -\frac{R_5}{R_4+R_5} \frac{R_2||(R_4+R_5)}{R_3+R_2||(R_4+R_5)} V_{in}$$

$$\rightarrow V_{out} = -R_5 \frac{R_2||R_3}{R_2||R_3+R_4+R_5} I_{in} - \frac{R_5}{R_4+R_5} \frac{R_2||(R_4+R_5)}{R_3+R_2||(R_4+R_5)} V_{in}$$

Teorema de superposición

- Ojo, el teorema de superposición no es aplicable para el cálculo de potencias:



$$V_{out} = c_1 I_{in} + c_2 V_{in}$$

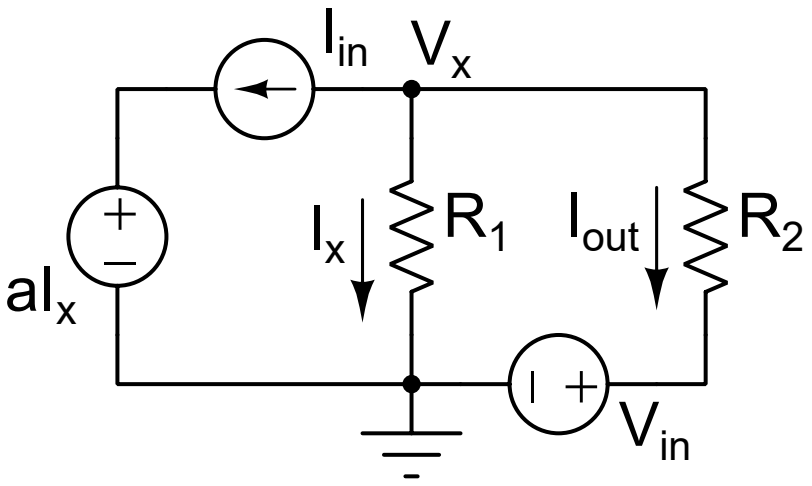
$$P_{out} = \frac{V_{out}^2}{R_5} = \frac{c_1^2 I_{in}^2}{R_5} + \frac{2 c_1 c_2 I_{in} V_{in}}{R_5} + \frac{c_2^2 V_{in}^2}{R_5} \neq \frac{c_1^2 I_{in}^2}{R_5} + \frac{c_2^2 V_{in}^2}{R_5}$$

Este factor aparece producto de la no linealidad de la potencia

Fin ej.

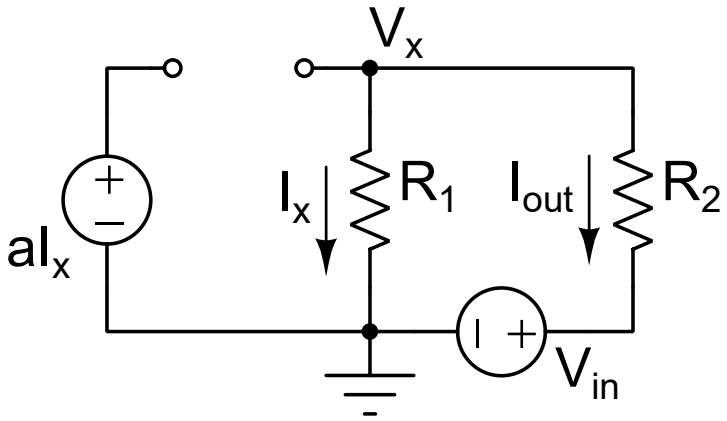
Teorema de superposición

- **Ejemplo**: Calcular I_{out}.



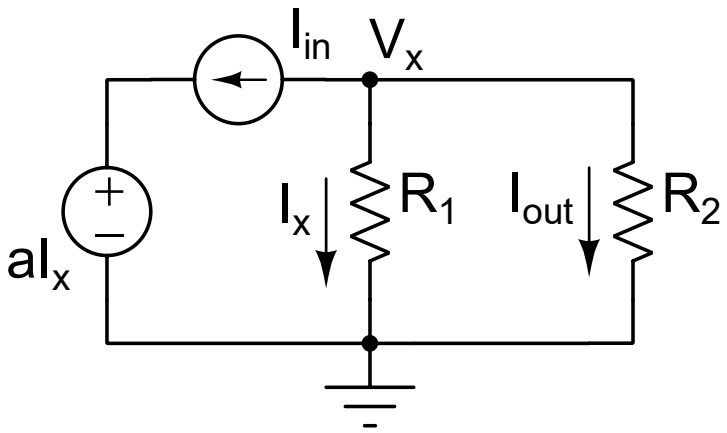
- **Generalmente** las fuentes *dependientes* no son excitaciones del circuito (**excepción**: cuando la fuente dependiente depende de una variable fuera del circuito). Por este motivo no se apagan al usar el teorema de superposición.

Teorema de superposición



$$I_{in} = 0$$

$$I_{out} = -\frac{1}{R_1+R_2} V_{in}$$



$$V_{in} = 0$$

$$I_{out} = -\frac{R_1}{R_1+R_2} I_{in}$$

$$\rightarrow I_{out} = -\frac{1}{R_1+R_2} V_{in} - \frac{R_1}{R_1+R_2} I_{in}$$

Fin ej.

