MÉTODO DE NODOS Y MÉTODO DE MALLAS

Introducción

En esta clase y en la próxima veremos dos métodos de resolución circuitos: el método de nodos y el método de mallas. Ambos métodos son fundamentales en teoría de circuitos, y corresponden a una extensión sistemática de las leyes de Kirchhoff. Estos métodos proveen una forma sistemática y ordenada de plantear todas las ecuaciones de un circuito, las que posteriormente pueden ser resueltas con cualquier método de álgebra lineal.

Como quedará en evidencia, en realidad estos métodos no son buenos para el *análisis* de circuitos propiamente tal, pero dado que son sistemáticos, son de gran utilidad para métodos computacionales.

Introducción

En términos generales, estas metodologías transforman el problema de resolución de circuitos en un problema matricial del estilo:

$$Ax = b$$

- Método de nodos:

$$N_{n\times n}\vec{v}_{n\times 1} = I_{n\times 1}$$

Vectores columna de fuentes independientes!

- Método de mallas:

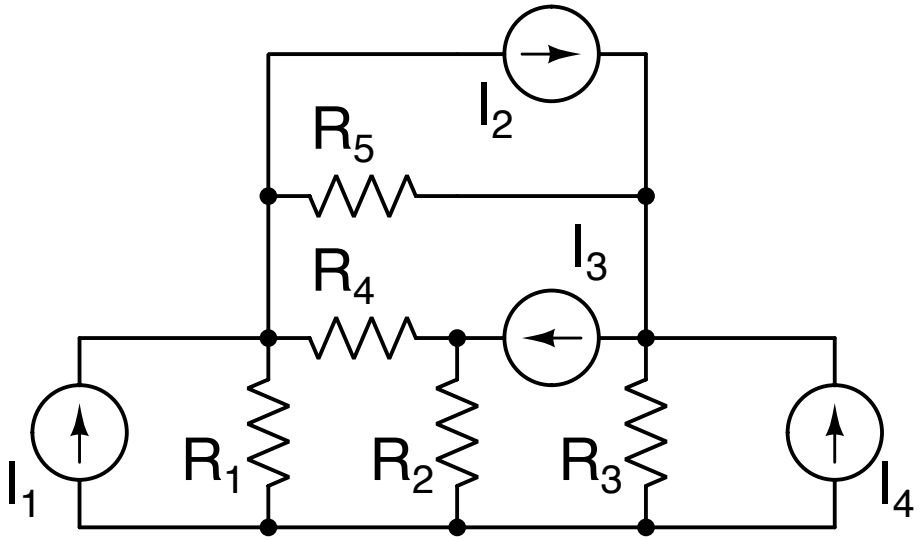
$$M_{n\times n}\vec{i}_{n\times 1} = V_{n\times 1}$$

Método de nodos

- El método de nodos consiste en definir como incógnitas todos los voltajes de nodos de un circuito, aplicar KCL en todos los nodos y así generar el sistema de ecuaciones buscado. De forma sistemática:
  1. Escoger un nodo de referencia (tierra). Idealmente debe ser el nodo con más conexiones.
  2. Asociar un voltaje v_i a cada uno de los nodos restantes (incógnitas del sistema).
  3. Aplicar KCL en todos los nodos (menos tierra) en función de los v_i.
  4. Finalmente se debe resolver el sistema para las incógnitas de interés.

Método de nodos

- **Ejemplo**: determinar todos los voltajes de nodos.



- Este ejercicio es muy simple, ya que sólo contiene fuentes independientes de corriente. Más adelante veremos ejercicios “más difíciles”.

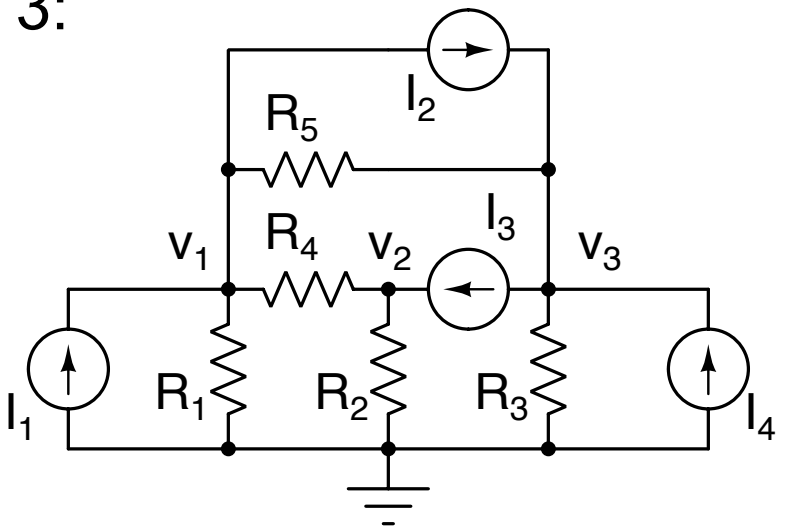
Método de nodos

- Definimos la tierra, nombramos los nodos y luego aplicamos KCL en los nodos 1, 2 y 3:

$$I_1 = I_2 + \frac{v_1}{R_1} + \frac{v_1 - v_2}{R_4} + \frac{v_1 - v_3}{R_5}$$

$$I_3 = \frac{v_2}{R_2} + \frac{v_2 - v_1}{R_4}$$

$$I_2 + I_4 = I_3 + \frac{v_3}{R_3} + \frac{v_3 - v_1}{R_5}$$



$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1||R_4||R_5} & -\frac{1}{R_4} & -\frac{1}{R_5} \\ -\frac{1}{R_4} & \frac{1}{R_2||R_4} & 0 \\ -\frac{1}{R_5} & 0 & \frac{1}{R_3||R_5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 - I_2 \\ I_3 \\ I_2 + I_4 - I_3 \end{bmatrix}$$

Método de nodos

- Finalmente los voltajes pueden ser calculados resolviendo el sistema de ecuaciones con cualquier método. Cuando sólo se busca el valor de unas pocas incógnitas es conveniente usar la regla de Cramer:

$$Ax = b$$

$$x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)}$$

Matriz A con la columna j-ésima reemplazada por el vector columna b.

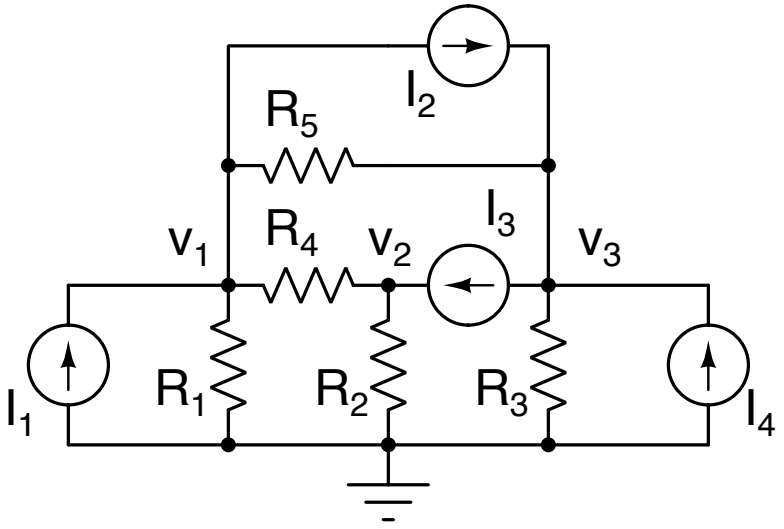
- En este caso:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1||R_4||R_5} & -\frac{1}{R_4} & -\frac{1}{R_5} \\ -\frac{1}{R_4} & \frac{1}{R_2||R_4} & 0 \\ -\frac{1}{R_5} & 0 & \frac{1}{R_3||R_5} \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} I_1 - I_2 \\ I_3 \\ I_2 + I_4 - I_3 \end{bmatrix}$$

Método de nodos

- Notar que la matriz A corresponde a una matriz de conductancias.
  - Es simétrica.
  - Es fácil de determinar por inspección en este caso (igual que el vector b).

