Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ingeniería Eléctrica
IEE2123 - Circuitos Eléctricos

Tarea 7

Circuitos con transformadores monofásicos ideales y Sistemas trifásicos balanceados.

2º semestre 2022 - Profesor Samuel Cordova

Ayudante Ignacio Barrientos Martínez

- La tarea debe ser subida en formato .pdf a Canvas, junto a los archivos adjuntos necesarios en un formato .rar o .zip en caso de que aplique.
- No se aceptan fotografías de tareas escritas a mano. Solo serán revisadas tareas escritas en editor de texto (imágenes, diagramas, esquemáticos, etc, podrán ser hechos a mano).
- Existirá un bono de +0.5 pts. para las tareas escritas en LaTeX.

1. Problema 1

Considerando el circuito con transformadores monofásicos ideales de la Figura 1, obtenga el valor del voltaje V (ver nodo entre R_3 y Z_{L_1}).

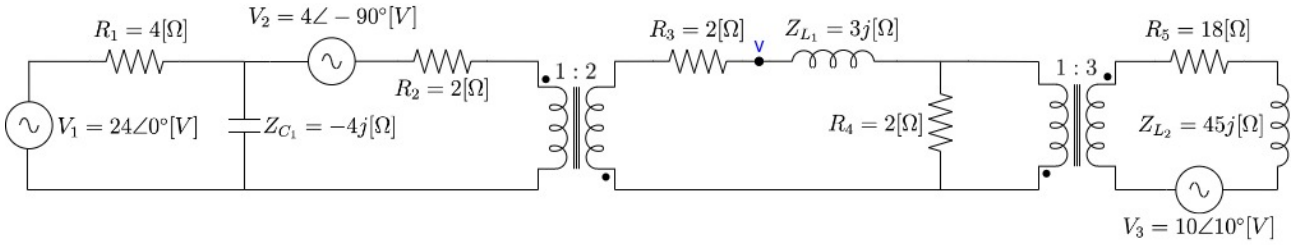


Figura 1: Circuito con transformadores monofásicos ideales y múltiple excitación sinusoidal.

1.1. Solución

Para poder encontrar el voltaje V pedido, se buscará reflejar el circuito completo en la malla donde se encuentra aquel voltaje, es decir, para el primer transformador (de relación $1:2$) se reflejará en su secundario, mientras que para el segundo (de relación $1:3$) se reflejará en el primario. Lo anterior, dado que para poder calcular la variable pedida, es necesario poder condensar todas las magnitudes del circuito, de ambos lados de cada uno de los transformadores, a una topología en la que se puedan implementar las técnicas de resolución de circuitos vistas a lo largo del curso, por lo que una usual estrategia para llevar a cabo aquello es reflejar los parámetros del circuito a una sola sección de este. Debido a lo anterior, es que se consideró que lo más idóneo era reflejar a la sección central del circuito, dado que en aquella malla se encontraba la variable a calcular.

Por otro lado, cabe destacar que el circuito de igual manera podría haber sido resuelto reflejando todo al primario del primer transformador (de relación $1:2$) o al secundario del segundo transformador (de relación $1:3$), pero se hubiesen requerido más cálculos, debido a que, por ejemplo para poder reflejar al primario del primer transformador, las magnitudes del segundo transformador tendrían que reflejarse, en primero lugar, al primario de este mismo transformador y luego, reflejar toda la malla central al primario del primer transformador, lo cual hubiese sido notablemente más complejo.

Entonces, de acuerdo a lo planteado anteriormente, para el primer transformador, se calculará el circuito equivalente Thevenin visto desde las terminales del primario, es decir, el equivalente del siguiente circuito:

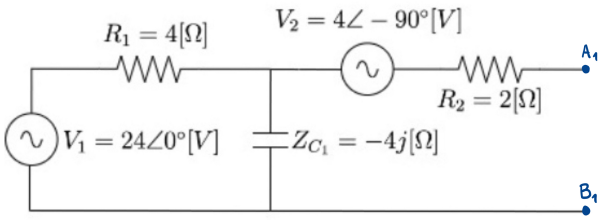


Figura 2: Circuito del lado primario del primer transformador.