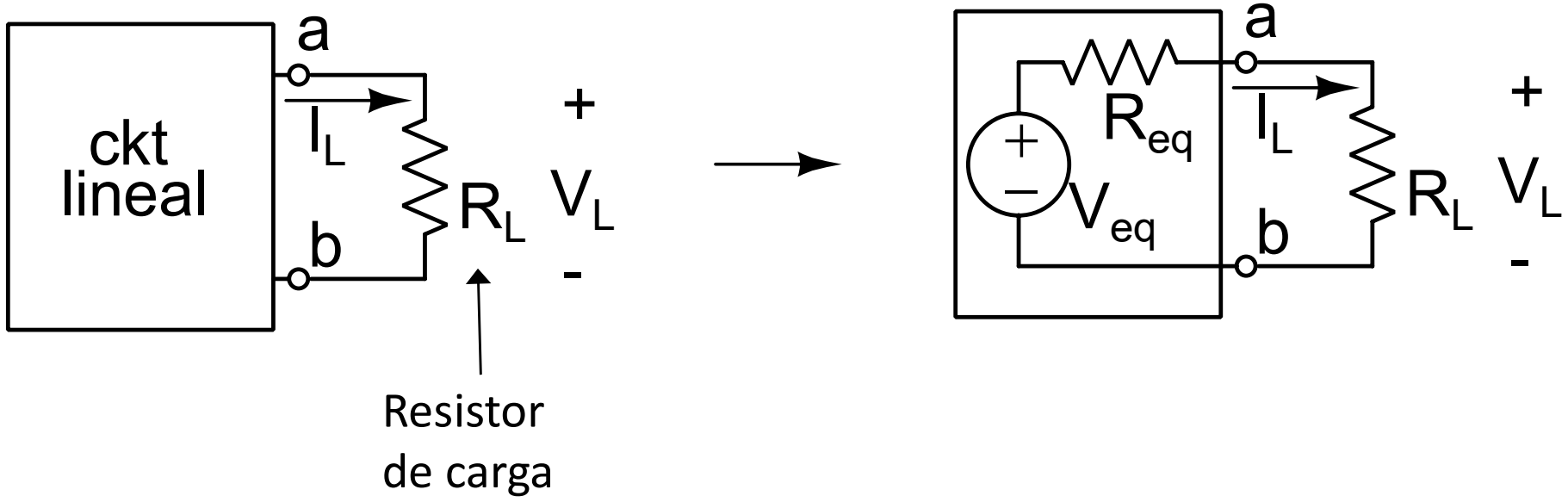
Equivalentes circuitales

- Cualquier circuito lineal, visto desde un puerto de dos terminales (o desde un terminal referido a tierra), es equivalente a:
  - Una fuente de voltaje con resistor en serie (equivalente H-T)
  - Una fuente de corriente con resistor en paralelo (equivalente M-N)

- Los equivalentes de H-T y M-N nos permiten:
  - Concentrar muchos elementos circuitales en sólo dos!!!
  - Analizar circuitos más complicados de forma más simple, mediante transformaciones
  - Modelar circuitos complicados mediante dos elementos circuitales

Equivalente de Helmholtz-Thévenin

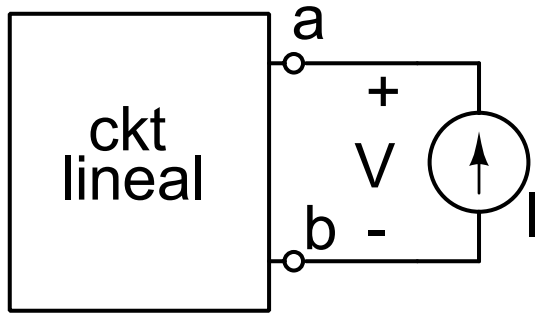
- *Equivalente de Helmholtz-Thévenin* (1853-1883): mirado desde un puerto (dos terminales), un circuito lineal puede ser sustituido por un circuito *equivalente* compuesto por una fuente de voltaje y un resistor en serie.



Equivalente de Helmholtz-Thévenin

- Demostración: supongamos que contamos con un circuito lineal genérico con N fuentes independientes (F_i) en su interior, al cual le conectamos una fuente de corriente I entre los terminales a y b. Por el teorema de superposición, el voltaje entre los terminales a y b está dado por:

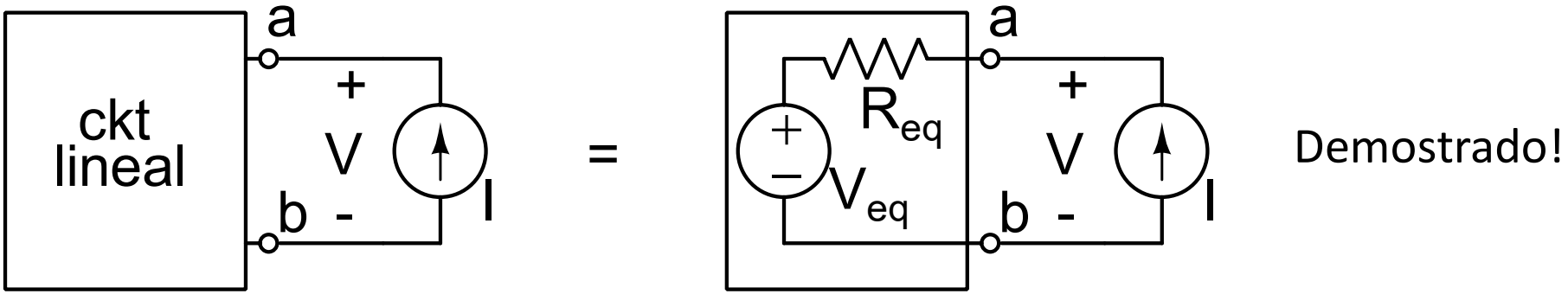
$$V = \sum_{i=1}^{N} \left.\frac{V}{F_i}\right|_{\substack{F_j = 0,\ \forall j \neq i \\ I = 0}} \cdot F_i + \left.\frac{V}{I}\right|_{F_i = 0,\ \forall i} \cdot I$$



Equivalente de Helmholtz-Thévenin

$$V = \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \left.\frac{V}{F_i}\right|_{\substack{F_j = 0,\ \forall j \neq i \\ I = 0}} \cdot F_i}_{\text{Voltaje equivalente } V_{eq}} + \underbrace{\left.\frac{V}{I}\right|_{F_i = 0,\ \forall i} \cdot I}_{\substack{\text{Esto se ve conocido!} \\ \text{Resistencia equivalente } R_{eq}}}$$

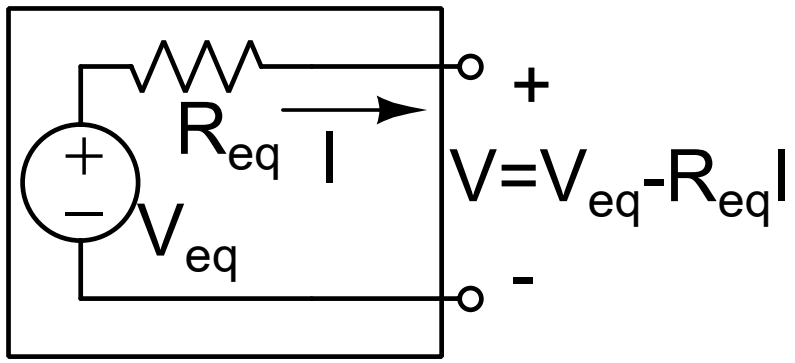
- El siguiente circuito, visto desde el par de terminales a y b, se comporta exactamente igual que el circuito lineal genérico antes considerado:

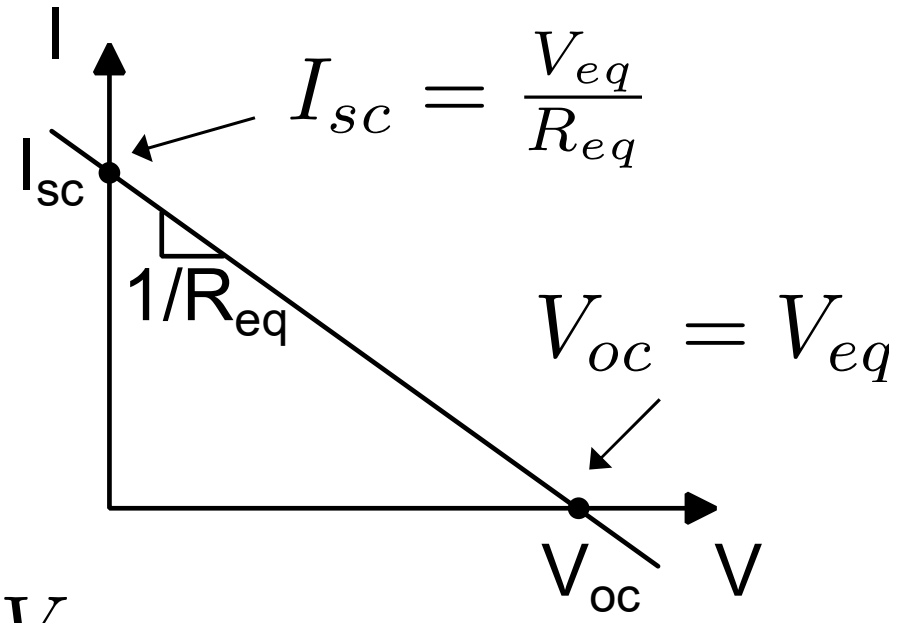


Demostrado!

