Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ingeniería Eléctrica
IEE2123 - Circuitos Eléctricos
Profesor Samuel Córdova
Segundo Semestre 2022

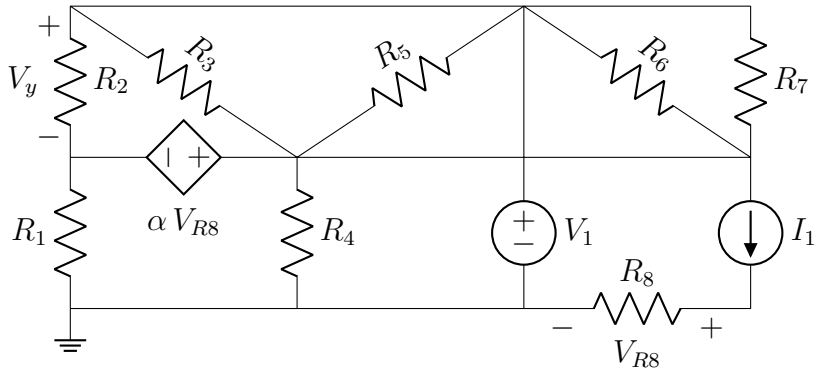
Examen

Instrucciones

- Poner nombre y número de alumno en cada hoja.
- Resolver cada Problema en un conjunto diferente de hojas.
- No se permite utilizar apuntes. Se permite el uso de calculadora científica (no progamable).
- Justifique adecuadamente todas sus respuestas.
- Solo se aceptarán preguntas realizadas directamente al profesor.
- Tiempo: dos horas

Problema 1 (25 puntos)

Considere el siguiente circuito:



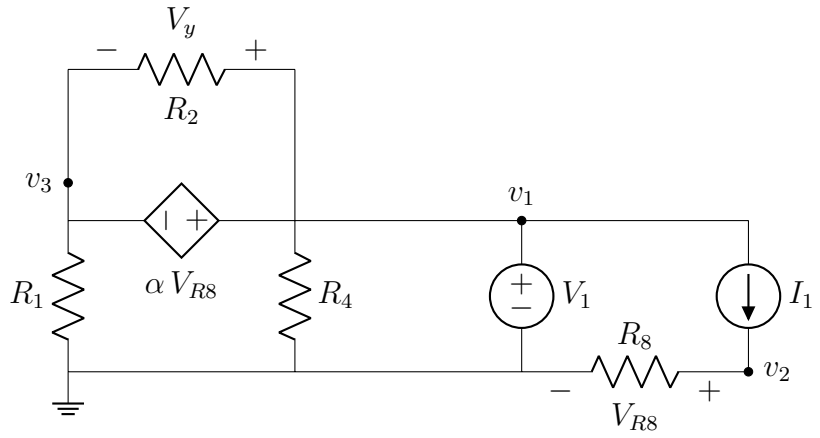
(a) (15 puntos) Identifique los nodos del circuito y obtenga sus voltajes correspondientes usando el Método de Nodos.

(b) (5 puntos) Explique como se podría utilizar el Teorema de Superposición para calcular V_y como función de las excitaciones del circuito. No tiene que resolverlo, simplemente explicarlo para este circuito en particular.

(c) (5 puntos) Discuta sobre las ventajas y desventajas de resolver un circuito por Método de Nodos/Mallas versus resolverlo por Teorema de Superposición.

Solución:

(a) Observamos que hay un cortocircuito entre los terminales de las resistores R_5, R_6 y R_7. De esta manera, se obtiene el siguiente circuito simplificado:



para el cual se identifican los nodos v_1, v_2 y v_3.

Aplicando el Método de Nodos, obtenemos las siguientes ecuaciones para los nodos v_1 y v_2 respectivamente:

$$v_1 = V_1 \tag{1a}$$

$$I_1 = \frac{v_2}{R_8} \tag{1b}$$

Además, observamos que debido a la fuente de voltaje dependiente αV_{R8}, pareciera ser necesario definir un supernodo entre v_3 y v_1, para el cual tenemos la siguiente relación:

$$v_1 - v_3 = \alpha V_{R8} = \alpha\, v_2$$

la cual usando (1) puede ser reescrita como:

$$V_1 - v_3 = \alpha I_1 R_8$$

resultando en:

$$v_3 = V_1 - \alpha I_1 R_8$$

haciendo innecesario definir KCL para el supernodo de v_3 y v_1.

OJO: Alternativamente, se podría haber definido KCL para todos los nodos y resolver el sistema resultante. Esta otra respuesta también es correcta, pero toma mas tiempo en resolver.