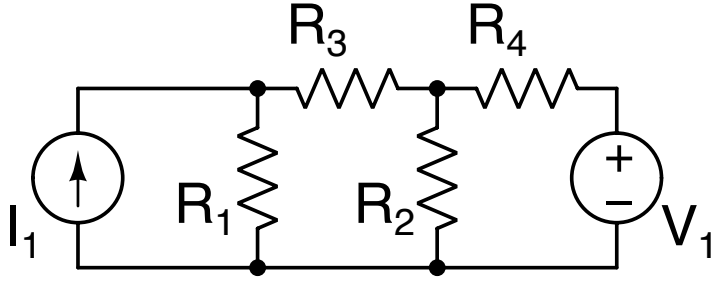
$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1||R_4||R_5} & -\frac{1}{R_4} & -\frac{1}{R_5} \\ -\frac{1}{R_4} & \frac{1}{R_2||R_4} & 0 \\ -\frac{1}{R_5} & 0 & \frac{1}{R_3||R_5} \end{bmatrix}$$



Fin ej.

Método de nodos

- **Ejemplo**: determinar todos los voltajes de nodos.

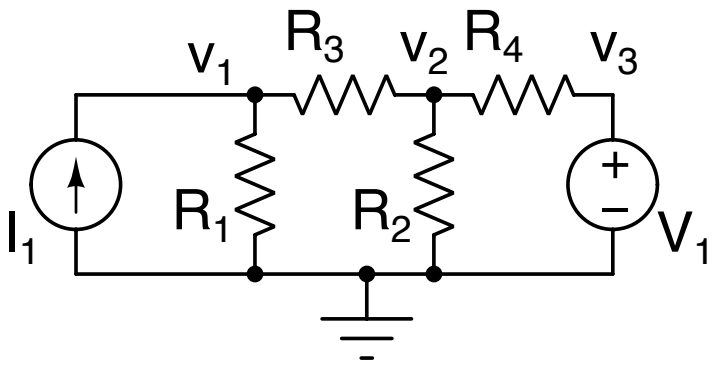


- Definimos la tierra, nombramos los nodos y luego aplicamos KCL en los nodos 1, 2 y 3:

$$I_1 = \frac{v_1}{R_1} + \frac{v_1 - v_2}{R_3}$$

$$0 = \frac{v_2}{R_2} + \frac{v_2 - v_1}{R_3} + \frac{v_2 - v_3}{R_4}$$

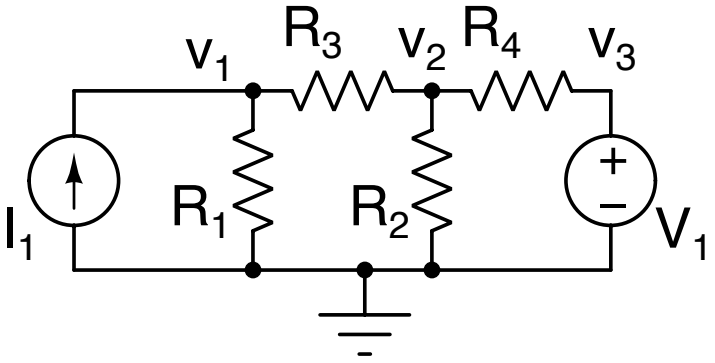
$$v_3 = V_1$$



Método de nodos

- La fuente de voltaje elimina inmediatamente una incógnita!
  - Tiene sentido, ya que al conocer el voltaje de uno de los bornes de la fuente de voltaje, el voltaje del otro borne queda inmediatamente determinado.
- Luego:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1||R_3} & -\frac{1}{R_3} \\ -\frac{1}{R_3} & \frac{1}{R_2||R_3||R_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ \frac{V_1}{R_4} \end{bmatrix}$$

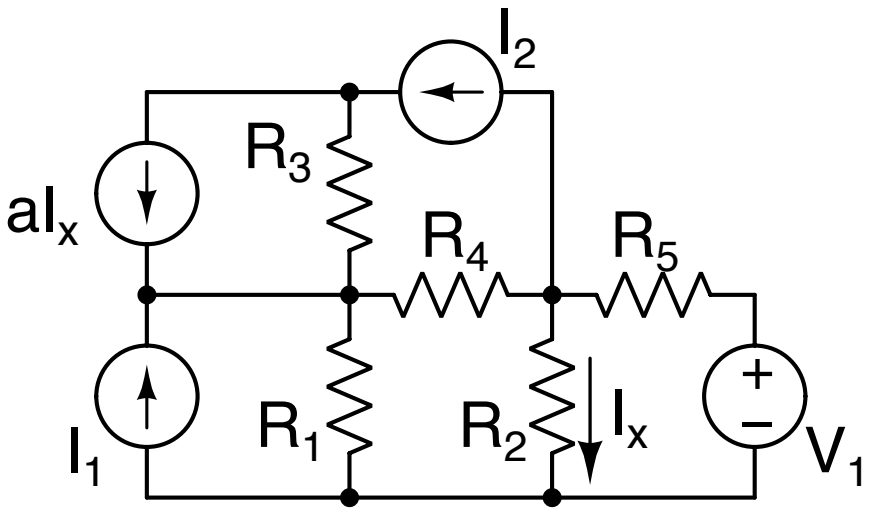


  - Se puede ver que al incluir fuentes independientes de voltaje todavía es fácil determinar la matriz de conductancias y el vector b por inspección.

Fin ej.

Método de nodos

- **Ejemplo**: determinar todos los voltajes de nodos.



