Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Eléctrica
IEE2123 – Circuitos Eléctricos
Prof. Álvaro Lorca
Segundo Semestre de 2018

Tarea 7
Funciones de transferencia, Bode y Filtros

Ronaldo Astudillo y rhastudillo@uc.cl

Instrucciones

- La tarea debe ser entregada el día Lunes 12 de Noviembre hasta las 17:00 horas en la secretaría de Ingeniería Eléctrica.
- Su reporte debe ser conciso y auto-explicativo, conteniendo cualquier información relevante (sin páginas y páginas de números o cosas por el estilo). En particular, el reporte debe contener cualquier código relevante desarrollado, si estefuera el caso.
- Existirá un bono de 1 décima en la nota final de la Tarea si es que esta se escribe completamente en LaTeX(siempre que la nota final no resulte mayor a 7).
- La tarea debe ser concisa y autoexplicativa. El trabajo es individual, i.e. una tarea por persona, sin embargo, se incentiva a que colaboren con sus compañeros en las estrategias más efectivas para abordar los diferentes problemas.

Problema 1 (4 puntos)

Obtenga las funciones de transferencia de los circuitos mostrados en las figuras 1 y 2, indicando el tipo de función de transferencia que corresponde en cada caso.
i) Ver figura 1

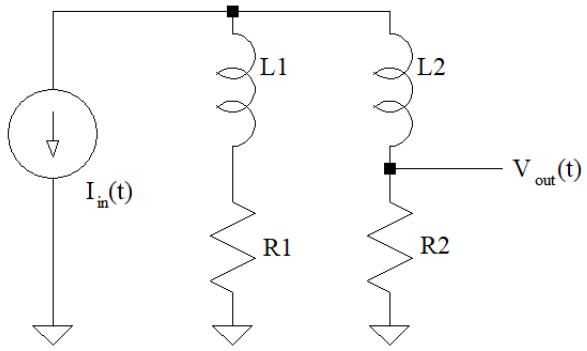


Figura 1: Circuito RL problema 1.i

ii) Ver figura 2

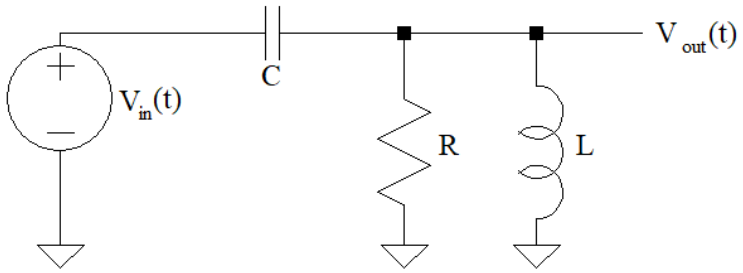


Figura 2: Circuito RLC problema 1.ii

Problema 2 (12 puntos)

a) Bosqueje los diagramas de Bode de fase y magnitud para las siguientes funciones de transferencia, indicando la información relevante en cada diagrama (frecuencias de corte, puntos intermedios notables, y con los ejes los gráficos bien rotulados). Cada diagrama debe ser hecho a mano o en un programa que permita bosquejarlo (ej: Geogebra). No se aceptan soluciones graficadas en software de computación científica.

i) $H(s) = \frac{10s^2}{(s+10)(s+100)}$

ii) $H(s) = \frac{-100s^3}{(s+1)^3(s-50)}$

iii) $H(s) = \frac{90s}{s^2+150*s+900}$

b) A partir de los siguientes diagramas de magnitud de Bode, determinar la función de transferencia que representa cada uno de estos gráficos. Para ello hay que considerar que el comportamiento de las frecuencias bajas se mantiene invariante al acercarse a f=0.