(b) Si queremos calcular el voltaje V_y por medio del Teorema de Superposición, debemos determinar la respuesta (de V_y) asociada a cada fuente independiente cuando el resto de las fuentes están apagadas. Es decir:

$$V_y = V_y|_{V_1=0} + V_y|_{I_1=0}$$

Lo anterior dará como resultado una expresión que posee la siguiente forma:

$$V_y = a \cdot I_1 + b \cdot V_1$$

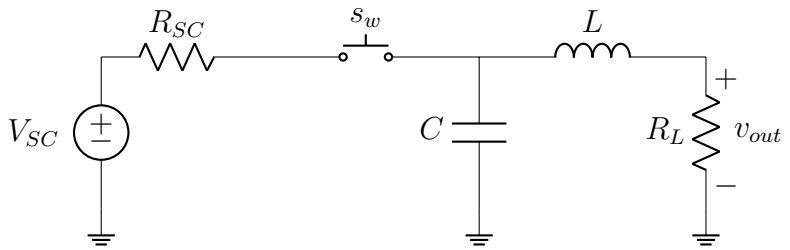
tal que $a, b \in \mathbb{R}$ son constantes.

(c) El Método de Nodos/Mallas tiene la principal ventaja de proveer un método sistemático y fácilmente replicable para la resolución de circuitos, la cual es la base para el desarrollo de cualquier software computacional (e.g., LTSpice). Sin embargo, el Método de Nodos/Mallas tiene la principal desventaja de que al ser sistemático, puede no explotar las propiedades específicas del circuito, las cuales podrían facilitar enormemente su resolución.

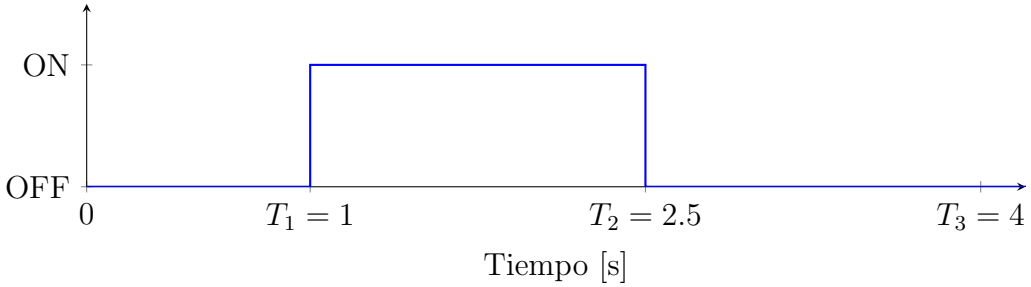
En contraste, el método de Superposición, puede explotar las propiedades espécificas del circuito y por tanto facilitar su resolución. Además, dado que cada fuente se va encendiendo por separado, este método es menos propenso a errores, dado que en vez de resolver un solo circuito complejo, se resuelven varios circuitos simples. La principal desventaja del método de Superposición es que al no ser sistemático, variará significativemente de circuito a circuito, por lo que no puede ser directamente implementado en software computacional.

Problema 2 (30 puntos)

Considere el siguiente circuito:



en donde s_w es un switch controlado de forma externa en base al siguiente perfil de operación:



(a) (20 puntos) Determine las ecuaciones diferenciales que caracterizan la respuesta $v_{out}(t)$ del circuito con el switch conectado (ON) y desconectado (OFF). Identifique el coeficiente de amortiguación ζ y frecuencia natural del sistema ω_0 del polinomio característico $r^2 + 2\zeta\omega_0 r + \omega_0^2 = 0$ en ambos casos.

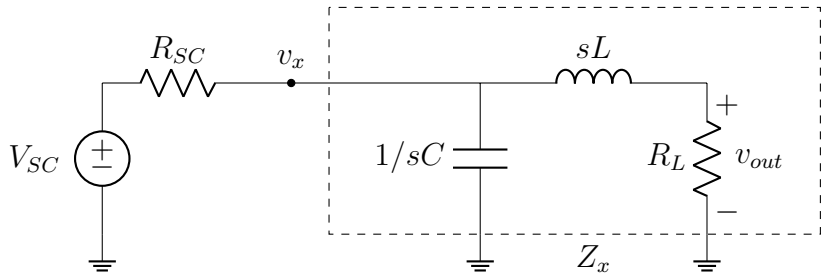
(b) (10 puntos) Basado en las expresiones obtenidas en el punto anterior, grafique $v_{out}(t)$ para $t = 0 \ldots T_3$ considerando que el switch s_w lleva un largo tiempo desconectado (OFF) y que los parámetros del circuito son los indicados a continuación:

$V_{SC} = 1\ V$	$C = 0.1\ F$	$R_L = 1\ \Omega$
$R_{SC} = 1\ \Omega$	$L = 0.1\ H$	

En el gráfico, destaque la forma del tipo de respuesta (e.g., sub o sobreamortiguada), y asíntotas.