Luego, para el cálculo de la impedancia Thevenin, se apagan las fuentes y queda el siguiente circuito:

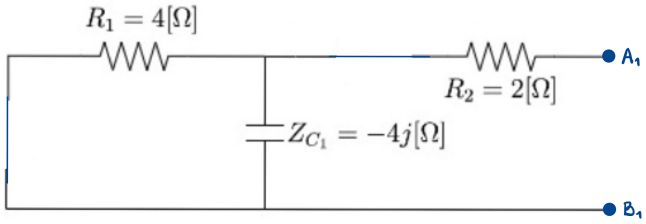


Figura 3: Circuito para obtener la impedancia Thevenin.

Por lo que la impedancia vista desde las terminales A_1 y B_1 es la siguiente:

$$Z_{TH} = R_1 \parallel Z_{C_1} + R_2 = 4 - 2j[\Omega] \tag{1}$$

Por otro lado, para el voltaje Thevenin, se calcula el voltaje de circuito abierto de las terminales A_1 y B_1, en el siguiente circuito:

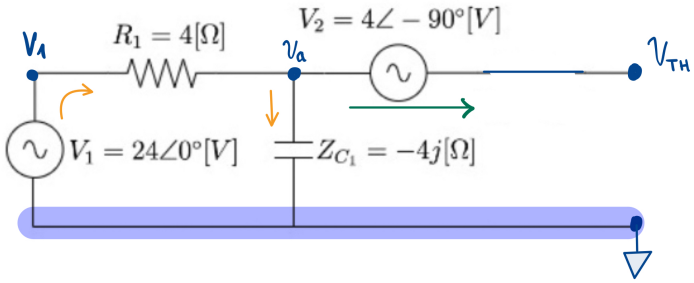


Figura 4: Circuito para obtener el voltaje Thevenin.

Entonces, del circuito se puede desprender el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\frac{V_1 - V_a}{R_1} - \frac{V_a}{Z_{C_1}} = 0 \tag{2}$$

$$V_2 = V_{TH} - V_a \tag{3}$$

De lo cual resulta que:

$$V_{TH} = 20\angle -53{,}12°[V] \tag{4}$$

Por otro lado, se calcula la impedancia equivalente de la sección del secundario del segundo transformador, de lo que se obtiene:

$$Z_{eq} = R_5 + Z_{L_2} = 18 + 45j[\Omega] \tag{5}$$

Finamente, queda el siguiente circuito:

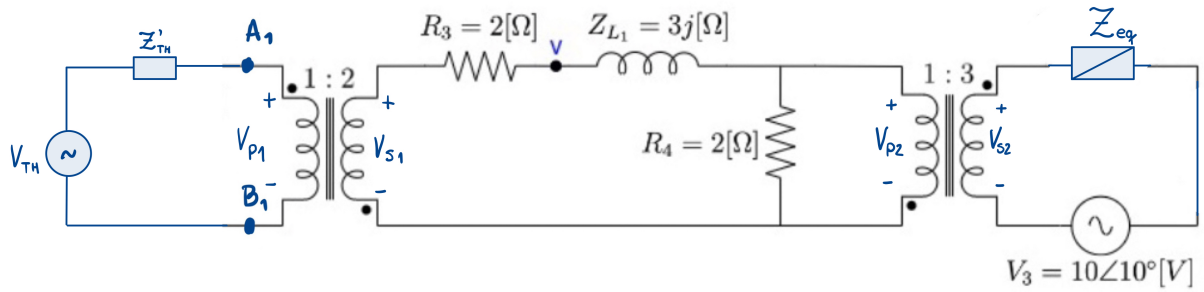


Figura 5: Circuito equivalente de las relaciones anteriores.

Ahora, debido a la polaridad de los puntos, que en ambos transformadores es contraria a la la polaridad de uno de los voltajes de referencia, las razones de transformación son las siguientes:

$$a = \frac{N_2}{N_1} = -\frac{2}{1} = -2 \tag{6}$$

$$b = \frac{N_2}{N_1} = -\frac{3}{1} = -3 \tag{7}$$

Entonces, las expresiones que resultan para reflejar en el secundario del primer transformador y en el primario del segundo transformador, son las siguientes:

$$\frac{Z'_{TH}}{Z_{TH}} = a^2 = 4 \tag{8}$$

$$\frac{V'_{TH}}{V_{TH}} = a = -2 \tag{9}$$

$$\frac{Z_{eq}}{Z'_{eq}} = b^2 = 9 \tag{10}$$

$$\frac{V_3}{V'_3} = b = -3 \tag{11}$$

Donde los parámetros X' son las magnitudes resultante de reflejar al lado deseado.