Método de nodos

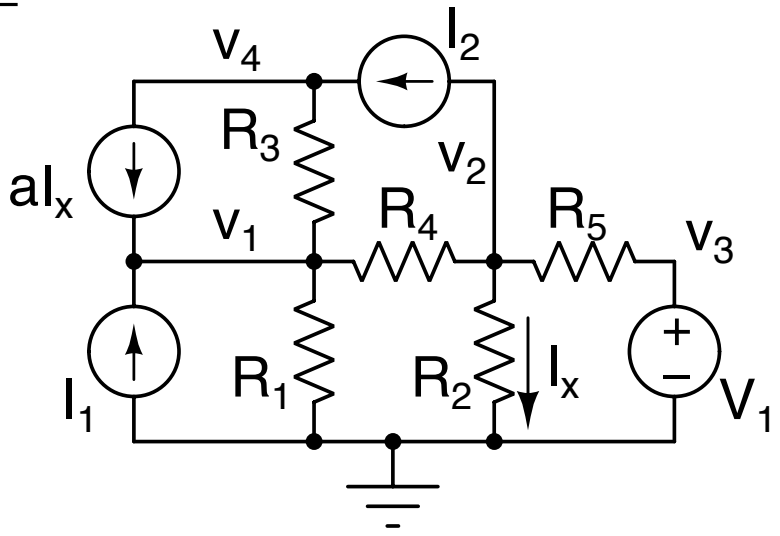
- Definimos la tierra, nombramos los nodos y luego aplicamos KCL en los nodos 1, 2, 3 y 4:

$$I_1 + aI_x = \frac{v_1}{R_1} + \frac{v_1 - v_2}{R_4} + \frac{v_1 - v_4}{R_3}$$

$$0 = I_2 + \frac{v_2}{R_2} + \frac{v_2 - v_1}{R_4} + \frac{v_2 - v_3}{R_5}$$

$$v_3 = V_1$$

$$I_2 = aI_x + \frac{v_4 - v_1}{R_3}$$



- Además, es claro que:

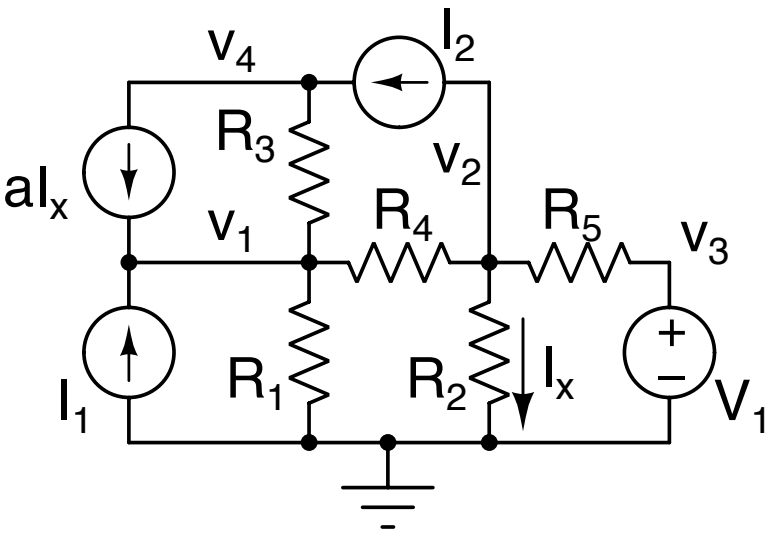
$$I_x = \frac{v_2}{R_2}$$

Método de nodos

- Así:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1||R_3||R_4} & -\left(\frac{1}{R_4}+\frac{a}{R_2}\right) & -\frac{1}{R_3} \\ -\frac{1}{R_4} & \frac{1}{R_2||R_4||R_5} & 0 \\ -\frac{1}{R_3} & \frac{a}{R_2} & \frac{1}{R_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ -I_2+\frac{V_1}{R_5} \\ I_2 \end{bmatrix}$$

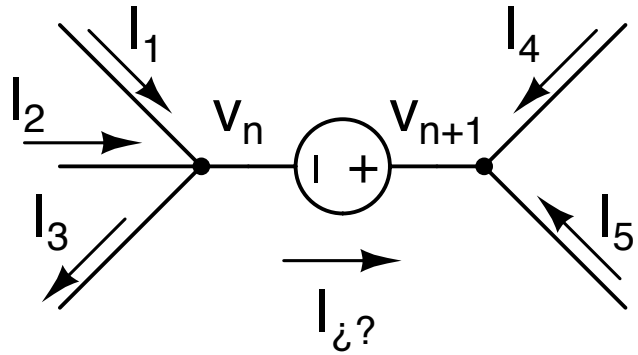
Al incluir fuentes dependientes, la complejidad de generar esta matriz y el vector b por inspección depende del circuito particular bajo análisis.



Fin ej.

Método de nodos

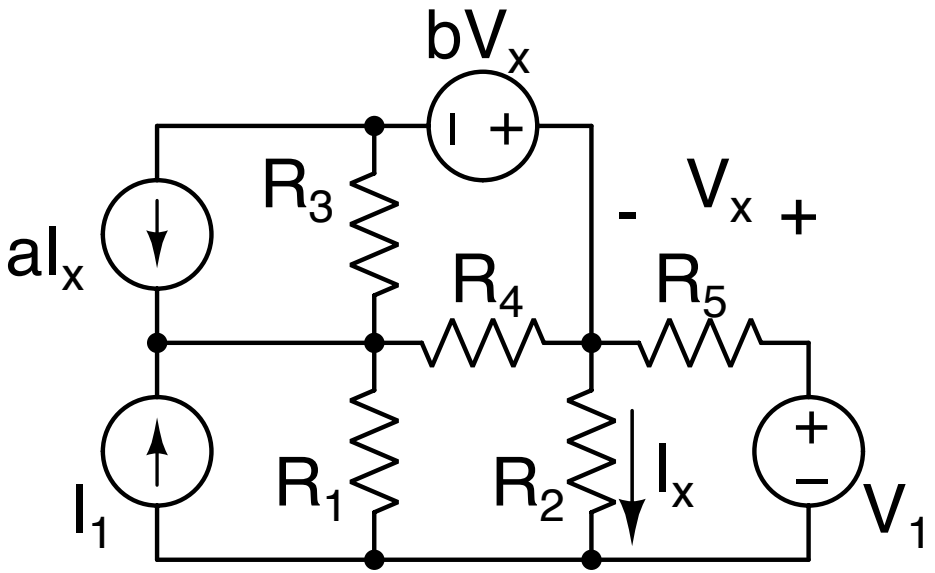
- Cuando nos encontramos con una fuente de voltaje (dep. o indep.) que no tiene nodos conectados a la tierra del circuito, no es posible expresar la corriente que pasa a través de ésta en términos de voltajes de nodo. En estos casos se puede definir un *súper nodo*.



$$I_1 + I_2 - I_3 = I_{¿?}$$
$$-I_4 - I_5 = I_{¿?}$$
$$\rightarrow I_1 + I_2 - I_3 = -I_4 - I_5$$

Método de nodos

- **Ejemplo**: determinar todos los voltajes de nodos.



Método de nodos

- Definimos la tierra, nombramos los nodos y luego aplicamos KCL en el súper nodo y en los nodos 1 y 4:

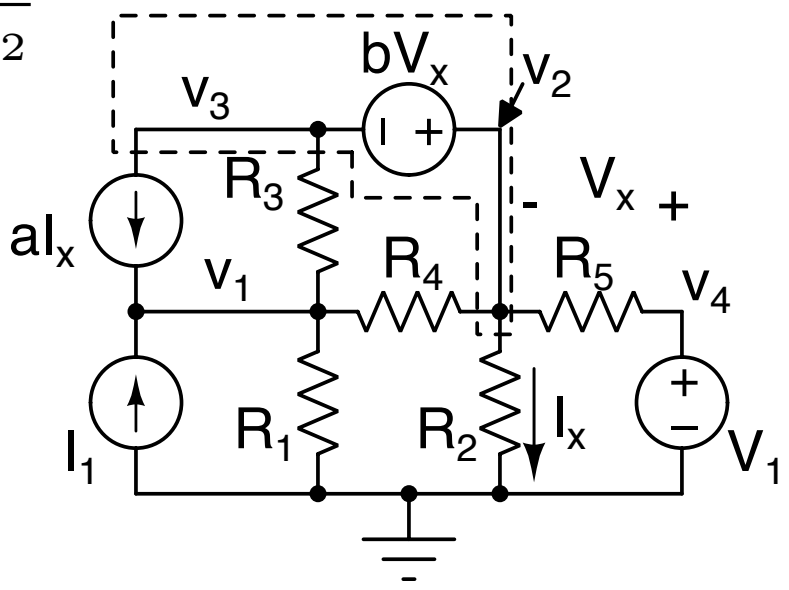
$$I_x$$

$$0 = a\frac{v_2}{R_2} + \frac{v_3 - v_1}{R_3} + \frac{v_2}{R_2} + \frac{v_2 - v_1}{R_4} + \frac{v_2 - v_4}{R_5}$$

$$I_1 = \frac{v_1}{R_1} + \frac{v_1 - v_2}{R_4} + \frac{v_1 - v_3}{R_3} - a\frac{v_2}{R_2}$$

$$v_4 = V_1$$

$$I_x$$



- Además:

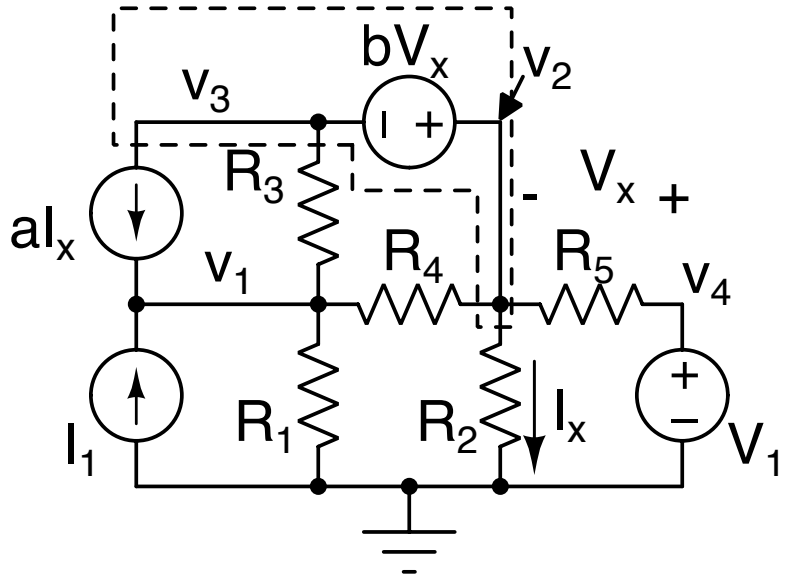
$$V_x = v_4 - v_2$$

$$v_3 = v_2 - bV_x$$

Método de nodos

- Así:

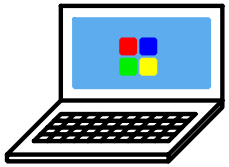
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1||R_3||R_4} & -\frac{1}{R_4||\frac{R_2}{a}||\frac{R_3}{1+b}} \\ -\frac{1}{R_3||R_4} & \frac{1}{R_2||R_4||R_5||\frac{R_2}{a}||\frac{R_3}{1+b}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 - \frac{bV_1}{R_3} \\ \frac{V_1}{R_5} + \frac{bV_1}{R_3} \end{bmatrix}$$



Fin ej.

Implementación computacional

- Como fue mencionado, el método de nodos y su dual, el método de mallas, son sistemáticos, y por lo mismo es posible implementarlos en un computador.
  - De todas las cosas del universo que son capaces de llevar a cabo alguna tarea, el computador es lejos el más limitado en términos de inteligencia (hay que indicarle paso a paso qué hacer, o en el caso contrario no sabrá cómo hacerlo).
  - Considere el comentario anterior a la hora de estudiar nodos y mallas. No quiere quedar abajo del computador en el ranking recién mencionado.



Computador



Mosca

• • •



Ser humano

Implementación computacional

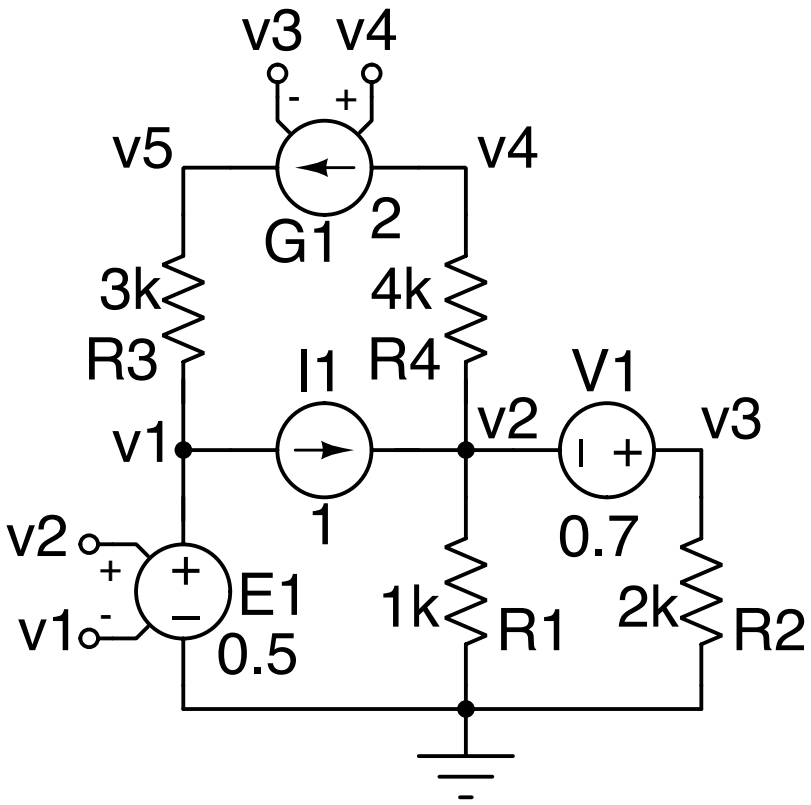
- A continuación elaboraremos la lógica que un programa como SPICE podría utilizar para determinar los voltajes de un circuito entregado en forma de *netlist*:

1. Determinar el número de nodos.
2. Identificar los nodos que se encuentran directamente conectados a una fuente de voltaje (dep. o indep).
3. Identificar los nodos que se encuentran conectados por una fuente de voltaje (súper nodos).
4. Revisar cada nodo para establecer las corrientes que entran y salen.
5. Resolver el sistema de ecuaciones resultante.