Solución:

(a) Para el caso de switch ON tenemos el siguiente circuito en el dominio de Laplace:



en donde se define el nodo auxiiliar v_x e impedancia auxiliar Z_x, siendo esta última definida a continuación:

$$Z_x = \left(\frac{1}{sC}\right) \left\| \left(R_L + sL\right) = \left(sC + \frac{1}{R_L + sL}\right)^{-1} \right.$$
$$= \left(\frac{sCR_L + s^2LC + 1}{R_L + sL}\right)^{-1} = \frac{R_L + sL}{s^2LC + sCR_L + 1}$$

De esta forma, tenemos las siguientes relaciones entre V_{SC}, v_x y v_{out}, las cuales resultan de aplicar divisor de voltaje:

$$v_x = \frac{Z_x}{R_{SC} + Z_x} V_{SC}$$
$$v_{out} = \frac{R_L}{R_L + sL} v_x$$

Desarrollando ambas expresiones se tiene que:

$$v_{out} = \frac{R_L}{R_L + sL} \frac{Z_x}{R_{SC} + Z_x} V_{SC} = \frac{R_L}{R_L + sL} \frac{1}{(R_{SC}/Z_x) + 1} V_{SC}$$
$$= \frac{R_L}{R_L + sL} \left[R_{SC} \frac{(s^2LC + sCR_L + 1)}{R_L + sL} + 1\right]^{-1} V_{SC}$$
$$= \frac{R_L}{\cancel{R_L + sL}} \left[\frac{R_{SC}\left(s^2LC + sCR_L + 1\right) + R_L + sL}{\cancel{R_L + sL}}\right]^{-1} V_{SC}$$
$$= \frac{R_L}{s^2LCR_{SC} + s(CR_LR_{SC} + L) + R_{SC} + R_L} V_{SC}$$

Y reordenando:

$$\left[s^2 + s \frac{(CR_LR_{SC} + L)}{LCR_{SC}} \frac{(R_{SC} + R_L)}{LCR_{SC}}\right] v_{out} = \frac{R_L V_{SC}}{LCR_{SC}}$$

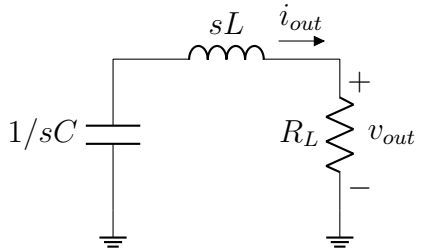
resultando en la siguiente ecuación diferencial para el caso del switch ON:

$$\frac{d^2v_{out}(t)}{dt^2} + \frac{dv_{out}(t)}{dt}\underbrace{\frac{(CR_LR_{SC}+L)}{LCR_{SC}}}_{2\zeta\omega_0} + \underbrace{\frac{(R_{SC}+R_L)}{LCR_{SC}}}_{\omega_0^2} = \frac{R_LV_{SC}}{LCR_{SC}}$$

donde la frecuencia natural del sistema ω_0^{ON} y el coeficiente de amortiguación ζ^{ON} son:

$$\omega_0^{ON} = \sqrt{\frac{(R_{SC}+R_L)}{LCR_{SC}}}$$
$$\zeta^{ON} = \frac{1}{2\omega_0}\frac{(CR_LR_{SC}+L)}{LCR_{SC}}$$

Por otro lado, para el caso del switch OFF tenemos el siguiente circuito en el dominio de Laplace:



en donde se define la corriente auxiliar $i_{out} = v_{out}/R_L$. Luego, por KVL tenemos:

$$i_{out}\left(R_L + sL + \frac{1}{sC}\right) = 0$$
$$\frac{v_{out}}{R_L}\left(R_L + sL + \frac{1}{sC}\right) = 0$$
$$v_{out}\left(1 + s\frac{L}{R_L} + \frac{1}{sCR_L}\right) = 0$$
$$v_{out}\left(sCR_L + s^2CL + 1\right) = 0$$
$$v_{out}\left(s^2 + s\frac{R_L}{L} + \frac{1}{CL}\right) = 0$$

resultando en la siguiente ecuación diferencial para el switch OFF:

$$\frac{d^2v_{out}(t)}{dt^2} + \frac{dv_{out}(t)}{dt}\underbrace{\frac{R_L}{L}}_{2\zeta\omega_0} + \underbrace{\frac{1}{CL}}_{\omega_0^2} = 0$$

donde la frecuencia natural del sistema ω_0^{OFF} y el coeficiente de amortiguación ζ^{OFF} son:

$$\omega_0^{OFF} = \sqrt{\frac{1}{CL}}$$
$$\zeta^{OFF} = \frac{1}{2\omega_0}\frac{R_L}{L}$$

(b) Para determinar el tipo de respuesta, es necesario calcular los coeficientes de amortiguacion ζ^{ON} y ζ^{OFF}, y ver si estos son mayores, iguales o menores a 1.

Usando los parámetros indicados en la tabla, se tiene que

$$\zeta^{ON} = \frac{1}{2}\frac{(CR_LR_{SC}+L)}{LCR_{SC}}\sqrt{\frac{LCR_{SC}}{(R_{SC}+R_L)}} = \frac{1}{2}\frac{0.2}{0.01}\sqrt{\frac{0.01}{2}} \approx 0.707$$

$$\zeta^{OFF} = \frac{1}{2}\frac{R_L}{L}\sqrt{CL} = \frac{1}{2}\frac{1}{0.1}\sqrt{0.01} = 0.5$$

por lo que tenemos que en ambos casos ON/OFF se tiene un coeficiente de amortiguación $\zeta < 1$, resultando en una respuesta subamortiguada de la forma:

$$v_{out} \approx e^{-\zeta\omega_0 t}\left[k_1\cos(\omega_d t) + k_2\sin(\omega_d t)\right]$$

con $\omega_d = \omega_0\sqrt{1-\zeta^2}$.