i)Ver figura 3

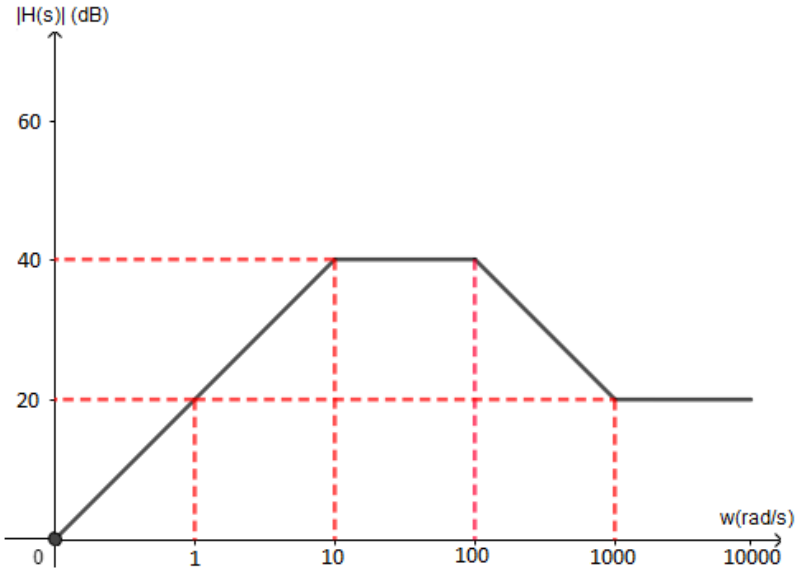


Figura 3: Diagrama de bode problema 2.b.i

ii)Ver figura 4

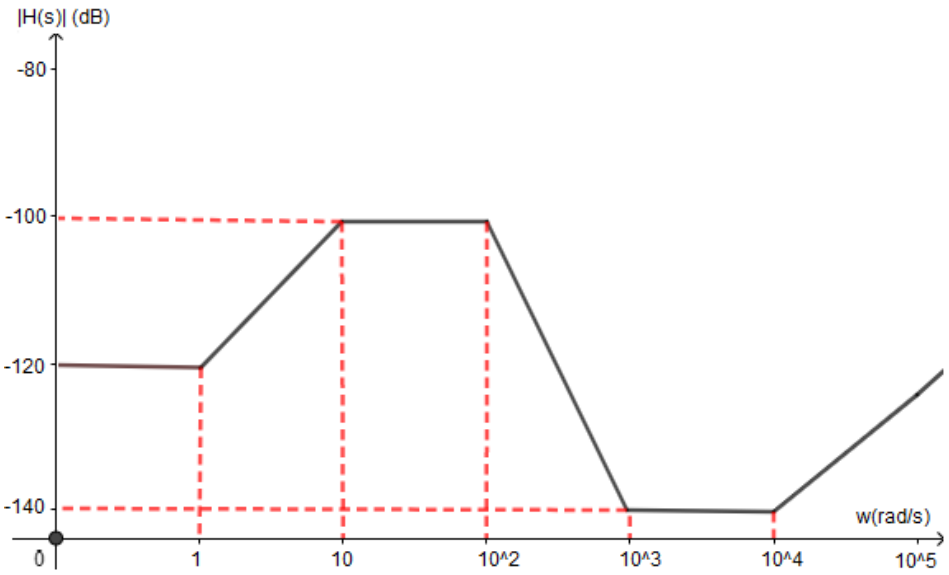


Figura 4: Diagrama de bode problema 2.b.ii

iii)Ver figura 5

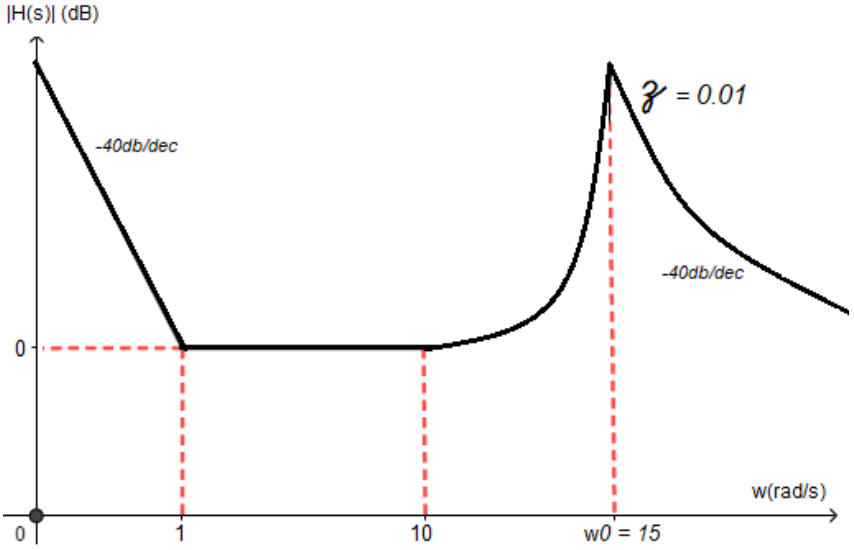


Figura 5: Diagrama de bode problema 2.b.iii

Problema 3 (12 puntos)

Considere los circuitos de las figuras 6 y 7.