De lo anterior, resulta lo siguiente:

$$Z'_{TH} = a^2 \cdot Z_{TH} = 4 \cdot (4 - 2j)[\Omega] = 16 - 8j[\Omega] \tag{12}$$

$$V'_{TH} = a \cdot V_{TH} = -2 \cdot (20\angle -53{,}12°[V]) = 40\angle 126{,}87°[V] \tag{13}$$

$$Z'_{eq} = \frac{Z_{eq}}{b^2} = \frac{18 + 45j[\Omega]}{9} = 2 + 5j[\Omega] \tag{14}$$

$$V'_3 = \frac{V_3}{b} = \frac{10\angle 10°[V]}{-3} = 3{,}33\angle -170°[V] \tag{15}$$

Por lo que queda el siguiente circuito reflejado:

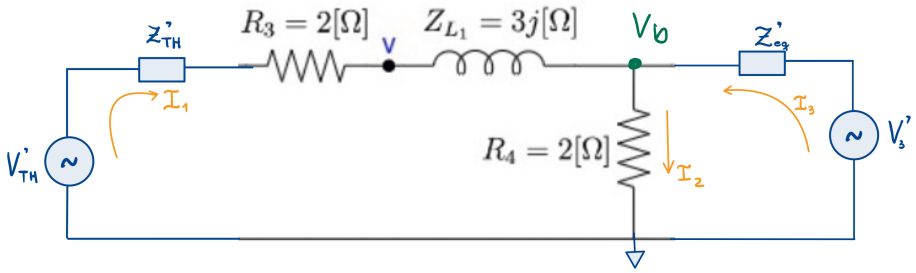


Figura 6: Circuito equivalente, reflejado en la malla central.

Finalmente, se calcula la $L.C.K.$ en el nodo del voltaje V_b y se analiza el voltaje de la impedancia Z_{L_1}, de lo cual resulta el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\frac{V'_{TH} - V_b}{Z'_{TH} + R_3 + Z_{L_1}} - \frac{V_b}{R_4} + \frac{V'_3 - V_b}{Z'_{eq}} = 0 \tag{16}$$

$$V - V_b = I_1 \cdot Z_{L_1} \tag{17}$$

De lo cual resulta que el voltaje pedido es el siguiente:

$$V = 7{,}099\angle - 161{,}89°[V] \tag{18}$$

2. Problema 2

Considerando un circuito trifásico balanceado con las siguientes características:

- Secuencia positiva $-abc-$.
- Conexión entre alimentación y cargas $Y - \Delta$.
- El voltaje fase-neutro de la fase c es $V_c = 20\angle - 90°[V]$.
- La impedancia de linea es $Z_{\phi_i} = 1 + 3j[\Omega]$, con $i = \{a, b, c\}$.
- La impedancia de carga es $Z^{\Delta}_{L_j} = 117 - 99j[\Omega]$, con $j = \{ab, bc, ca\}$.

Realice lo siguiente:

1. Dibuje el circuito trifásico completo original y luego el equivalente de una fase.
2. Realice el diagrama fasorial de corrientes y calcule la corriente de la fase a, es decir I_a.
3. Realice el diagrama fasorial de voltajes y calcule el voltaje de la carga en delta, de las fases ab, es decir $V_{ab}^{Z_\Delta}$.

2.1. Solución

De acuerdo a las especificaciones del enunciado, el circuito completo corresponde al siguiente:

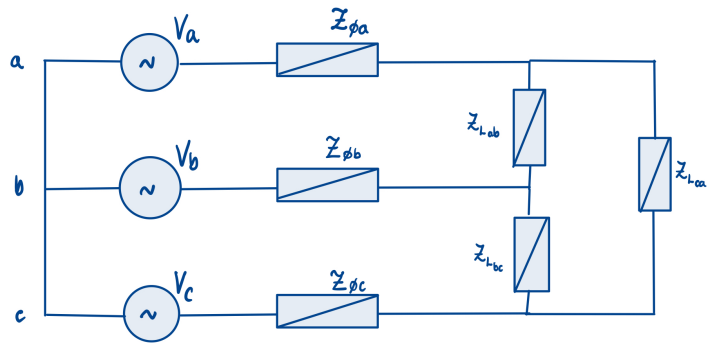


Figura 7: Circuito trifásico de conexión $Y - D$.