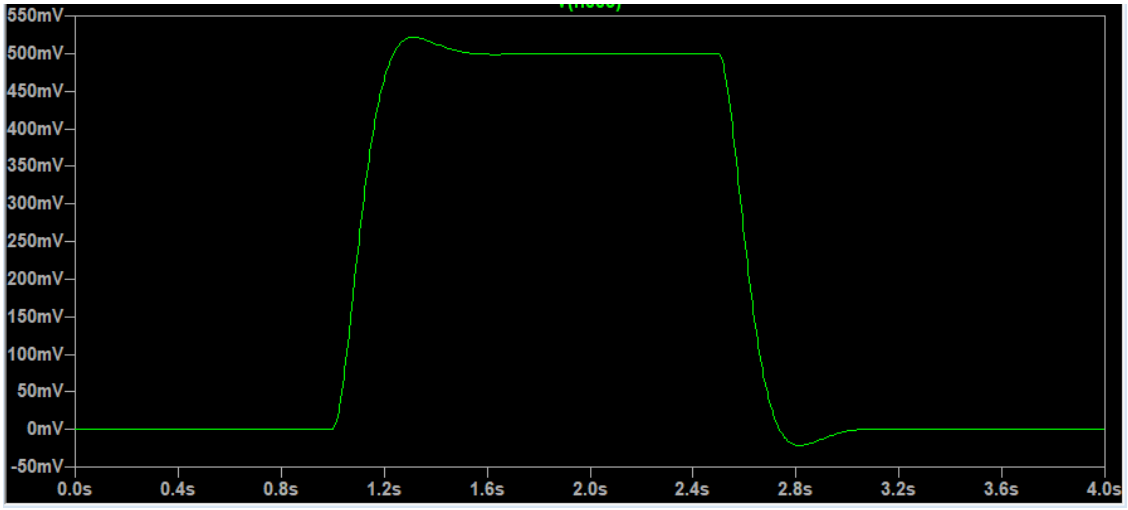
De la expresión anterior, cabe destacar que la constante de tiempo $\tau = 1/(\zeta\omega_0)$ de la función exponencial dictará que tan rápido decaerá la respuesta y se alcanzará régimen permanente. En particular para los casos de switch ON/OFF tenemos:

$$\tau^{ON} = \frac{1}{\zeta^{ON}\omega_0^{ON}} \approx 0.1$$

$$\tau^{OFF} = \frac{1}{\zeta^{ON}\omega_0^{ON}} \approx 0.2$$

estando ambas constantes de tiempo en segundos.

De esta forma, considerando que los estados de switch ON y OFF se mantienen por 1.5 segundos (mas de 7 veces mayor a τ^{ON} y a τ^{OFF}), se tendrá que $v_{out}(t)$ habrá alcanzado regímen permanente en $t = T_2$ y $t = T_4$, resultando en la siguiente figura:



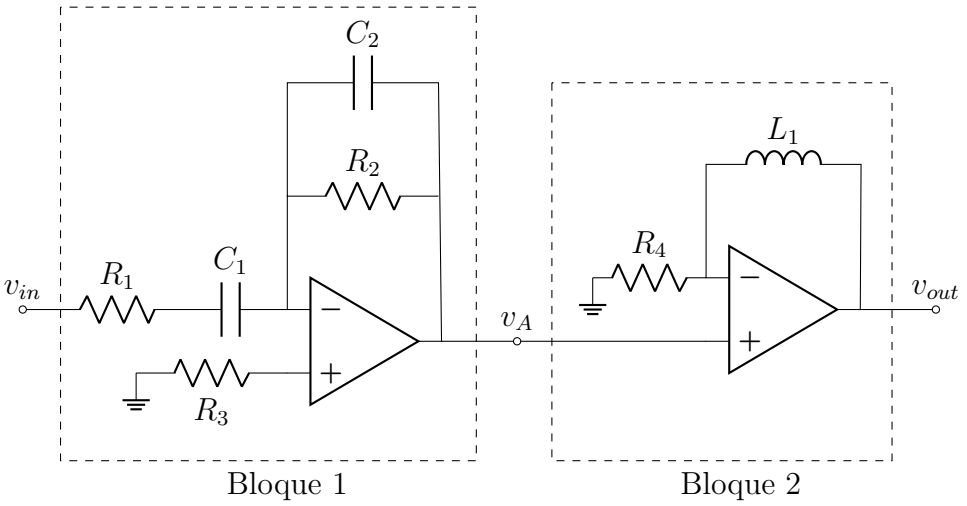
en donde los valores de régimen permanente (asíntotas) corresponden a:

$$v_{out}(T_2) \approx v_{out}^{ON}(\infty) = \frac{R_L}{R_{SC} + R_L} V_{SC} = 0.5\ V$$
$$v_{out}(T_4) \approx v_{out}^{OFF}(\infty) = 0\ V$$

OJO: En este itém no se pide resolver el gráfico explicitamente. Lo importante es mostrar la respuesta subamortiguada, presentar los valores de régimen permante (asíntotas), e indicar que dichos valores son alcanzados debido a los valores de las constantes de tiempo τ en la función exponencial. Todo lo anterior siendo debidamente justificado.