Equivalente de Helmholtz-Thévenin

- Para determinar V_{eq} y R_{eq}:





$$I_{sc} = \frac{V_{eq}}{R_{eq}}$$

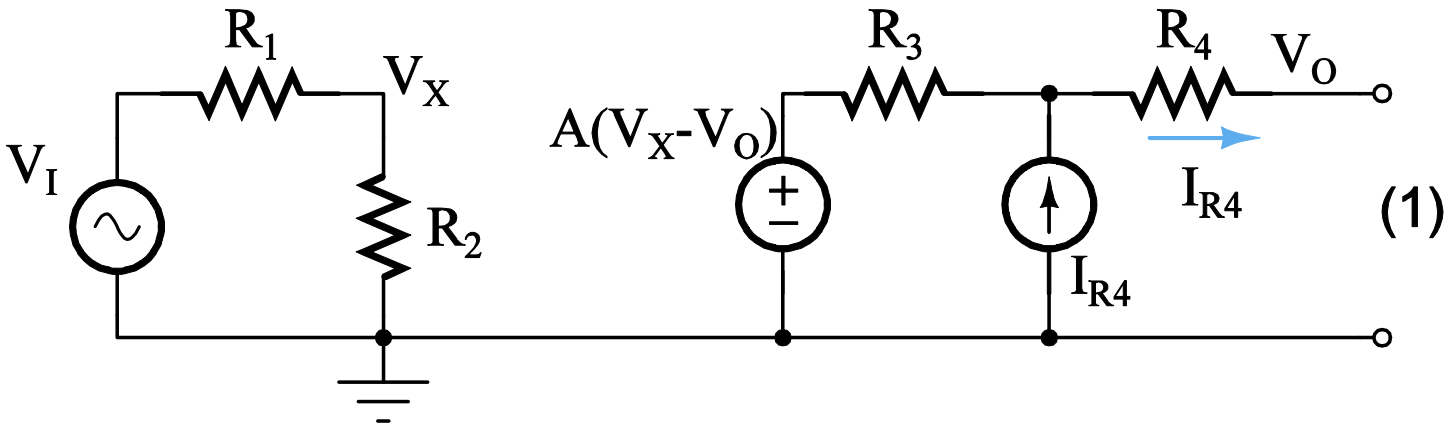
$$V_{oc} = V_{eq}$$

$$V_{eq} = V_{oc}$$

$$R_{eq} = \frac{V_{oc}}{I_{sc}}$$

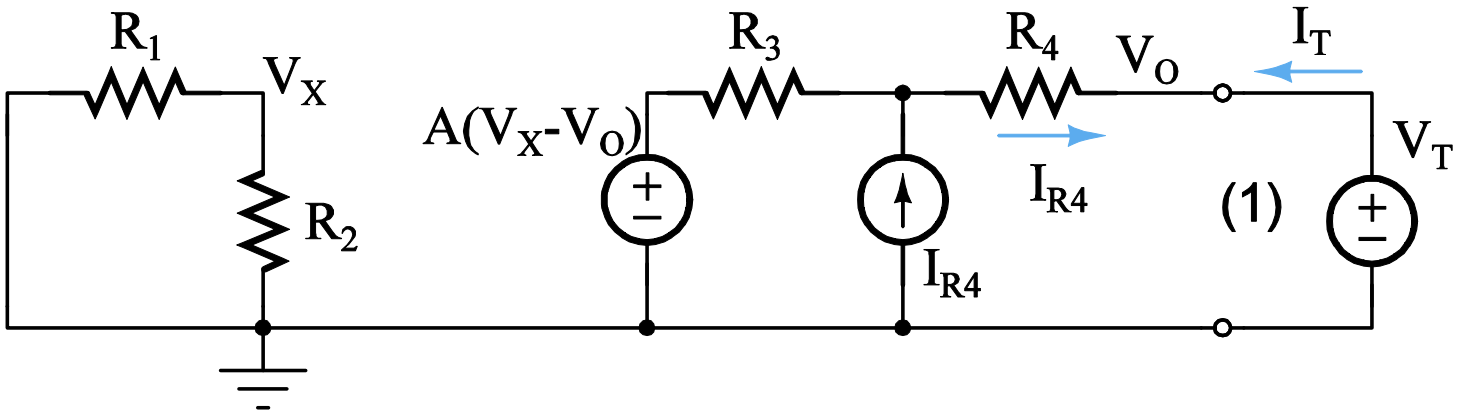
Equivalente de Helmholtz-Thévenin

- **Ejemplo**: calcular el equivalente de H-T del circuito visto desde el puerto (1).



Equivalente de Helmholtz-Thévenin

- Calculamos R_{eq} apagando las fuentes independientes y luego conectando una fuente de voltaje V_T en el puerto (1) para luego medir la corriente I_T en sus bornes:



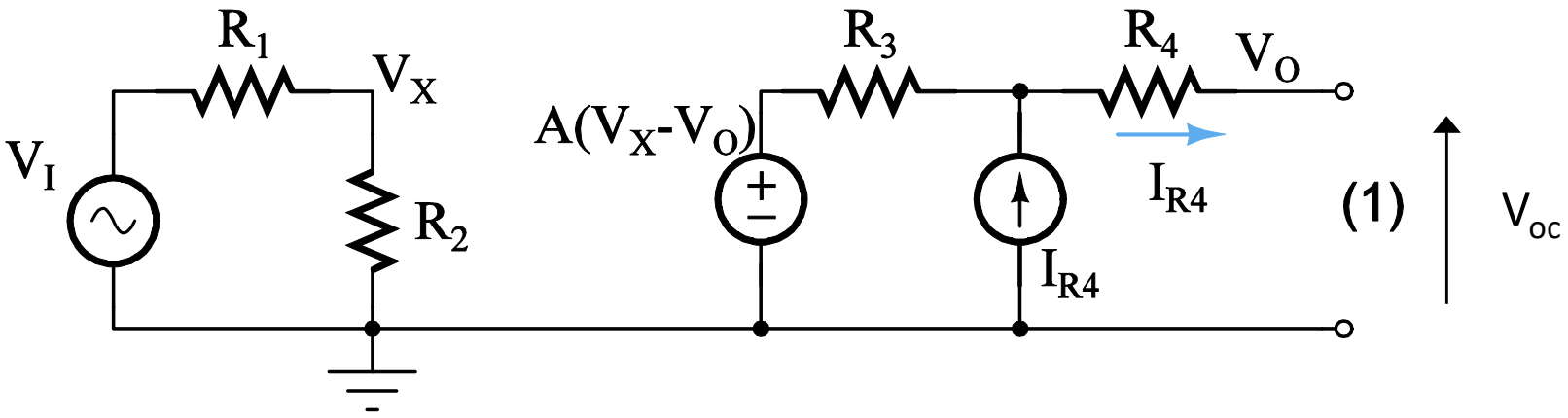
$$R_{eq} = \frac{V_T}{I_T}$$

$$V_I = 0 \rightarrow V_X = 0$$

$$I_T = \frac{V_T - -AV_T}{R_4} = V_T \frac{1+A}{R_4} \rightarrow R_{eq} = \frac{R_4}{1+A}$$

Equivalente de Helmholtz-Thévenin

- Calculamos $V_{oc} = V_{eq}$:

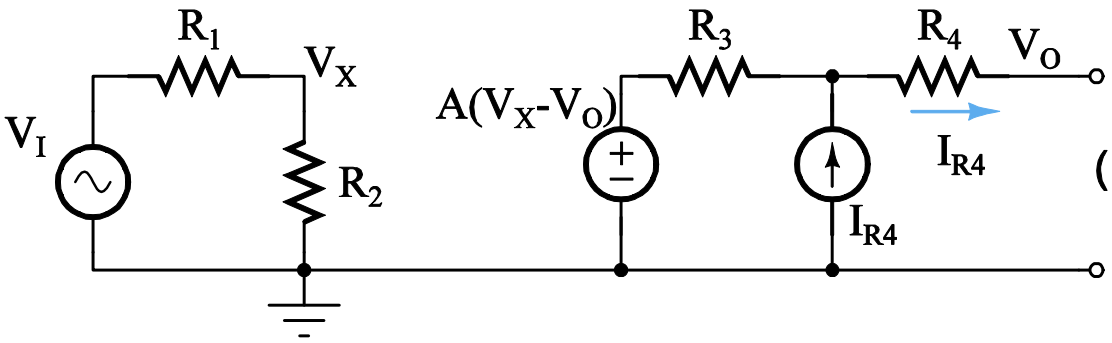


$$V_{OC} = A(V_X - V_{OC}) \qquad V_X = V_I \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

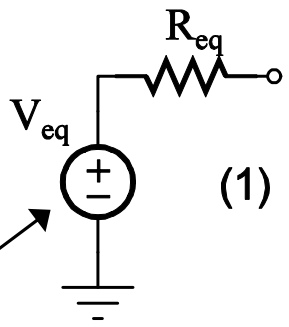
$$V_{OC} = \frac{A}{A+1} \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_I$$

Equivalente de Helmholtz-Thévenin

- Por lo tanto:



$$=$$



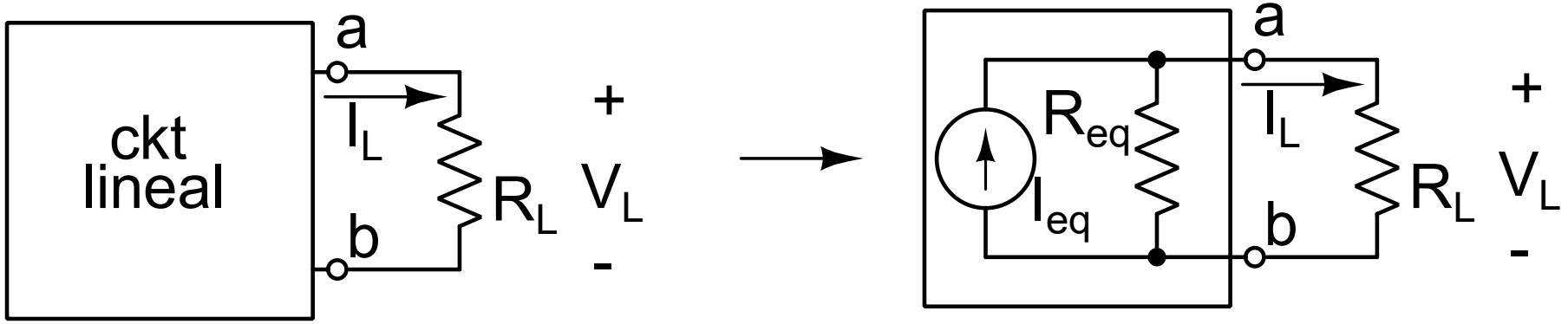
$$R_{eq} = \frac{R_4}{1+A}$$

$$V_{eq} = \frac{A}{A+1}\frac{R_2}{R_1+R_2}V_I$$

Fin ej.

Equivalente de Mayer-Norton

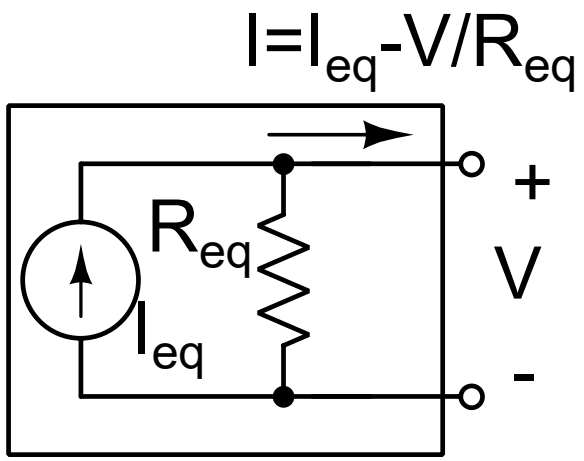
- *Equivalente de Mayer-Norton* (1926-1926): mirado desde un puerto, un circuito lineal puede ser sustituido por un circuito *equivalente* compuesto por una fuente de corriente con un resistor en paralelo.