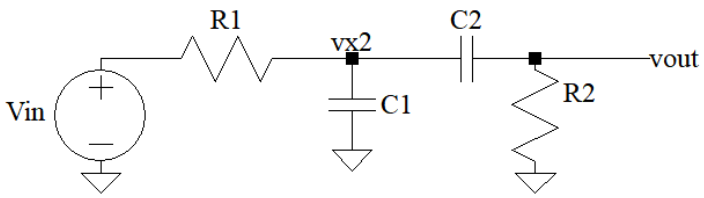


Figura 6: Filtro RC en cascada

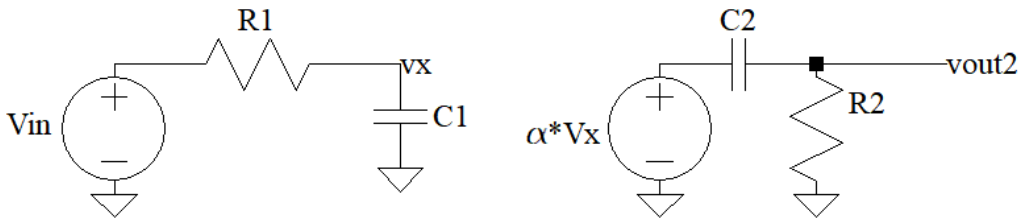


Figura 7: Filtro RC como buffer

a. Obtenga la función de transferencia $F_1(s) = \frac{v_{out1}}{v_{in}}$ para el circuito de la figura 6.

b. Obtenga las funciones de transferencia $F_x(s) = \frac{v_x}{v_{in}}$ y $F_2(s) = \frac{v_{out2}}{v_{in}}$ para el circuito mostrado en la figura 7.

c. ¿Hay algún valor escalar para α tal que $F_1(s) = \alpha F_2(s)$? Fundamente.

d. Considere $R_1 = 20k$, $R_2 = 2k$, $C_1 = 2uF$ y $C_2 = 1uF$ y $\alpha = 1$. Determine las funciones de transferencia normalizadas para $F_1(s)$, $F_2(s)$ y $F_3(s)$.(*Hint:* Los polos y ceros normalizados son de la forma $(1 \pm \frac{s}{p})$ ó $(1 \pm \frac{s}{z})$ y para los polos y ceros de orden 2 se utiliza la convención $(as^2 + bs + 1)$ como se vió en clases.)

e. Obtenga los diagramas de Bode para $F_1(s)$ y $F_2(s)$ en función de ω, utilizando herramientas computacionales como MATLAB, GNU Octave o Scilab. Además, adjunte los pantallazos de los resultados con las etiquetas respectivas en los ejes. ¿A qué tipos de filtros corresponden? (*Hint:* ver las funciones tf() y Bode() en MATLAB).

f. Realice una simulación de los circuitos en LTSpice utilizando los valores pedidos anteriormente y obtenga el diagrama de Bode para $F_1(s), F_2(s)$ y $F_x(s)$. Además, adjunte las imágenes de las simulaciones realizadas. ¿Hay diferencias entre los diagramas obtenidos en LTSpice y los de la pregunta anterior? Explique. (*Hint:* recordar que w=2π f).