Problema 3 (35 puntos)

Considere el siguiente circuito:



(a) (20 puntos) Determine las funciones de transferencia de $H_1(s) = v_A/v_{in}$, $H_2(s) = v_{out}/v_A$ y $H_0(s) = v_{out}/v_{in}$.

(b) (10 puntos) Dibuje los diagramas de Bode de **amplitud** para $H_1(j\omega)$, $H_2(j\omega)$ y $H_0(j\omega)$ considerando los siguientes parámetros:

$R_1 = 10\ \Omega$	$C_1 = 1\ F$	$R_2 = 1\ \Omega$	$C_2 = 0.1\ F$
$R_3 = 10\ \Omega$	$R_4 = 100\ \Omega$	$L_1 = 0.1\ H$	

Comente sobre los roles que cumplen los Bloques 1 y 2 para el procesamiento de la señal de entrada v_{in}.

(c) (5 puntos) Considere que ahora se conecta una fuente de alimentación AC al circuito, resultando en $v_{in}(t) = \cos(2\pi f \cdot t)$ con $f = 160$ mHz. Basado en los diagramas de Bode obtenidos en (b), dibuje la forma de la onda para $v_{out}(t)$ haciendo énfasis en el **cambio de magnitud** respecto a $v_{in}(t)$.

Solución:

(a) Primero calculamos $H_1(s) = v_A/v_{in}$, para el cual tenemos la siguiente expresión en el dominio de Laplace:

$$\frac{v_{in} - 0}{R_1 + 1/sC_1} = \frac{0 - v_A}{R_2||(1/sC_2)}$$

resultando en:

$$\begin{aligned} H_1(s) = \frac{v_A}{v_{in}} &= -\frac{R_2||(1/sC_2)}{R_1 + 1/sC_1} = -\frac{(1/R_2 + sC_2)^{-1}}{(sC_1R_1 + 1)/sC_1} \\ &= -\frac{R_2/(sC_2R_2 + 1)}{(sC_1R_1 + 1)/sC_1} = -\frac{sC_1R_2}{(sC_1R_1 + 1)(sC_2R_2 + 1)} \end{aligned}$$

Luego, calculamos $H_2(s) = v_{out}/v_A$, para el cual tenemos la siguiente expresión en el dominio de Laplace:

$$\frac{0 - v_A}{R_4} = \frac{v_A - v_{out}}{sL_1}$$

resultando en:

$$H_2(s) = \frac{v_{out}}{v_A} = 1 + \frac{sL_1}{R_4}$$

Finalmente, calculamos $H_0(s) = v_{out}/v_{in}$, para el cual tenemos las siguientes expresiones en el dominio de Laplace:

$$\begin{gathered} \frac{v_{in} - 0}{R_1 + 1/sC_1} = \frac{0 - v_A}{R_2||(1/sC_2)} \\ \frac{0 - v_A}{R_4} = \frac{v_A - v_{out}}{sL_1} \end{gathered}$$

las cuales son idénticas a las utilizadas para $H_1(s)$ y $H_2(s)$, es decir en este caso se cumple que:

$$H_0(s) = H_1(s) \cdot H_2(s) = -\frac{sC_1R_2}{(sC_1R_1 + 1)(sC_2R_2 + 1)} \cdot \left(1 + \frac{sL_1}{R_4}\right)$$

lo cual resulta de v_A estando conectado directamente al terminal (+) del OpAmp (impedancia de entrada infinita).

(b) Primero, observamos que $H_1(s)$ puede ser escrita como la combinación de un filtro pasa-altos y pasa-bajos:

$$H_1(s) = G_1 \underbrace{\frac{s/\omega_{c1}}{(1+s/\omega_{c1})}}_{\text{pasa-altos}} \underbrace{\frac{1}{(1+s/\omega_{c2})}}_{\text{pasa-bajos}}$$

$$G_1 = -\frac{R_2}{R_1}, \qquad \omega_{c1} = \frac{1}{C_1 R_1}, \qquad \omega_{c2} = \frac{1}{C_2 R_2}$$