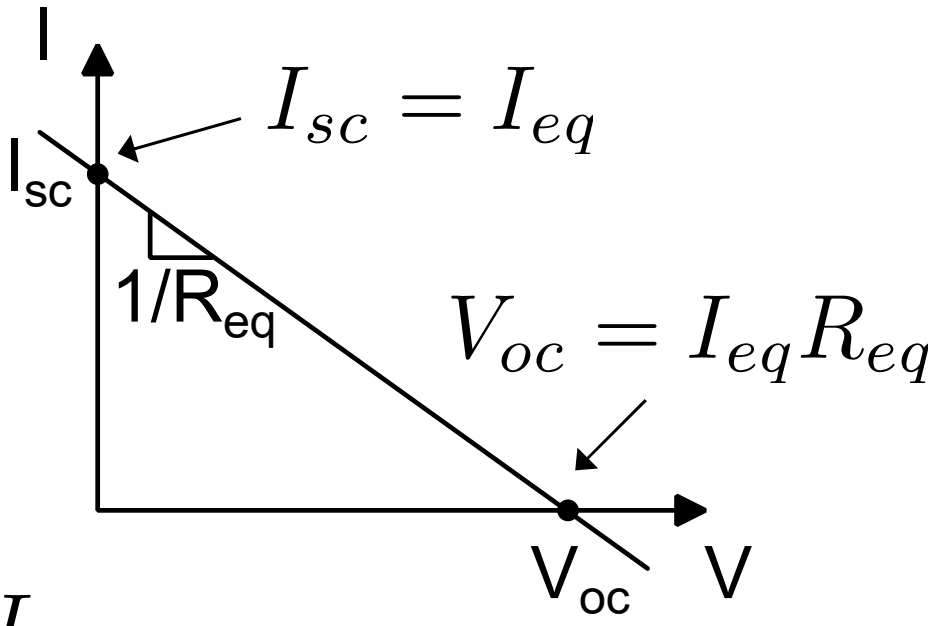


  - Es el equivalente dual al equivalente de H-T.
  - Su demostración sigue la misma línea de la demostración antes vista.

Equivalente de Mayer-Norton

- Para determinar I_{eq} y R_{eq}:



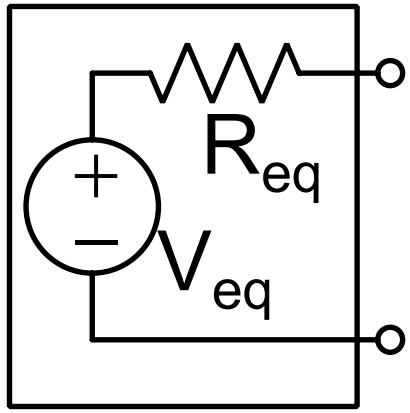


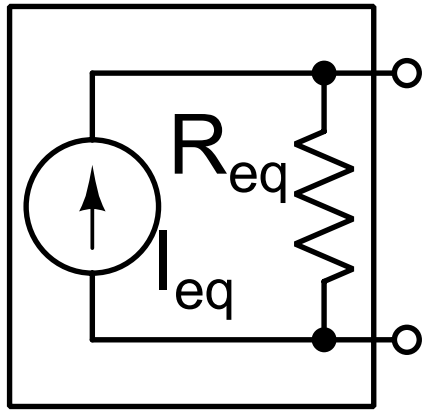
$$I_{eq} = I_{sc}$$

$$R_{eq} = \frac{V_{oc}}{I_{sc}}$$

Equivalente de Mayer-Norton

- Equivalencia entre los equivalentes de H-T y M-N:





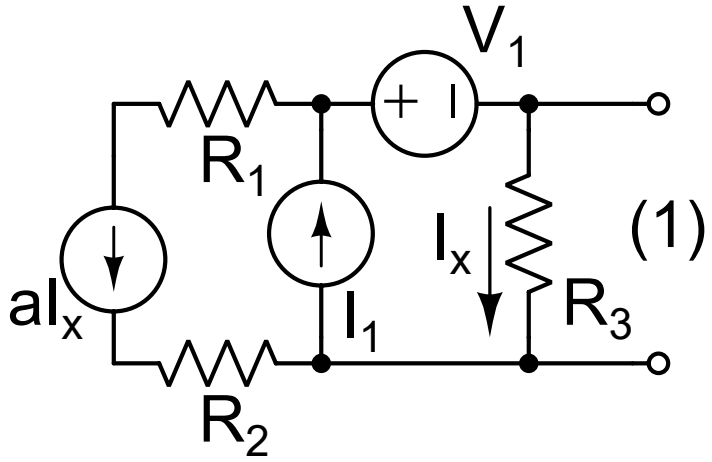
$$R_{eq} = \frac{V_{oc}}{I_{sc}}$$

$$I_{eq} = \frac{V_{eq}}{R_{eq}} = I_{sc}$$

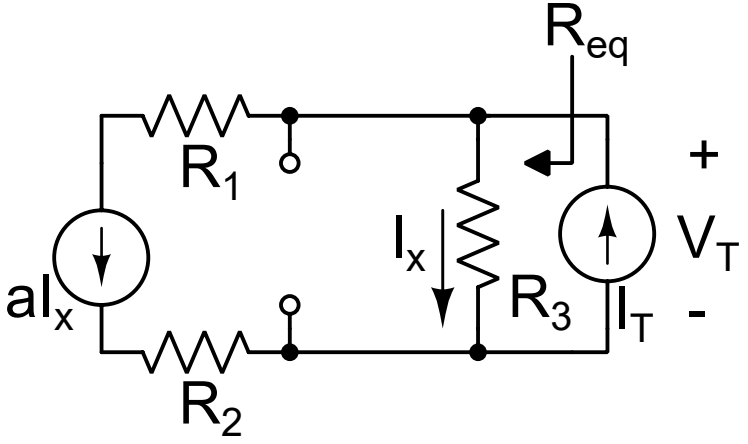
  - Esencialmente ambos equivalentes son lo mismo.

Equivalente de Mayer-Norton

- **Ejemplo**: calcular el equivalente de M-N del circuito visto desde el puerto (1).



- Calculamos R_{eq}:



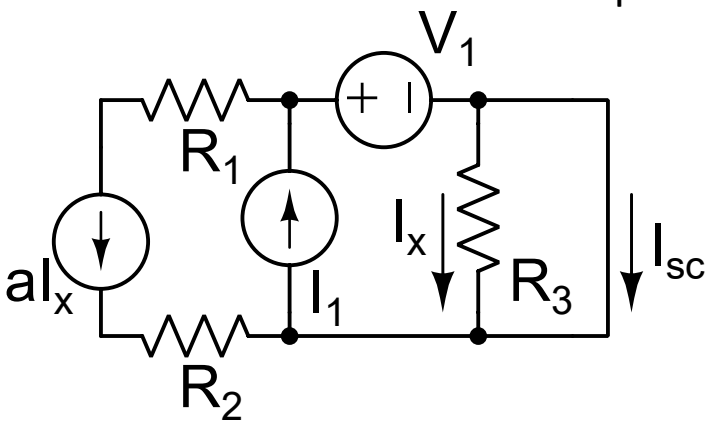
$$I_x = \frac{V_T}{R_3}$$

$$I_T = I_x + aI_x$$

$$\rightarrow R_{eq} = \frac{V_T}{I_T} = \frac{R_3}{1+a}$$

Equivalente de Mayer-Norton

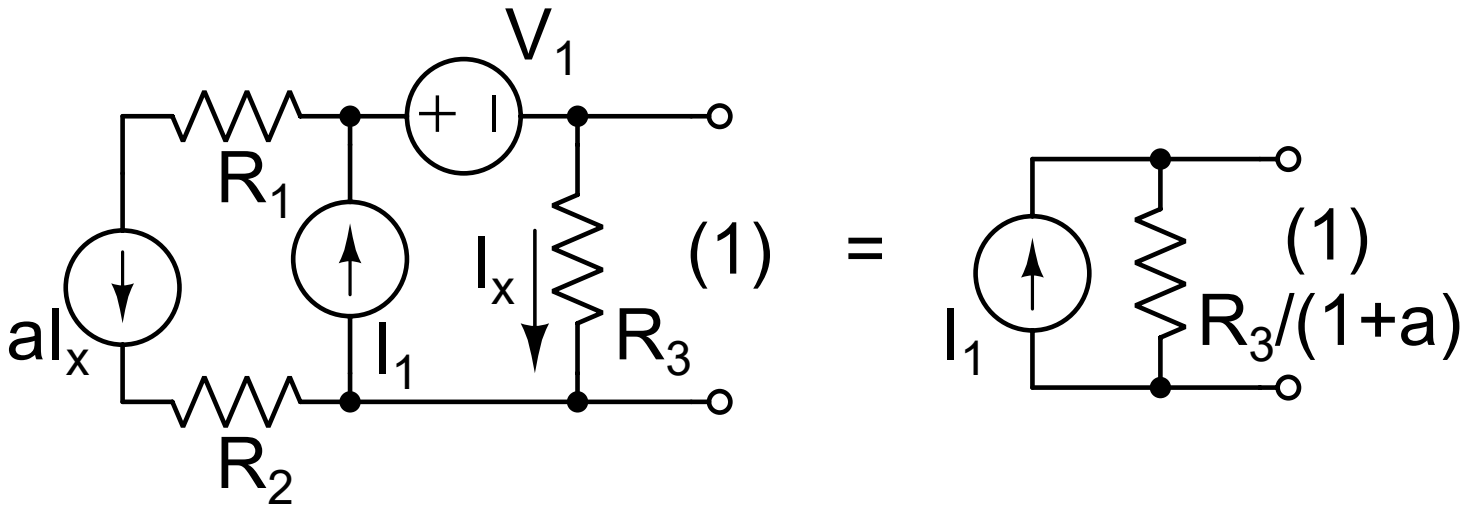
- Calculamos $I_{sc} = I_{eq}$ por inspección:



$$I_x = 0$$

$$I_{sc} = I_1$$

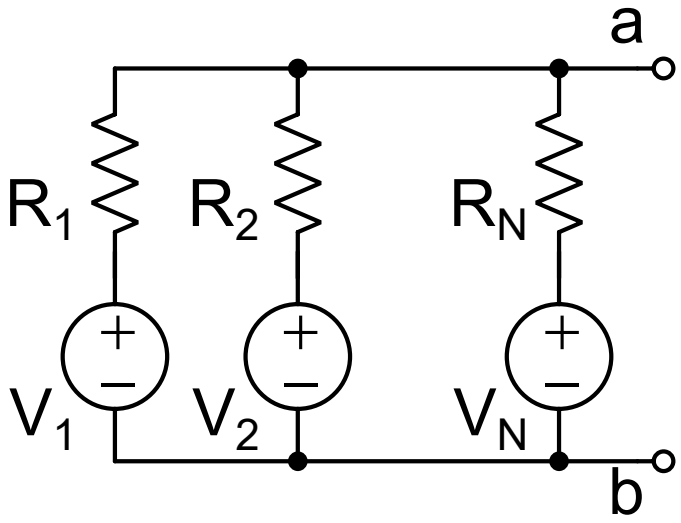
- Por lo tanto:



Fin ej.

Equivalente de Mayer-Norton

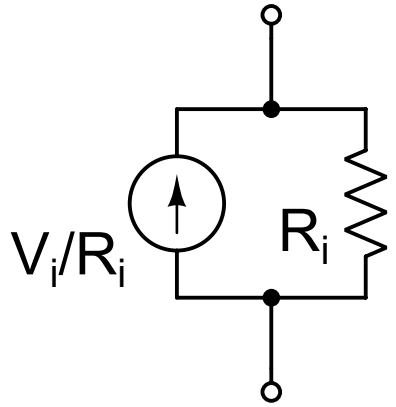
- **Ejemplo**: de acuerdo al teorema de Millman (1940), en un circuito de dos terminales que se encuentran conectados a través de ramas en paralelo (cada una compuesta por una fuente de tensión ideal en serie con un resistor), el voltaje entre los terminales es igual a la suma de los voltajes multiplicados por la conductancia de la rama dividido por la suma total de las conductancias. Demostrar este teorema.



$$V_{ab} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \frac{V_i}{R_1}}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{R_i}}$$

Equivalente de Mayer-Norton

- Cada una de las ramas del circuito tiene un equivalente de M-N como el siguiente:

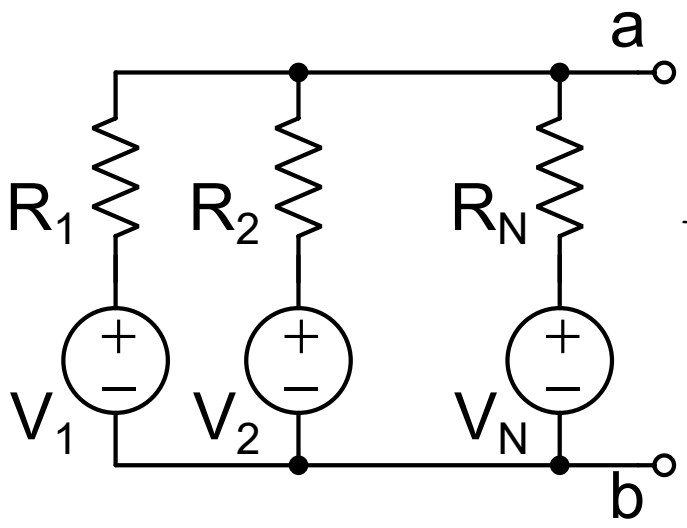


- Por lo tanto, el circuito tiene un equivalente de M-N cuya corriente equivalente y conductancia equivalente están dadas por:

$$I_{MN} = \sum_{i=1}^{N} \frac{V_i}{R_i} \qquad G_{MN} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{R_i}$$

Equivalente de Mayer-Norton

- Finalmente, el voltaje $V_{ab}= V_{oc}$ está dado por el producto entre I_{MN} y la resistencia equivalente del circuito (o equivalentemente, el inverso de la conductancia equivalente):