Implementación computacional

- **Ejemplo**: considere el siguiente netlist de SPICE y aplique los pasos descritos anteriormente.

```
*
E1 v1   0 v2 v1 0.5
G1 v4 v5 v4 v3 2
I1 v1 v2 1
V1 v3 v2 0.7
R1 v2   0 1k
R2 v3   0 2k
R3 v5 v1 3k
R4 v4 v2 4k
.end
```



Implementación computacional

1. Contamos el número de nodos revisando la segunda y tercera columna del netlist para ver cuántos nombres distintos hay:

```
E1 v1  0 v2 v1 0.5
G1 v4 v5 v4 v3 2
I1 v1 v2 1
V1 v3 v2 0.7
R1 v2  0 1k
R2 v3  0 2k
R3 v5 v1 3k
R4 v4 v2 4k
```

⟶ 5 nodos más tierra

Implementación computacional

2. Buscamos los nodos que se encuentran conectados a tierra a través de una fuente de voltaje (V o E).
   - Se miran las tres primeras columnas. La primera debe ser V o E y la segunda o tercera debe ser 0.

```
E1 v1  0 v2 v1 0.5
G1 v4 v5 v4 v3 2
I1 v1 v2 1
V1 v3 v2 0.7
R1 v2  0 1k
R2 v3  0 2k
R3 v5 v1 3k
R4 v4 v2 4k
```

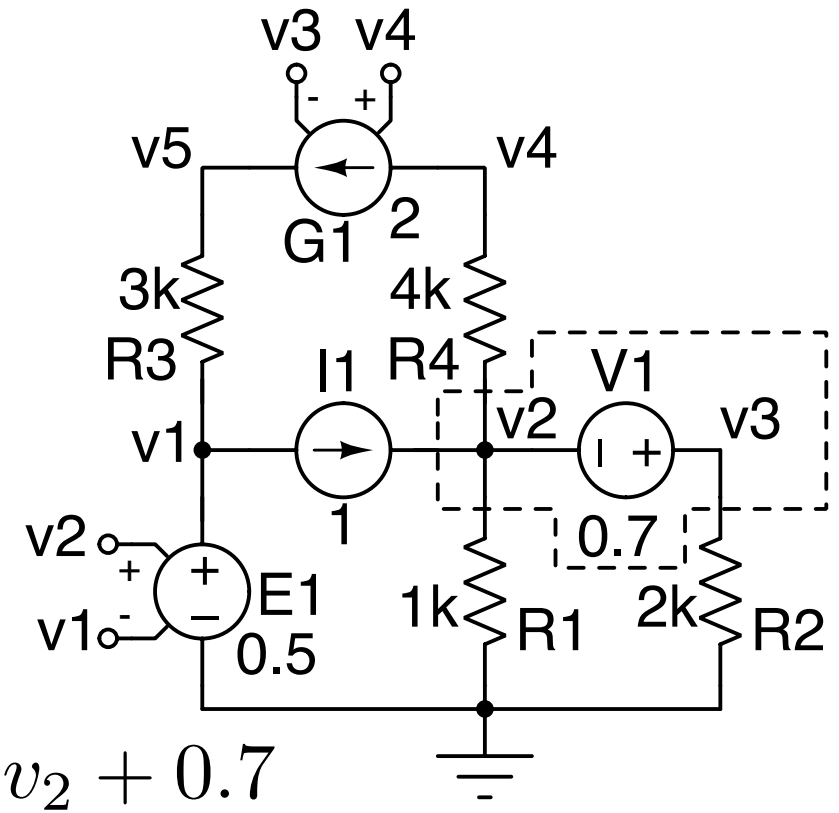

$$v_1 = \frac{1}{2}(v_2 - v_1)$$

$$v_1 = \frac{v_2}{3}$$

Implementación computacional

3. Buscamos súper nodos.
   - Nodos distintos de tierra conectados entre sí a través de una fuente V o E.

```
E1 v1  0 v2 v1 0.5
G1 v4 v5 v4 v3 2
I1 v1 v2 1
V1 v3 v2 0.7
R1 v2  0 1k
R2 v3  0 2k
R3 v5 v1 3k
R4 v4 v2 4k
```



$$\rightarrow v_3 = v_2 + 0.7$$

Implementación computacional

4. Revisamos línea por línea para establecer las corrientes que entran y salen de cada nodo y así llenar la matriz de conductancias que en este caso es de (5-2)x(5-2):

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} v_1 &= v_2/3 \\ v_3 &= v_2 + 0.7 \end{aligned}$$

Implementación computacional

- Segunda línea (la primera no sirve, parte con E):

```
E1 v1  0 v2 v1 0.5
G1 v4 v5 v4 v3 2
I1 v1 v2 1
V1 v3 v2 0.7
R1 v2  0 1k
R2 v3  0 2k
R3 v5 v1 3k
R4 v4 v2 4k
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.4 \\ -1.4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} v_1 &= v_2/3 \\ v_3 &= v_2 + 0.7 \end{aligned}$$

Implementación computacional

- Tercera línea:

```
E1 v1  0 v2 v1 0.5
G1 v4 v5 v4 v3 2
I1 v1 v2 1
V1 v3 v2 0.7
R1 v2  0 1k
R2 v3  0 2k
R3 v5 v1 3k
R4 v4 v2 4k
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.4 \\ -1.4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} v_1 &= v_2/3 \\ v_3 &= v_2 + 0.7 \end{aligned}$$

Implementación computacional

- Quinta línea (la cuarta no sirve, parte con V):

```
E1 v1  0 v2 v1 0.5
G1 v4 v5 v4 v3 2
I1 v1 v2 1
V1 v3 v2 0.7
R1 v2  0 1k
R2 v3  0 2k
R3 v5 v1 3k
R4 v4 v2 4k
```

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{1\text{k}} & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.4 \\ -1.4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} v_1 &= v_2/3 \\ v_3 &= v_2 + 0.7 \end{aligned}$$

Implementación computacional

- Sexta línea:

```
E1 v1  0 v2 v1 0.5
G1 v4 v5 v4 v3 2
I1 v1 v2 1
V1 v3 v2 0.7
R1 v2  0 1k
R2 v3  0 2k
R3 v5 v1 3k
R4 v4 v2 4k
```

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{1\text{k}||2\text{k}} & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{0.7}{2\text{k}} \\ 1.4 \\ -1.4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} v_1 &= v_2/3 \\ v_3 &= v_2 + 0.7 \end{aligned}$$

Implementación computacional

- Séptima línea:

```
E1 v1  0 v2 v1 0.5
G1 v4 v5 v4 v3 2
I1 v1 v2 1
V1 v3 v2 0.7
R1 v2  0 1k
R2 v3  0 2k
R3 v5 v1 3k
R4 v4 v2 4k
```

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{1\text{k}||2\text{k}} & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 2-\frac{1}{3\cdot 3\text{k}} & -2 & \frac{1}{3\text{k}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\frac{0.7}{2\text{k}} \\ 1.4 \\ -1.4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} v_1 &= v_2/3 \\ v_3 &= v_2 + 0.7 \end{aligned}$$

Implementación computacional

- Octava línea:

```
E1 v1  0 v2 v1 0.5
G1 v4 v5 v4 v3 2
I1 v1 v2 1
V1 v3 v2 0.7
R1 v2  0 1k
R2 v3  0 2k
R3 v5 v1 3k
R4 v4 v2 4k
```

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{1\text{k}||2\text{k}||4\text{k}} & -\frac{1}{4\text{k}} & 0 \\ -2-\frac{1}{4\text{k}} & 2+\frac{1}{4\text{k}} & 0 \\ 2-\frac{1}{3\cdot 3\text{k}} & -2 & \frac{1}{3\text{k}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\frac{0.7}{2\text{k}} \\ 1.4 \\ -1.4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} v_1 &= v_2/3 \\ v_3 &= v_2 + 0.7 \end{aligned}$$