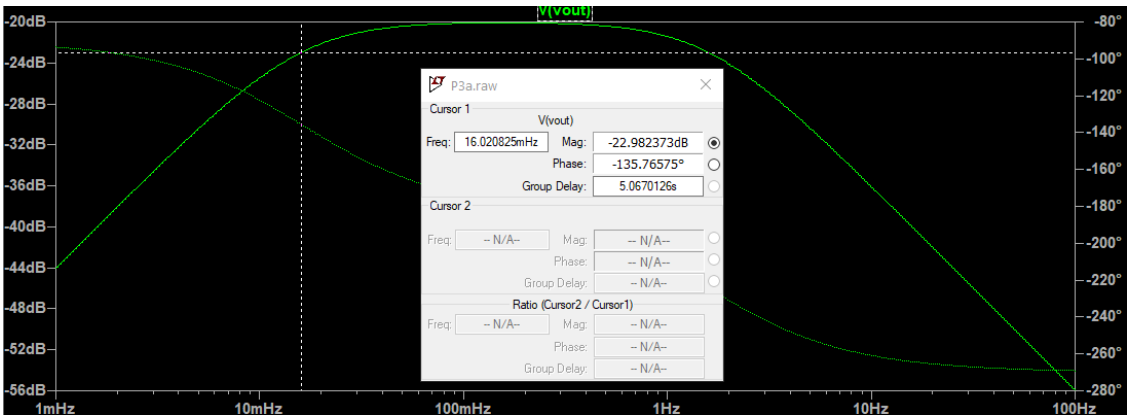
resultando en un filtro pasa-banda con ganancia G_1 y frecuencias de corte ω_{c1} y ω_{c2}. Reemplazando los valores indicandos en la tabla, se tienen los siguientes parámetros del filtro pasa-banda:

$$G_1 = 20\log_{10}\left(\left|-\frac{1}{10}\right|\right) = -20 \text{ dB}$$

$$\omega_{c1} = \frac{1}{10} = 0.1 \text{ rad/s} \approx 16 \text{ mHz}$$

$$\omega_{c1} = \frac{1}{0.1} = 10 \text{ rad/s} \approx 1.6 \text{ Hz}$$

resultando en el siguiente diagrama de Bode para $|H_1(j\omega)|$:

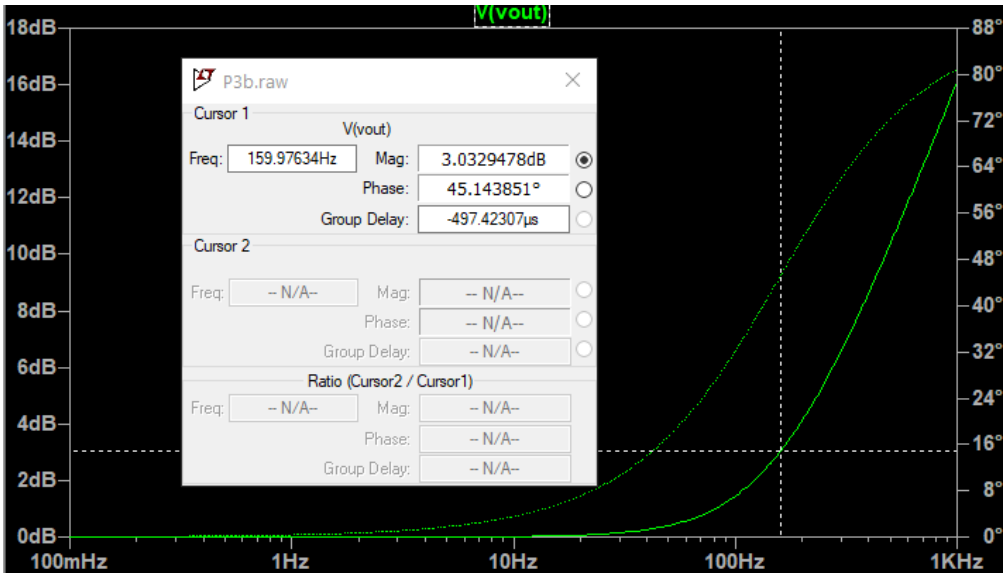


en donde se puede apreciar que se tienen asintotas con pendientes de 20 dB/dec, y ganancias de -23 dB en las frecuencias de corte.

Por otro lado, es posible identificar que $H_2(s)$ corresponde al caso de ganancia unitario con un cero ubicado en:

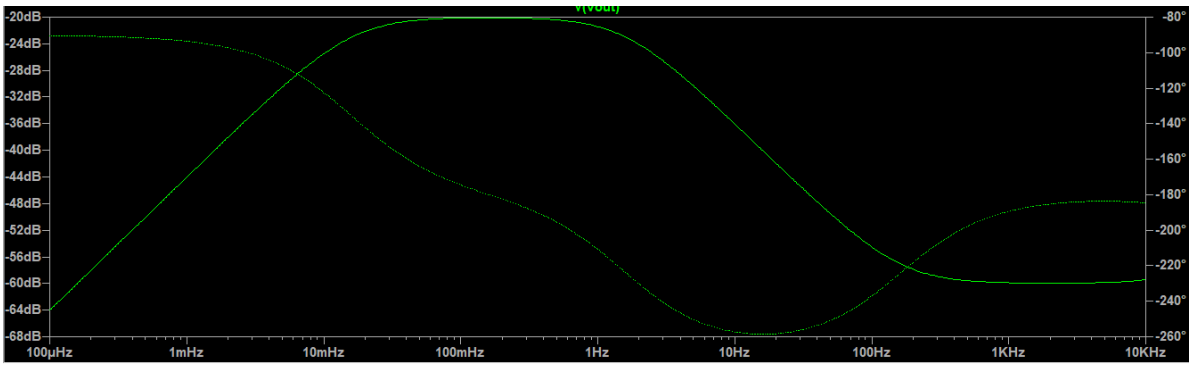
$$z = \frac{R_4}{L_1} = \frac{100}{0.1} = 1000 \text{ rad/s} = 160\text{Hz}$$

resultando en el siguiente diagrama de Bode para $|H_2(j\omega)|$:



en donde se tiene una asintota con pendiente de 20 dB/dec, y ganancias de +3 dB en el cero.