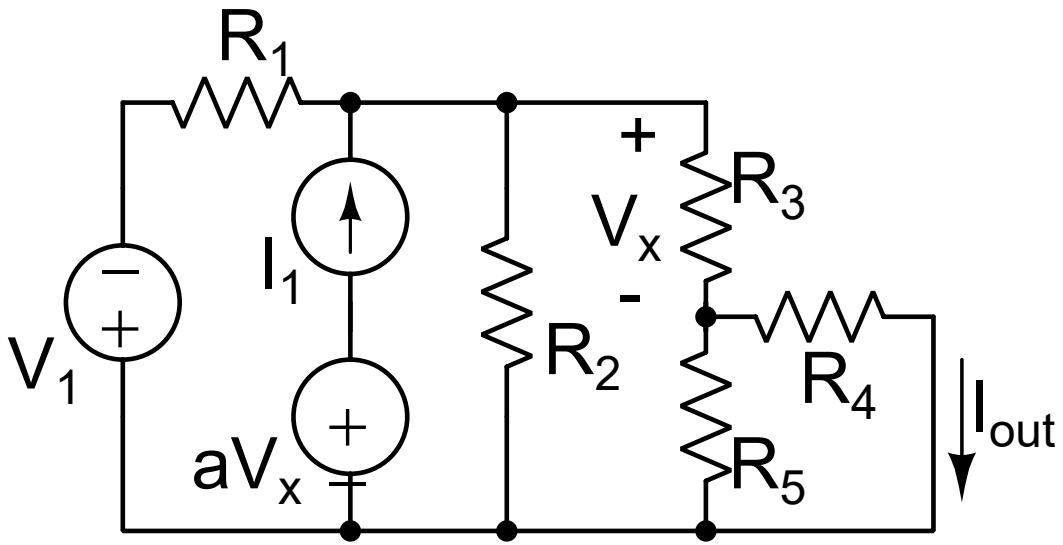


$$V_{ab} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \frac{V_i}{R_1}}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{R_i}}$$

Fin ej.

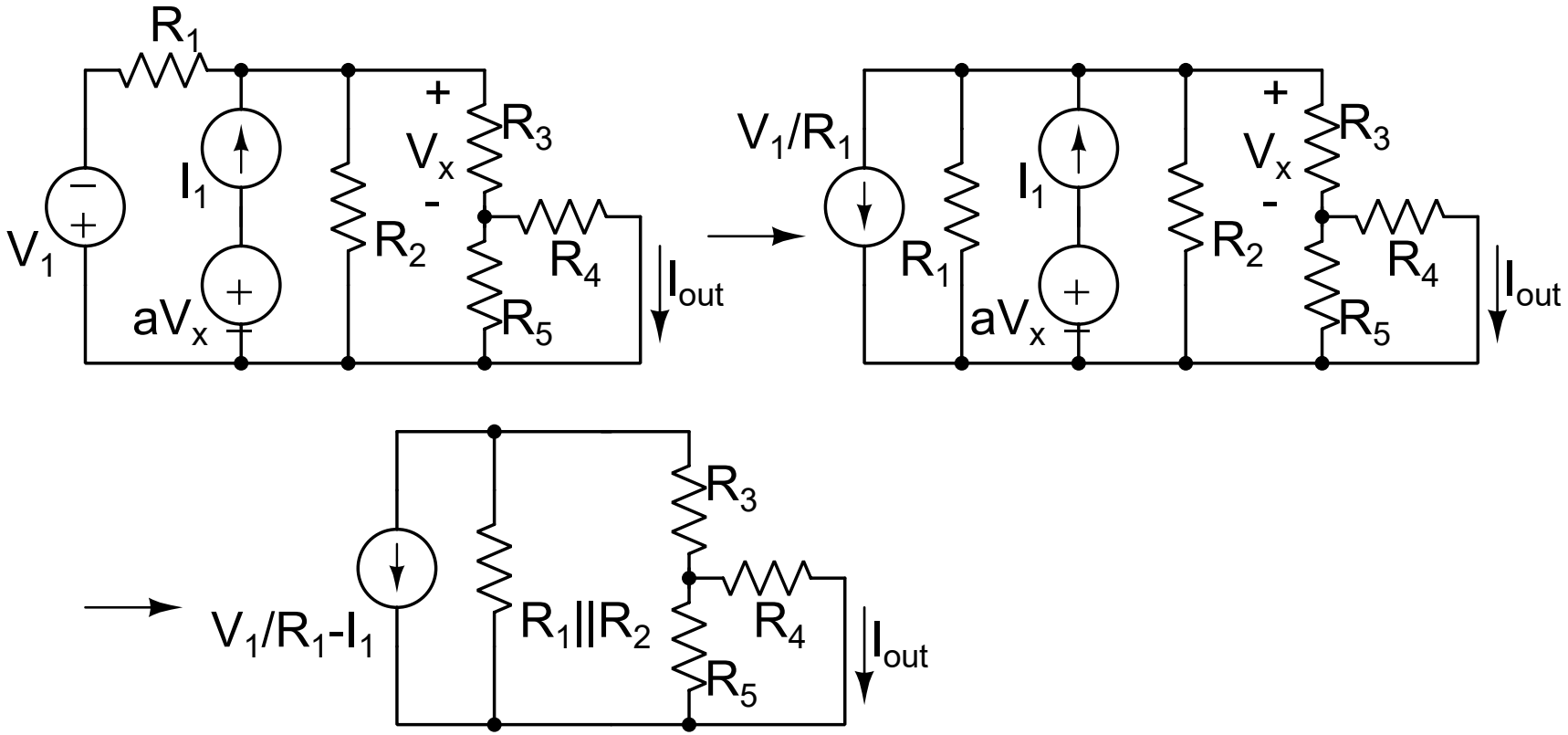
Equivalente de Mayer-Norton

- **Ejemplo**: calcular I_{out}.



- Resolveremos el ejercicio por inspección por medio de transformaciones HT – MN, divisores de voltaje y divisores de corriente.