Solución Problema 1

a) Sea I2 la corriente que sale por la rama de en medio e I3 la corriente que sale por la tercera rama, tenemos el siguiente divisor de corriente:

$$I_3 = -I_{in}\frac{(sL_1 + R_1)}{s(L_1 + L2) + R_1 + R_2} \tag{1}$$

Por ley de Ohm en la resistencia R_2:

$$V_{out} = I_3 * R_2 \tag{2}$$

Finalmente, reemplazando I_3 tenemos:

$$\frac{V_{out}}{I_3} = -\frac{(sL_1 + R_1) * R_2}{s(L_1 + L2) + R_1 + R_2} \tag{3}$$

Esta función de transferencia corresponde a una de transimpedancia.

b)Realizamos un divisor de voltaje haciendo el paralelo entre R y L y así obtenemos facilmente V_{out}:

$$V_{out} = \frac{V_{in}(R + sL)}{\frac{1}{sC} + R + sL} \tag{4}$$

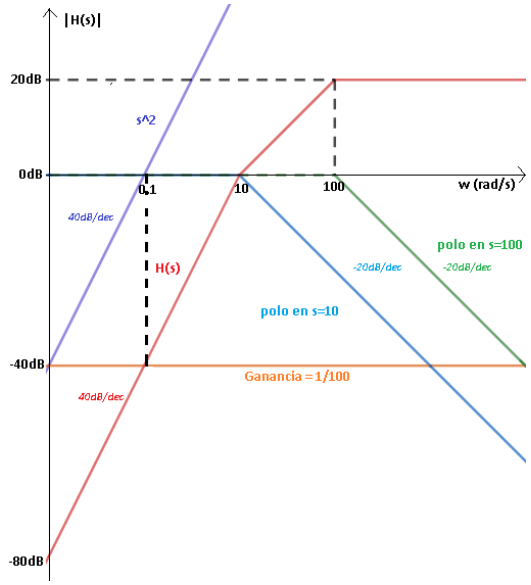
Multiplicando por sC arriba y abajo y despejando la función tenemos:

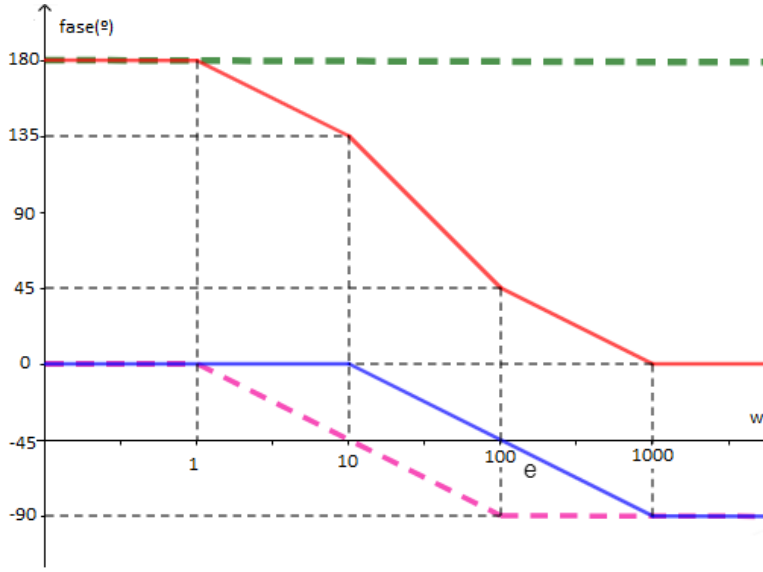
$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{sC(R + sL)}{1 + sCR + s^2CL} \tag{5}$$

Esta función representa una ganancia de voltaje.