Finalmente, para el diagrama de Bode de $|H_0(j\omega)|$, basta aprovechar que $H_0(s) = H_1(s) \cdot H_2(s)$, lo cual permite sumar los diagramas de bode $|H_1(j\omega)|$ y $|H_2(j\omega)|$ previamente calculados, resultando en:



Respecto a los roles que cumplen los Bloques 1 y 2 para el procesamiento de v_{in}:

- Bloque 1: Filtro pasa-banda que filtra frequencias fuera del rango establecido por ω_{c1} y ω_{c1}.
- Bloque 2: Agrega un cero para evitar que las frequencias superiores a z sean atenuadas por más de 60 dB.

(c) Observamos que para frequencia de 160 mHz, se está ubicado en la parte superior del diagrama de bode de $|H_0(j\omega)|$, para el cual se tiene una ganancia de -20 dB. De esta forma tenemos que:

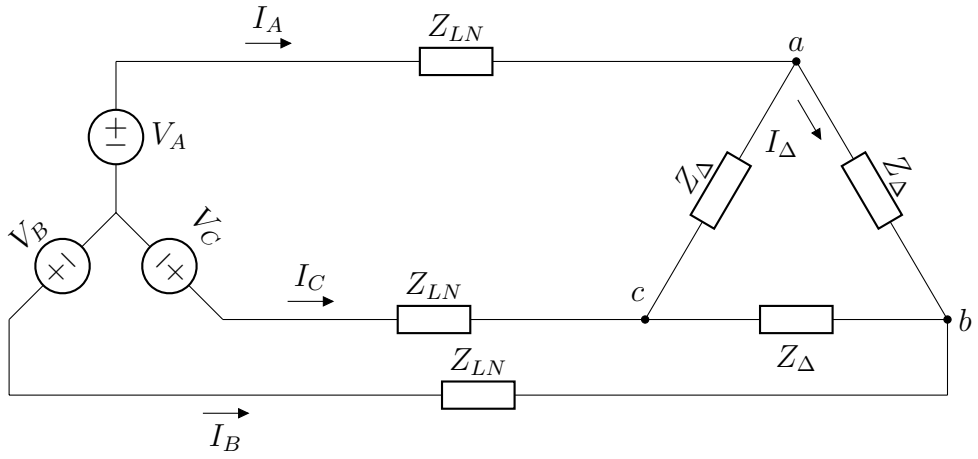
$$\frac{\hat{V}_{out}}{\hat{V}_{in}} = 10^{-20/20} = 0.1$$

en donde $\hat{V}_{out}$ y $\hat{V}_{in}$ son usados para indicar los valores peak de $v_{out}(t)$ y $v_{in}(t)$, respectivamente. De esta forma, considerando que $\hat{V}_{in} = 1$, tenemos que $\hat{V}_{out} = 0.1$ y por tanto $v_{out}(t)$ corresponderá a una onda sinusoidal de amplitud 0.1 y de frequencia 160 mHz.

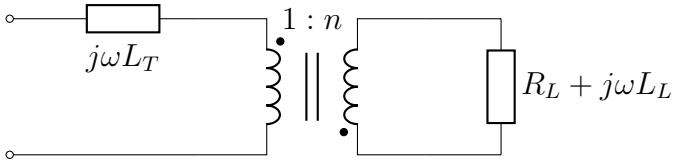
OJO: Tanto en (b) como en (c) solo se pide calcular las amplitudes (NO los desfases).

Problema 4 (30 puntos)

Considere el siguiente sistema trifásico operando a una frequencia de $\omega = 2\pi\, 50$ rad/s:



en donde $Z_{LN} = R_{LN} + j\omega L_{LN}$, y Z_Δ corresponde a la siguiente carga:



Y cuyos parámetros son especificados en la siguiente tabla:

$V_A = 220\angle 50°$ Vrms	$V_B = 220\angle -70°$ Vrms	$V_C = 220\angle 170°$ Vrms	
$R_{LN} = 0.01\ \Omega$	$L_{LN} = 0.1\ H$		
$L_T = 0.3\ H$	$R_L = 3\ \Omega$	$L_L = 30\ H$	$n = 0.1$

(a) (15 puntos) Calcule las corrientes de línea I_A, I_B y I_C. Indique si dichas corrientes están balanceadas o no, justificando su elección.

(b) (10 puntos) Calcule la corriente I_Δ que pasa a través de la carga Z_Δ, e indique la potencia activa, reactiva y aparente consumida por dicha carga.

(c) (5 puntos) Considere que en los terminales de carga "a" y "c" ocurre un cortocircuito. Explique como el circuito se vería afectado de forma general. Además, explique como resolvería el circuito en este nuevo contexto.