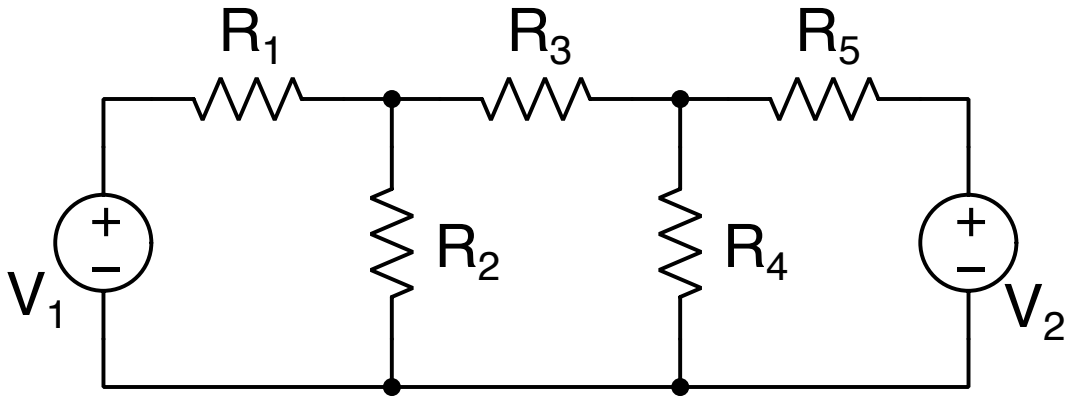
Fin ej.

Método de mallas

- El método de mallas consiste en definir como incógnitas todas las corrientes de malla de un circuito, aplicar KVL en todas las mallas y así generar el sistema de ecuaciones buscado. De forma sistemática:
  1. Escoger M corrientes de malla tales que al menos una de ellas pase por cada rama del circuito.
  2. Asociar una corriente i_i a cada malla (incógnitas del sistema).
  3. Aplicar KVL en todas las mallas en función de los i_i.
  4. Finalmente se debe resolver el sistema para las incógnitas de interés.

Método de mallas

- **Ejemplo**: determinar todas las corrientes del circuito.

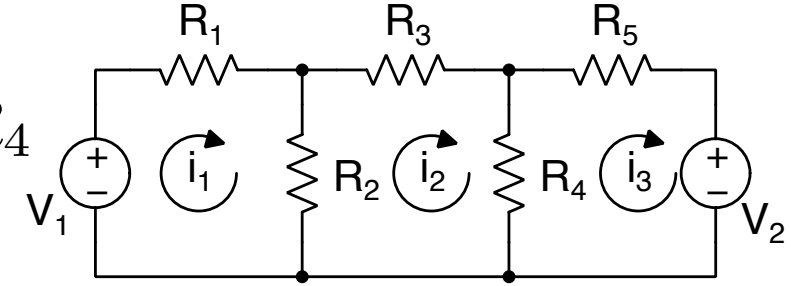


- Este ejercicio es muy simple, ya que sólo contiene fuentes independientes de voltaje. Más adelante veremos ejercicios “más difíciles”.

Método de mallas

- Identificamos las corrientes de malla y luego aplicamos KVL en las mallas 1, 2 y 3:

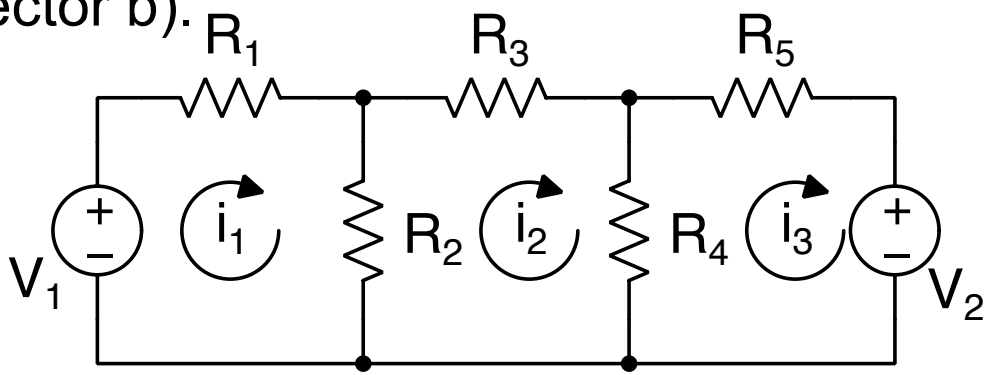
$$V_1 = i_1 R_1 + (i_1 - i_2) R_2$$
$$0 = (i_2 - i_1) R_2 + i_2 R_3 + (i_2 - i_3) R_4$$
$$-V_2 = (i_3 - i_2) R_4 + i_3 R_5$$



$$\begin{bmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 & 0 \\ -R_2 & R_2 + R_3 + R_4 & -R_4 \\ 0 & -R_4 & R_5 + R_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ 0 \\ -V_2 \end{bmatrix}$$

Método de mallas

- Notar que la matriz A corresponde a una matriz de resistencias.
  - Es simétrica.
  - Es fácil de determinar por inspección en este caso (igual que el vector b).

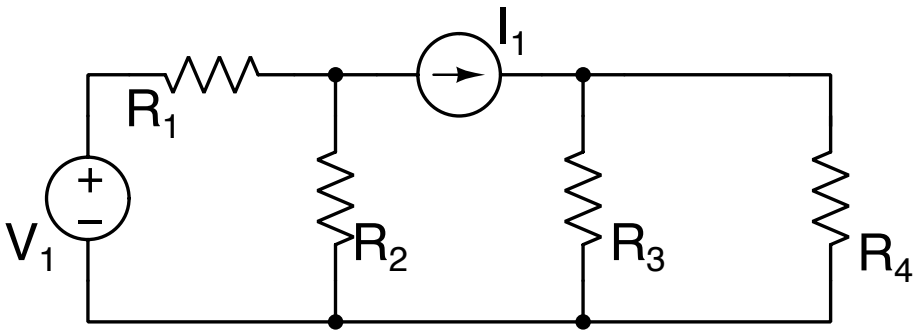


$$A = \begin{bmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 & 0 \\ -R_2 & R_2 + R_3 + R_4 & -R_4 \\ 0 & -R_4 & R_5 + R_4 \end{bmatrix}$$

Fin ej.

Método de mallas

- **Ejemplo**: determinar todas las corrientes del circuito.

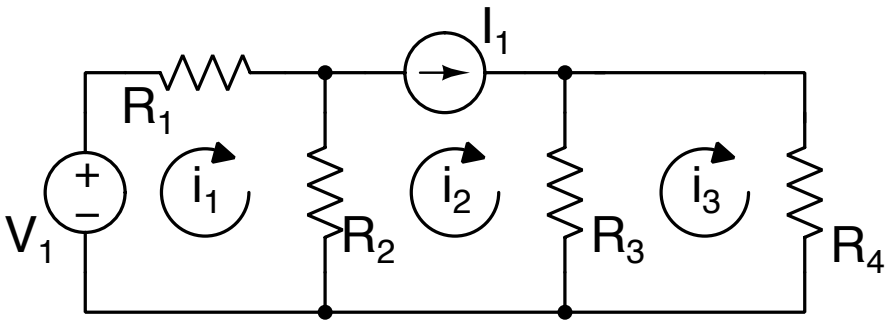


- Identificamos las corrientes de malla y luego aplicamos KVL en las mallas 1, 2 y 3:

$$V_1 = i_1 R_1 + (i_1 - i_2) R_2$$

$$i_2 = I_1$$

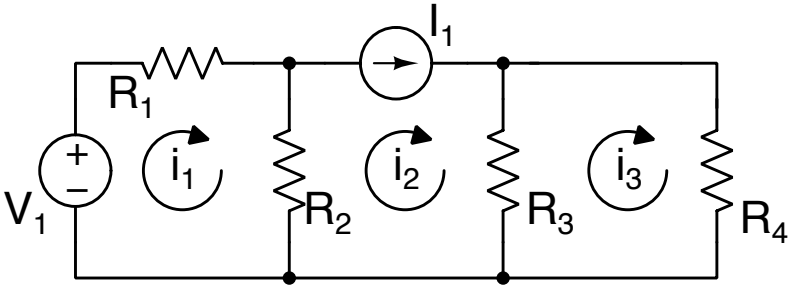
$$0 = (i_3 - i_2) R_3 + i_3 R_4$$



Método de mallas

- La fuente de corriente elimina inmediatamente una incógnita!
  - Tiene sentido, ya que al conocer la corriente de una rama en una malla, la corriente de la malla completa queda inmediatamente determinada.
- Luego:

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_2 & 0 \\ 0 & R_3 + R_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 + I_1 R_2 \\ I_1 R_3 \end{bmatrix}$$

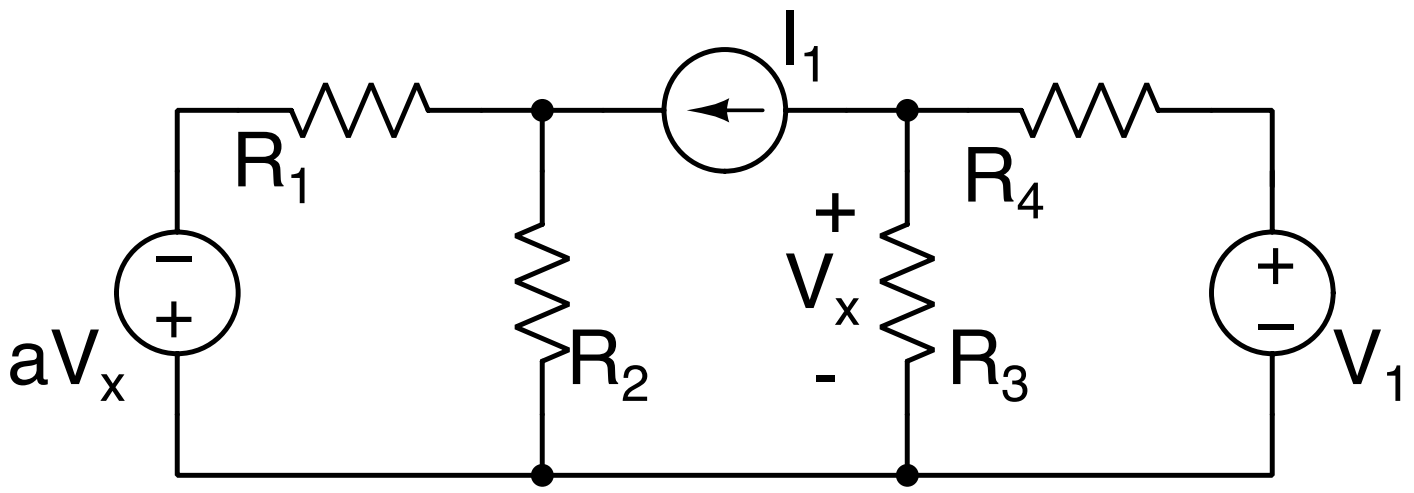


  - Se puede ver que al incluir fuentes independientes de corriente todavía es fácil determinar la matriz de resistencias y el vector b por inspección.

Fin ej.

Método de mallas

- **Ejemplo**: determinar todas las corrientes del circuito.



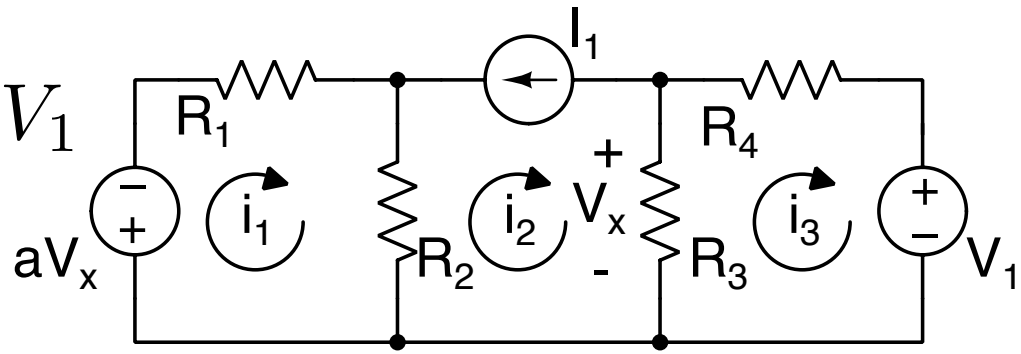
Método de mallas

- Identificamos las corrientes de malla y luego aplicamos KVL en las mallas 1, 2 y 3:

$$aV_x + i_1 R_1 + (i_1 - i_2)R_2 = 0$$

$$i_2 = -I_1$$

$$(i_3 - i_2)R_3 + i_3 R_4 = -V_1$$



- Además, es claro que:

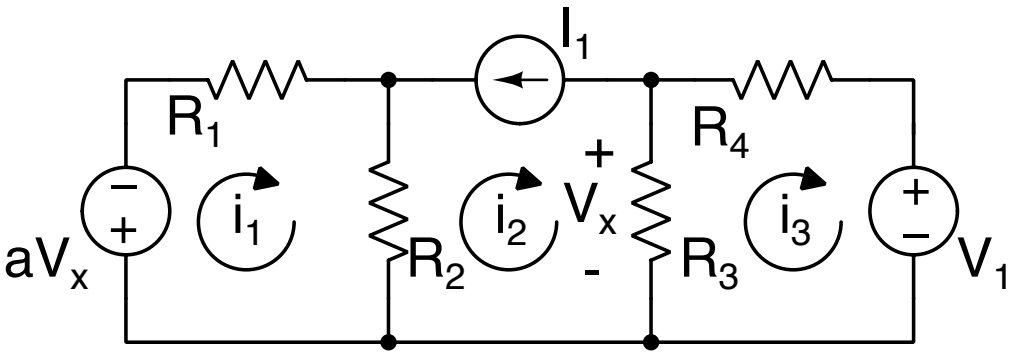
$$V_x = -(I_1 + i_3)R_3$$

Método de mallas

- Así:

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_2 & -aR_3 \\ 0 & R_3 + R_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1(aR_3 - R_2) \\ -(V_1 + I_1 R_3) \end{bmatrix}$$

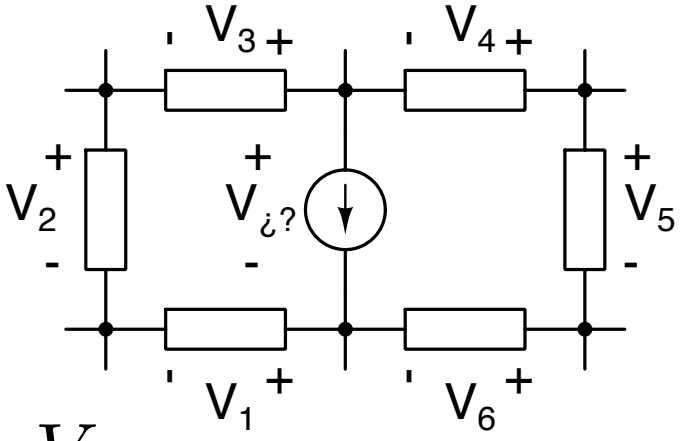
Al incluir fuentes dependientes, la complejidad de generar esta matriz y el vector b por inspección depende del circuito particular bajo análisis.