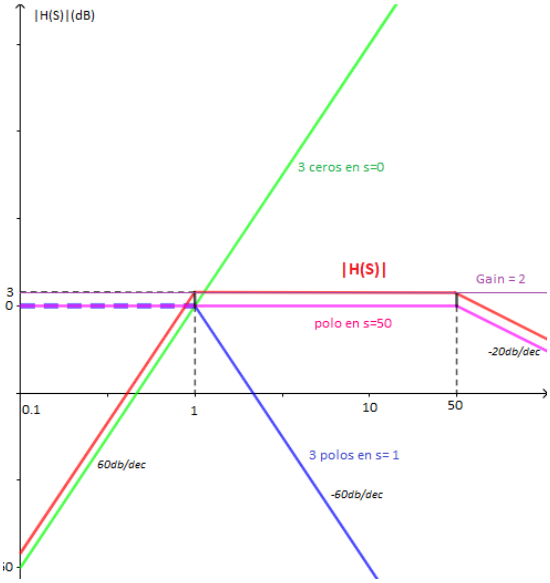
Solución Problema 2

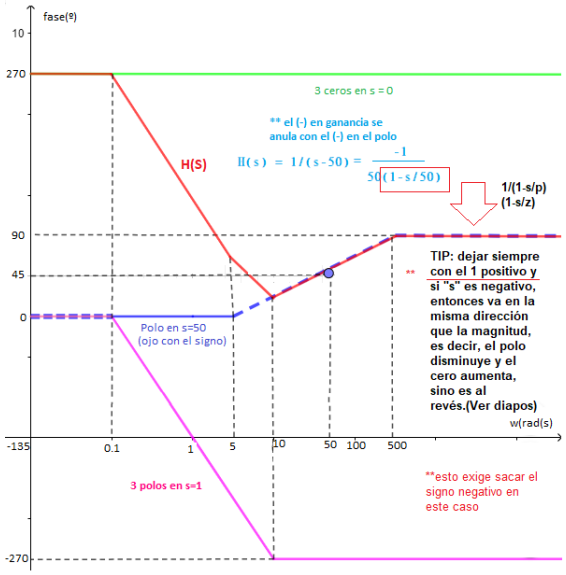
a) i)





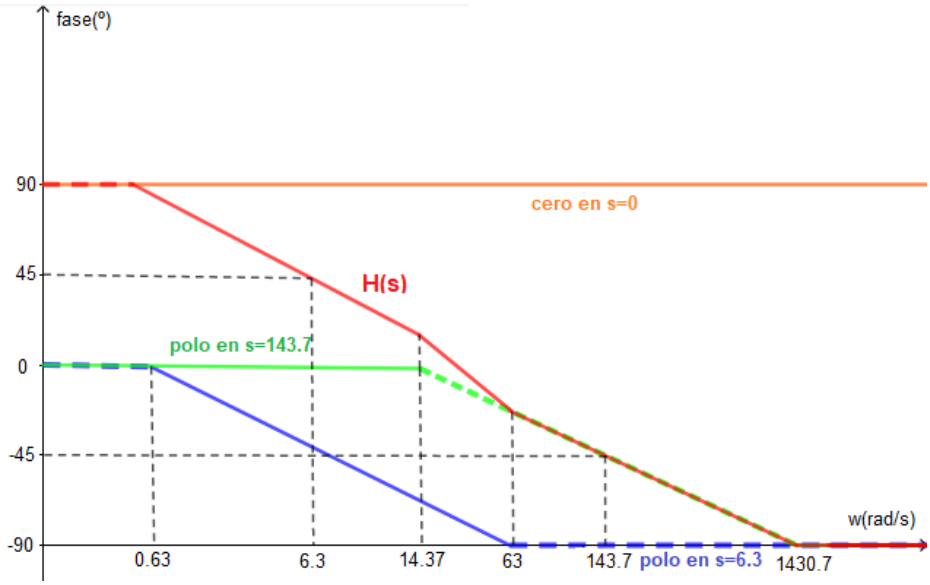
ii)





iii)





b)

i) Dado que en $\omega = 1$ la función vale 20dB la ganancia es 10. También, como la función parte ascendiendo a 20dB por década, presenta un cero en s=0. Para s=10 y s=100 se ven decaimientos de 20dB en cada uno respecto al inicio, por lo que hay un polo en cada frecuencia. Por último, en s=1000 la función se torna constante debido a un cero en este punto. Así, la función queda:

$$H(s) = \frac{10s(\frac{s}{1000}+1)}{(\frac{s}{10}+1)(\frac{s}{100}+1)} \tag{6}$$

ii)La función comienza en -120dB, por lo que existe una ganancia de $\frac{1}{10^6}$.Se aprecia un cero en s=1, luego un polo en s=10, luego dos polos en s=100, dos ceros en s=1000 y un cero en s=10000. Así la función queda:

$$H(s) = \frac{10^{-6}(s+1)(\frac{1}{1000}+1)^2(\frac{s}{10^4}+1)}{(\frac{s}{10}+1)(\frac{s}{100}+1)^2} \tag{7}$$

iii) Dado que la función parte decayendo a 40dB por década, existen dos polos en s=0 ($\frac{1}{s^2}$). También se aprecia un par de ceros en s=1, y finalmente el peak existe debido a un par de polos complejos conjugados, cuyos valores σ y ω_0 se reemplazan simplemente en la fórmula vista en las diapositivas. Así:

$$H(s) = \frac{(s+1)^2}{s^2((\frac{s}{15})^2 + 2*\frac{0.01}{15}s + 1)} \tag{8}$$