Además, considerando que todas las impedancias de linea tienen el mismo valor, al igual que las impedancias de la carga, se obtiene lo siguiente:

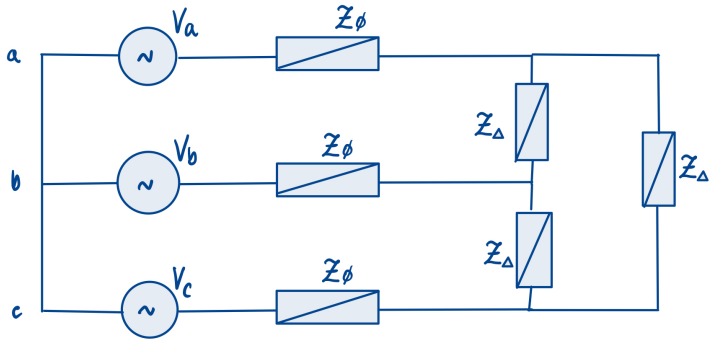


Figura 8: Circuito trifásico de conexión $Y - D$ con cargas de linea y carga de igual magnitud.

Luego, considerando la ecuación que describe la relación entre las impedancias de estrella y delta, se reduce a $Z_Y = \frac{Z_\Delta}{3}$, cuando las impedancias son iguales, el circuito queda como se muestra a continuación:

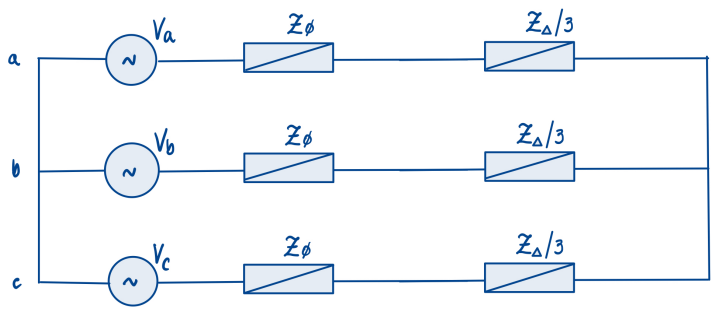


Figura 9: Circuito trifásico de conexión $Y - Y$.

Finalmente, el circuito equivalente de la fase c queda como se muestra a continuación:

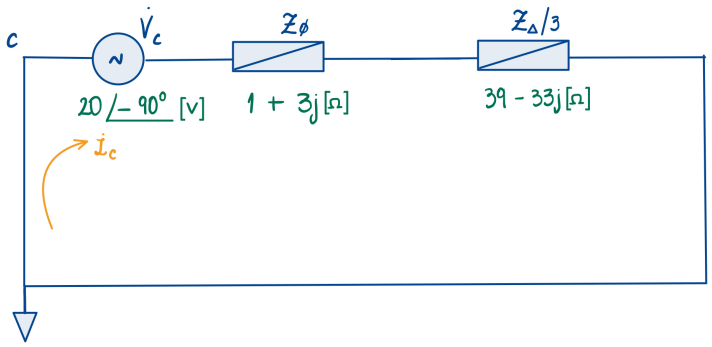


Figura 10: Circuito equivalente de la fase c.

Por otro lado, tomando en consideración el circuito anterior, es posible notar que la corriente I_c se puede calcular como se muestra a continuación:

$$I_c = \frac{V_c}{Z_\phi + \frac{Z_\Delta}{3}} = \frac{20\angle -90°}{1 + 3j + 39 - 33j}[A] \tag{19}$$

Por lo que, I_c resulta en lo siguiente:

$$I_c = 0{,}4\angle -53{,}13°[A] \tag{20}$$

A partir de este resultado, tomando en consideración el desfase relativo entre las corrientes de 120°, que es un sistema balanceado y con secuencia positiva, se obtiene que:

$$I_a = 0{,}4\angle -173{,}13°[A] \tag{21}$$

$$I_b = 0{,}4\angle 66{,}87°[A] \tag{22}$$

Lo cual permite plantear el siguiente diagrama fasorial de corrientes:

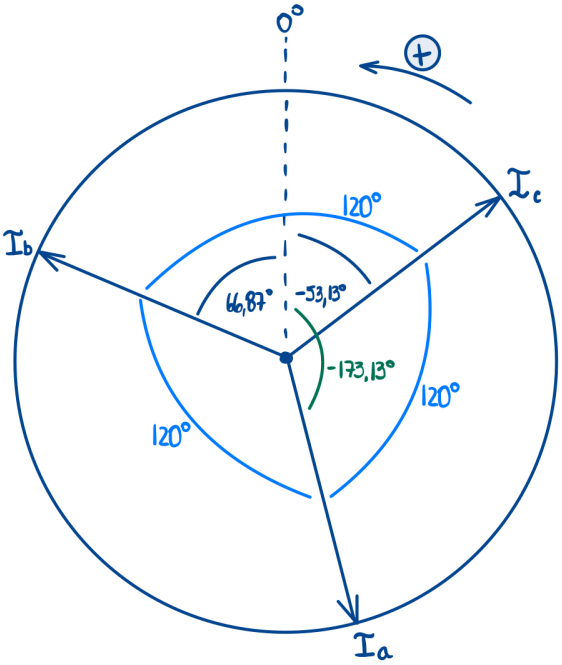


Figura 11: Diagrama fasorial de las corrientes.

Por otro lado, a partir del voltaje de la fase c, considerando secuencia positiva y una fuente trifásica simétrica, se tiene lo siguiente:

$$V_a = 20\angle 150°[V] \tag{23}$$

$$V_b = 20\angle 30°[V] \tag{24}$$

De lo cual se puede plantear el siguiente diagrama fasorial:

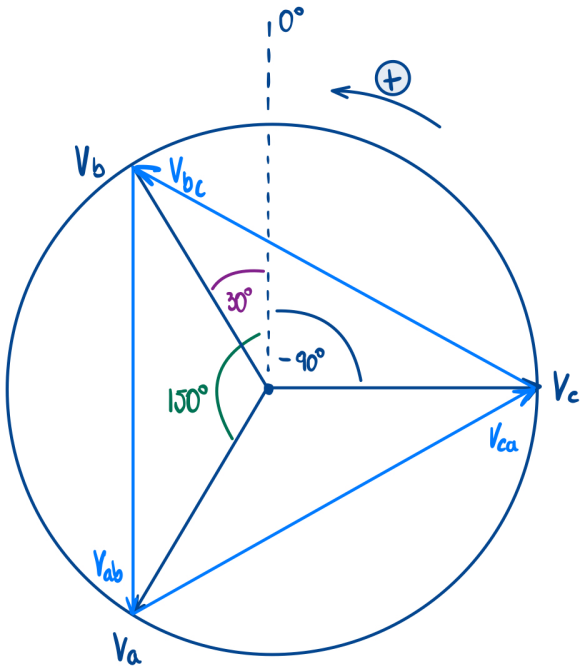


Figura 12: Diagrama fasorial de los voltajes.

Además, tomando en consideración la relación entre el voltaje de fase-neutro y el fase-fase:

$$V_{ff} = V_{fn}\sqrt{3}\angle 30° \tag{25}$$

Entonces, se puede plantear lo siguiente:

$$V_{ab} = V_a\sqrt{3}\angle 30° = 34{,}64\angle 180°[V] \tag{26}$$

Por otro lado, considerando la siguiente relación homóloga para las corrientes:

$$I_{ff} = \frac{I_{fn}}{\sqrt{3}}\angle 30° \tag{27}$$

Entonces, se puede obtener lo siguiente:

$$I_{ab} = \frac{I_a}{\sqrt{3}}\angle 30° = 0{,}23\angle -143{,}13°[A] \tag{28}$$

Finalmente, de acuerdo a la Ley de Ohm:

$$V_{ab}^{Z_{L_{ab}}} = I_{ab} \cdot Z_{L\Delta} \tag{29}$$

De lo cual, al remplazar lo calculado anteriormente, se obtiene lo siguiente:

$$V_{ab}^{Z_{L_{ab}}} = 35{,}39\angle 176{,}63°[V] \tag{30}$$