Solución:

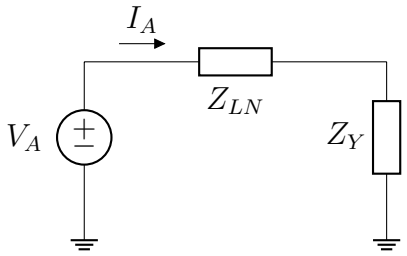
(a) Primero procedemos a calcular la carga Z_Δ, la cual puede ser obtenida usando el ratio n del transformador:

$$\begin{aligned} Z_\Delta &= j\omega L_T + \left(\frac{1}{-n}\right)^2 (R_L + j\omega L_L) \\ &= \frac{1}{n^2} R_L + j\omega \left(L_T + \frac{1}{n^2} L_L\right) \end{aligned}$$

Además, podemos aplicar conversión delta a estrella para las cargas, en donde la impedancia equivalente en conexión estrella corresponde a:

$$\begin{aligned} Z_Y = \frac{1}{3} Z_\Delta &= \frac{R_L/n^2}{3} + j\omega \frac{(L_T + L_L/n^2)}{3} \\ &= \frac{3/(0.1^2)}{3} + j\omega \frac{0.3 + 30/(0.1^2)}{3} = 100 + j\omega\, 1000.1 \end{aligned}$$

Luego, podemos aprovechar el hecho de que tanto la fuentes de voltaje, como impedancias de línea y carga están balanceadas, resultanto en un sistema trifásico balanceado. De esta forma, podemos enfocarnos en resolver el circuito de la fase "a" indicado a continuación:



para el cual la corriente de línea puede ser calculada como:

$$\begin{aligned} I_A &= \frac{V_A}{Z_{LN} + Z_Y} = \frac{220\angle 50^\circ}{(0.01 + j\omega\, 0.1) + (100 + j\omega\, 1000.1)} \\ &= \frac{220\angle 50^\circ}{100.01 + j\, 2\pi 50 \cdot 1000.2} = \frac{220\angle 50^\circ}{100.01 + j\,(3.142 \cdot 10^5)} \approx \frac{220\angle 50^\circ}{3.142 \cdot 10^5 \angle 89.982^\circ} \\ &\approx 70.019 \cdot 10^{-5} \angle -39.982^\circ \text{ Arms} \end{aligned}$$

Luego, como el sistema balanceado, podemos calcular directamente I_B e I_C añadiendo desfases de -120° y $+120^\circ$ respectivamente:

$$\begin{aligned} I_A &= 70.019 \cdot 10^{-5} \angle -39.982^\circ \text{ Arms} \\ I_B &= 70.019 \cdot 10^{-5} \angle -159.982^\circ \text{ Arms} \\ I_C &= 70.019 \cdot 10^{-5} \angle\, 80.018^\circ \text{ Arms} \end{aligned}$$

Es importante destacar que dichas corrientes están balanceadas, puesto que tanto la fuentes de voltaje, como impedancias de línea y carga están balanceadas, i.e. se tiene un sistema balanceado.

OJO: Para esta pregunta se debe utilizar notación científica con dos o tres cifras significativas para evitar obtener valores iguales a cero (e.g., para $|I_A|$). De todas maneras, respuestas que hayan aproximado estos valores a cero, pero que hayan presentado el desarrollo adecuado y calculado los angulos/desfases bien, también se considerarán como correctas.

(b) La corriente I_Δ puede ser calculada a partir de la corriente I_A, usando la siguiente relación:

$$\begin{aligned} I_\Delta = I_{ab} &= I_A \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \angle 30^\circ\right) \\ &= \left(70.019 \cdot 10^{-5} \angle -39.982^\circ\right) \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \angle 30^\circ\right) \\ &\approx 40.426 \cdot 10^{-5} \angle -9.982^\circ \text{Arms} \end{aligned}$$

Luego, la potencia compleja consumida por la carga Z_Δ corresponde a:

$$\begin{aligned} S = V_{ab}\, I_\Delta^* &= |I_\Delta|^2\, Z_\Delta = |I_\Delta|^2 \cdot 3 \cdot Z_Y \\ &= \left(40.426 \cdot 10^{-5}\right)^2 \cdot 3 \cdot (100 + j\, 2\pi \cdot 50 \cdot 1000.1) \\ &\approx 4.903 \cdot 10^{-5} + j\ 0.154 \end{aligned}$$

en donde $V_{ab} = I_\Delta\, Z_\Delta$ fue utilizado. De esta forma, la potencia activa P, reactiva Q y aparente $|S|$ corresponden a:

$$\begin{aligned} P &= 4.903 \cdot 10^{-5} \text{ W} \\ Q &= 0.154 \text{ VAr} \\ |S| &= \sqrt{(4.903 \cdot 10^{-5})^2 + (0.154)^2} \approx 0.154 \text{ VA} \end{aligned}$$

(c) En dicho caso las cargas del sistema ya no estarían balanceadas, por lo que el sistema pasaría a ser desbalanceado, incluidas sus corrientes. Para resolver el nuevo sistema desbalanceado, es necesario resolver las mallas de la fase "a", "b" y "c" en conjunto, para el cual es posible usar técnicas como el Método de Nodos o Teorema de Superposición.