Solución Problema 3

a) Primero obtenemos Vout a partir de Vx utilizando un divisor de voltaje:

$$V_{out} = \frac{V_x R_2}{R_2 + 1/sC_2} \tag{9}$$

Y calculamos V_x a partir de V_{in} al realizar el paralelo entre R2 con C2 y C1:

$$V_x = \frac{V_{in} * ((R_2 + \frac{1}{sC_2})//\frac{1}{sC_1})}{R_1 + ((R_2 + \frac{1}{sC_2})//\frac{1}{sC_1})} \tag{10}$$

Reemplazando V_x en la primera ecuación y despejando V_{in}/V_{out} tenemos:

$$F_1(s) = \frac{V_{in}}{V_{out}} = \frac{sC_2R_2}{s^2(R_1R_2C_1C_2) + s(R_1C_2 + R_1C_1 + R_2C_2) + 1} \tag{11}$$

b) Primero calculamos Vx a partir de Vin:

$$V_x(s) = F_x(s)\frac{V_{in}(\frac{1}{sC_1})}{R_1 + \frac{1}{sC_1}} = \frac{V_{in}}{sR_1C_1 + 1} \tag{12}$$

Y luego calculamos Vout a partir de aVx

$$V_{out} = \frac{\alpha V_x R_2}{R_2 + \frac{1}{sC_2}} \tag{13}$$

Reemplazando V_x en la última ecuación, despejando $\frac{V_{out}}{V_{in}}$ y simplificando tenemos finalmente:

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = F_2(s) = \frac{sR_2C_2}{s2(R_1R_2C_1C_2) + s(R_1C_1 + R_2C_2) + 1} \tag{14}$$

c) Claramente $F_1(s) \neq \alpha F_2(s)$ para cualquier constante α debido a que en el primer circuito el voltaje V_x depende de la carga que ve a la derecha, lo cual agrega el término C_2R_2 en el denominador de F_1

d) Reemplazando los valores en ambas funciones tenemos:

$$F_1(s) = \frac{0.002s}{s^2(8 * 10^{-5}) + s(0.044) + 1} \tag{15}$$

$$F_2(s) = \frac{0.002s}{s^2(8 * 10^{-5}) + s(0.042) + 1} \tag{16}$$

e)Aplicando el siguiente código en matlab obtenemos los diagramas para H1 y H2 mostrados en las figuras X1 y X2 respectivamente:

```
r1=20e3
r2=2e3
c1=2e-6
c2=1e-6
H = tf([r2*c2 0],[(c1*c2*r1*r2) (r1*c2 + r1*c1 + r2*c2) 1]);
H2= tf([r2*c2 0],[(r1*r2*c1*c2) (r2*c2 + r1*c1) 1])
bode(H)
bode(H2)
```