Fin ej.

Método de mallas

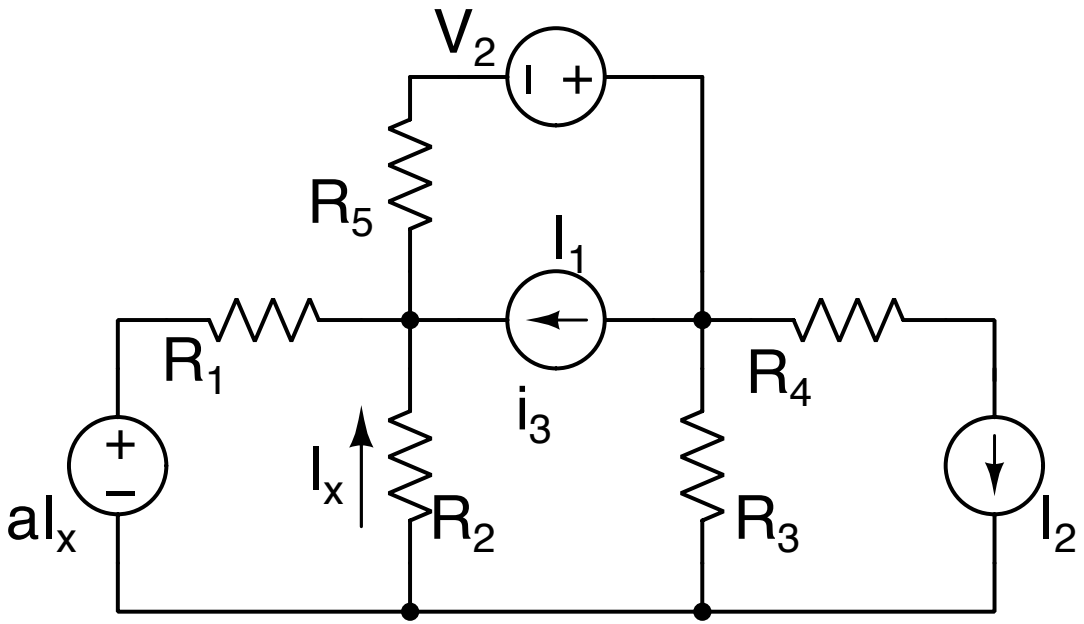
- Cuando nos encontramos con una fuente de corriente (dep. o indep.) cuya rama pertenece a más de una malla, no es posible expresar la diferencia de potencial en los bornes de la fuente en términos de las corrientes de malla. En estos casos se puede definir una *súper malla*.



$$-V_1 + V_2 + V_3 = V_{¿?}$$
$$-V_4 + V_5 + V_6 = V_{¿?}$$
$$\rightarrow -V_1 + V_2 + V_3 = -V_4 + V_5 + V_6$$

Método de mallas

- **Ejemplo**: determinar todas las corrientes del circuito.



Método de nodos

- Identificamos las corrientes de malla y luego aplicamos KVL en la súper malla y en las mallas 1 y 2:

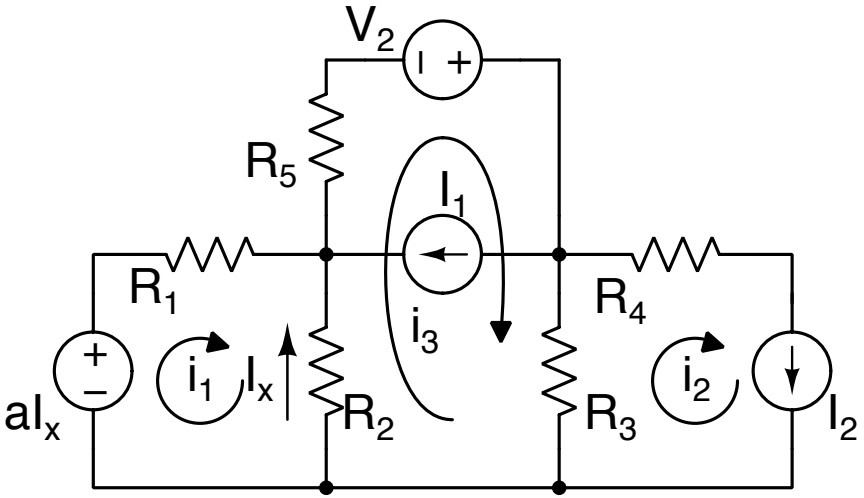
$$i_3 R_5 + (i_3 - i_2)R_3 + (i_3 - i_1)R_2 = V_2$$

$$-aI_x + i_1 R_1 + (i_1 - i_3)R_2 = 0$$

$$i_2 = I_2$$

- Además:

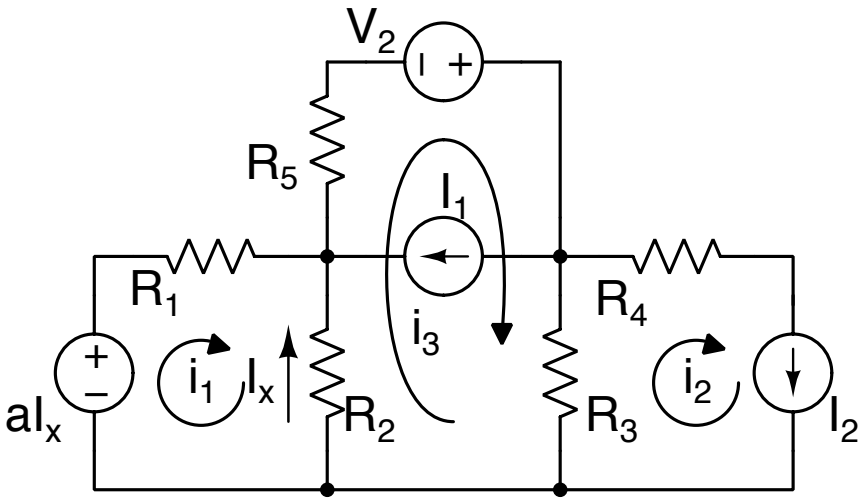
$$I_x = i_3 - i_1$$



Método de nodos

- Así:

$$\begin{bmatrix} -R_2 & R_2+R_3+R_5 \\ a+R_1+R_2 & -(a+R_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_2+I_2R_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$



Fin ej.

Nodos versus mallas

- Un circuito puede ser resuelto tanto con el método de nodos como el de mallas.
  - Hay casos donde un método es preferible a otro.
  - La idea es que el sistema de ecuaciones sea pequeño, es decir, *mientras menos trabajo, mejor*.
  - En la práctica, para analizar un circuito se usan selectivamente (i.e. de forma inteligente) nodos y mallas en conjunto. Además, muchas veces nos interesa una variable en particular, no todas las variables del circuito (para eso está SPICE o cualquier programa de simulación de circuitos).