Equivalente de Mayer-Norton

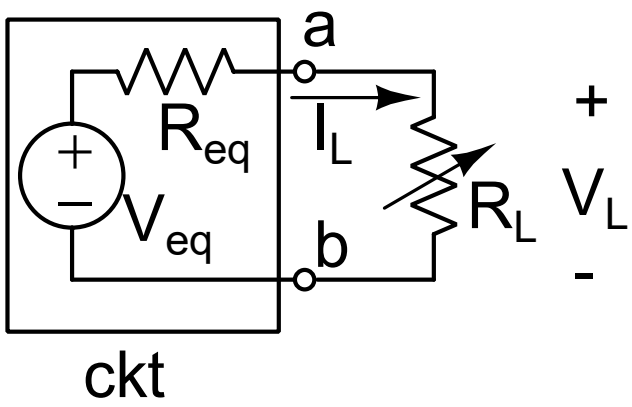


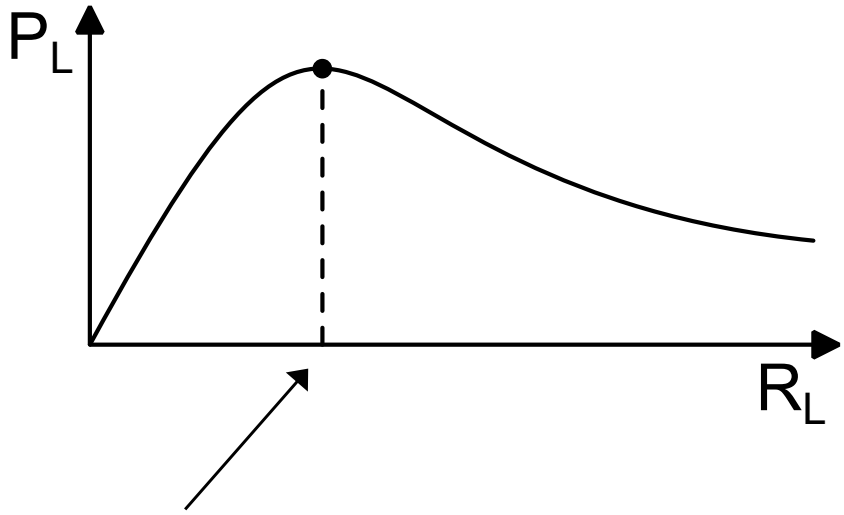
$$I_{out} = -\frac{R_5}{R_4+R_5}\,\frac{R_1||R_2}{R_3+R_4||R_5+R_1||R_2}\left(\frac{V_1}{R_1} - I_1\right)$$

Fin ej.

Máxima transferencia de potencia

- Supongamos que contamos con circuito representado por su equivalente de H-T, al cual le conectamos un potenciómetro de carga R_L para medir la potencia transferida desde el circuito hacia la carga:





Hay un valor de R_L para el cual la transferencia de potencia es máxima!

Máxima transferencia de potencia

- Analíticamente:

$$P_L = I_L^2 R_L = \left(\frac{V_{eq}}{R_{eq}+R_L} \right)^2 R_L$$

$$\frac{\partial P_L}{\partial R_L} = 0 \rightarrow R_L = R_{eq}$$

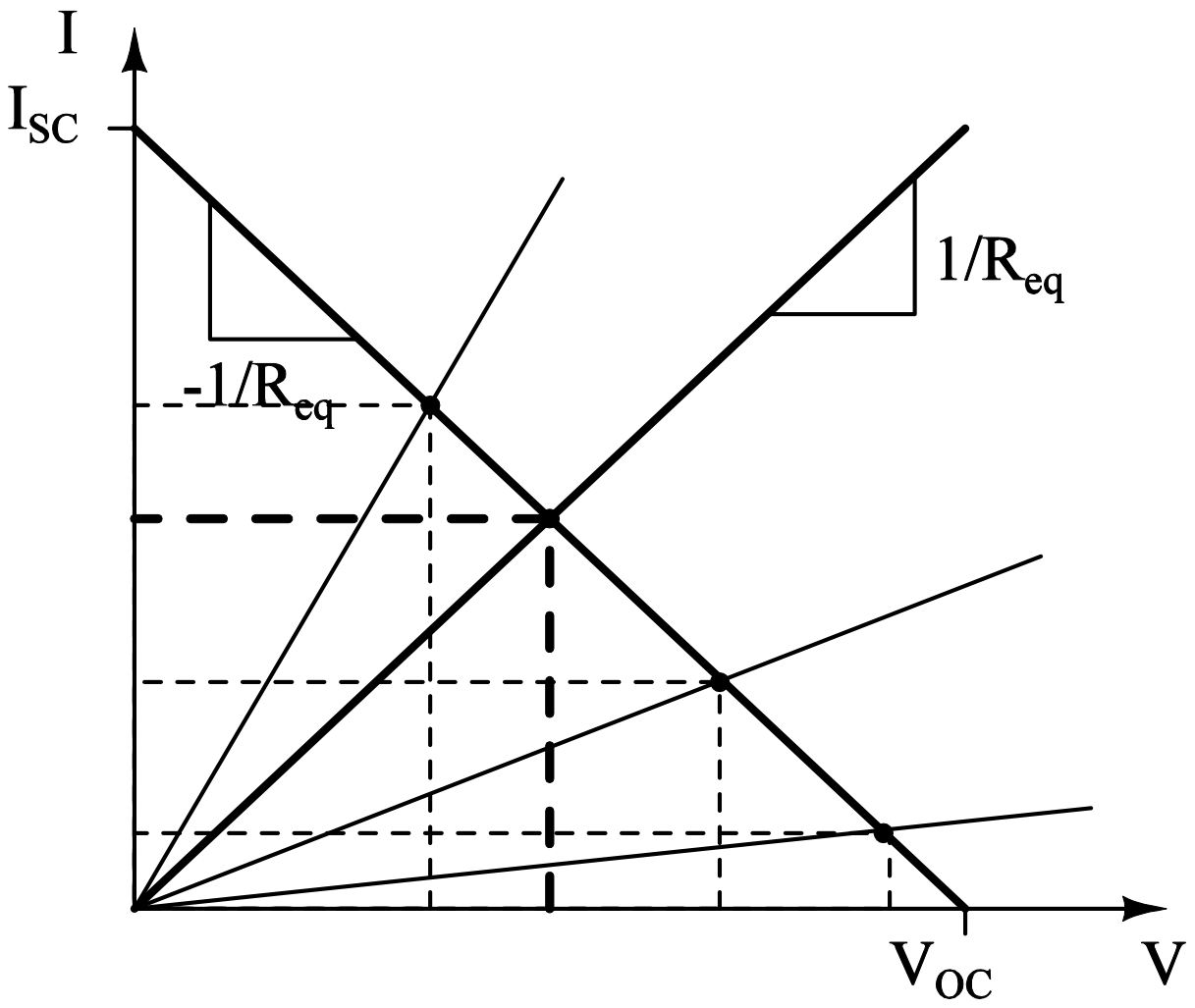
El óptimo ocurre cuando la resistencia de la carga es igual a la resistencia equivalente del circuito!

IMPORTANTE

Para una resistencia de carga dada, el óptimo ocurre cuando la resistencia equivalente del circuito es nula en el caso de un H-T, o infinita en el caso de un M-N!

Máxima transferencia de potencia

- Lo mismo en una recta de carga:



Máxima transferencia de potencia

- **Ejemplo**: Un amplificador tiene resistencia de salida 8Ω. Determine la resistencia de un parlante de manera que el amplificador le entregue la máxima potencia.

Máxima transferencia de potencia

- **Ejemplo**: Un parlante tiene resistencia equivalente de 8Ω. Determine la resistencia de salida de un amplificador de voltaje de manera que entregue al parlante la máxima potencia posible.