Figura 8: Código empleado en Matlab

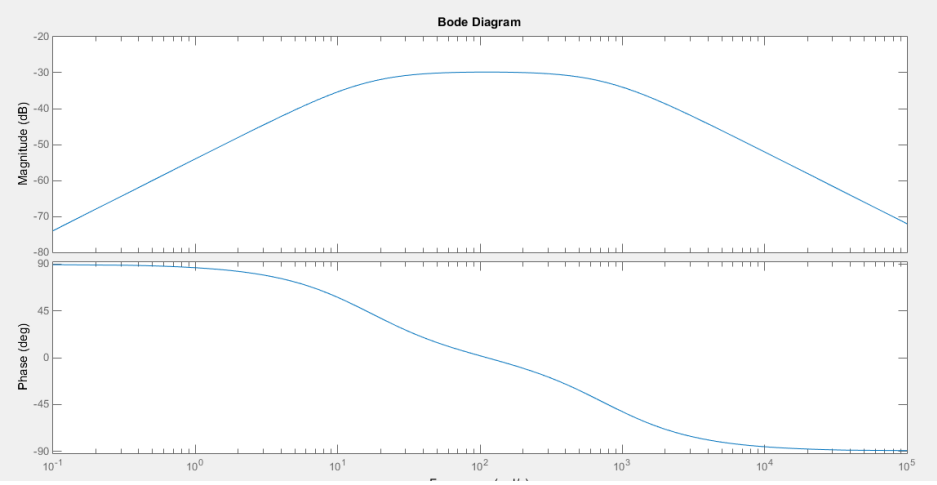


Figura 9: Diagrama de Bode para H1 en MATLAB

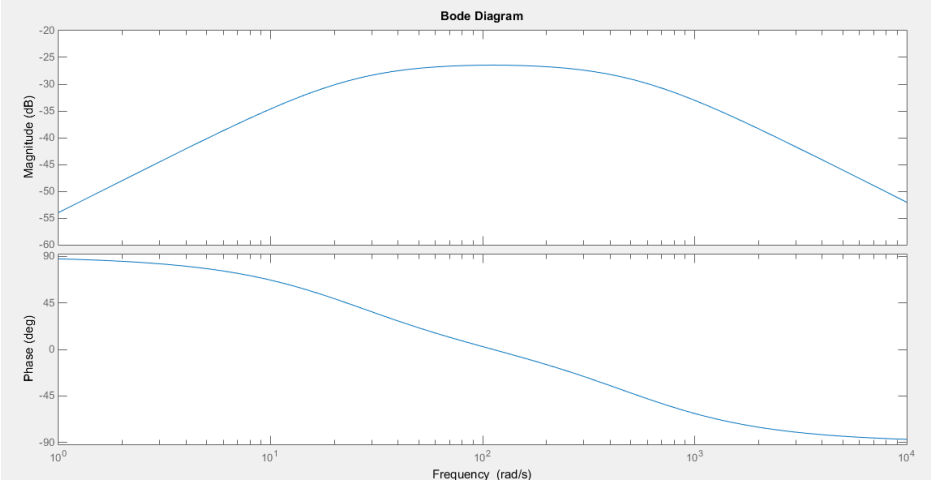


Figura 10: Diagrama de Bode para H2 en MATLAB

Podemos ver que las funciones corresponden a filtros pasabanda.
f) La configuración de los circuitos en LTSpice se muestra a continuación, donde se usó un opamp como buffer en vez de una fuente dependiente:

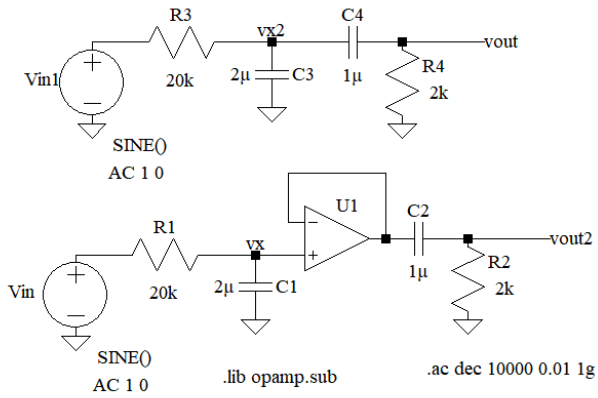


Figura 11: Simulación en LTSpice

Así, graficando Vout con Vx2 para H1, y Vout2 con vx para H2 tenemos:

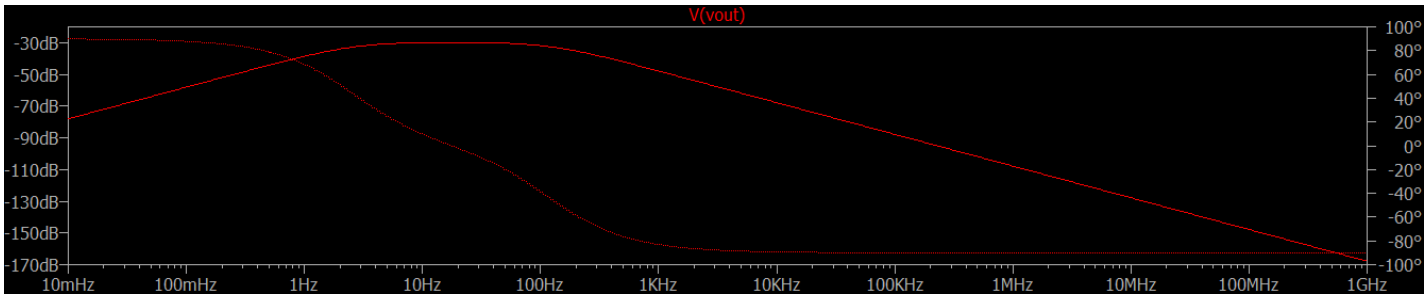


Figura 12: Diagrama de Bode para H1 en LTSpice

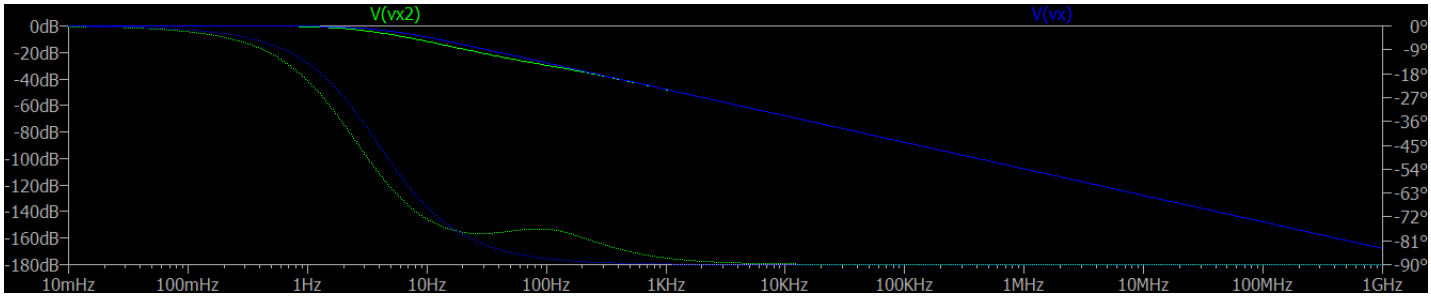


Figura 13: Diagrama de Bode para F_x en LTSpice

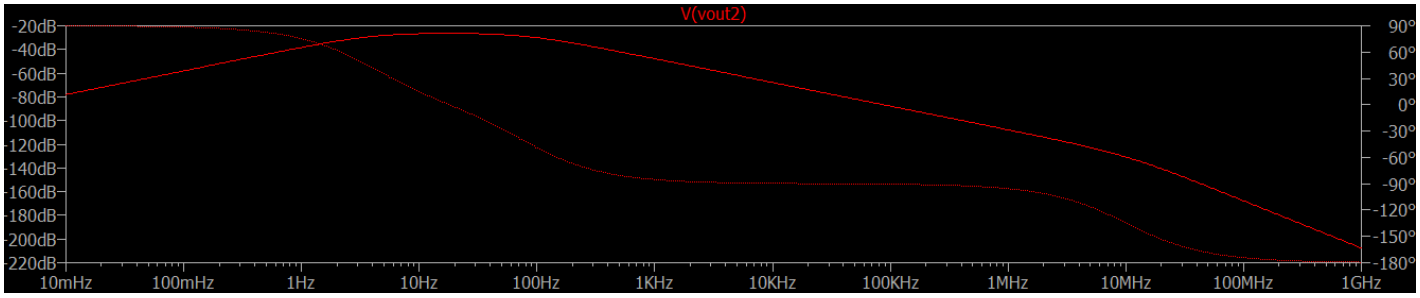


Figura 14: Diagrama de Bode para H2 en LTSpice

Donde en el gráfico de Vx se aprecia la distinción al usar un buffer o al no utilizarlo (graficar Vx2 no era necesario). Se observa que la diferencia entre LTSpice y MATLAB corresponde a que en el primero se grafica en frecuencias y el segundo en rad/s.