

Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Eléctrica

Funciones de Transferencia, Diagramas de Bode, y Filtros

Profesor Álvaro Lorca

IEE2123 – Circuitos Eléctricos
Segundo Semestre 2018

Agradecimientos material: Ángel Abusleme, Enrique Álvarez, Daniel Olivares

Introducción

Cualquier *sistema dinámico lineal* puede ser descrito en términos matemáticos por su *función de transferencia*. Las funciones de transferencia nos otorgan herramientas de análisis y perspectiva para entender y resolver sistemas y circuitos.

En esta clase definiremos lo que es una función de transferencia y estudiaremos *filtros* simples. Discutiremos el concepto de circuitos en el dominio de Laplace y también estudiaremos *Diagramas de Bode*.

A diferencia de otros temas del curso, en este capítulo nos enfocamos principalmente en la operatoria, dejando los fundamentos y demostraciones para otros cursos.

Reg. Transitorio y Reg. Permanente

- Ya introdujimos el concepto de régimen sinusoidal permanente y explotamos todas sus propiedades:
  - Pasado el régimen transitorio, al ser excitado con sinusoides todas las señales de un circuito corresponden a sinusoides de la misma frecuencia con cierta amplitud y desfase.
  - Vimos que tanto capacitores como inductores pueden ser modelados como impedancias ($1/j\omega C$ y $j\omega L$), las cuales se tratan como resistores en términos algebraicos.

- En términos netamente matemáticos, al trabajar en régimen sinusoidal permanente y usar fasores e impedancias lo que estamos haciendo es tomar la Transformada de Fourier del circuito y luego trabajar en el dominio de la frecuencia.

Reg. Transitorio y Reg. Permanente

- Existe otra trasformada, de la cual Fourier se puede ver como un caso particular, que sirve para transformar el circuito a otro dominio sin necesariamente estar en régimen sinusoidal permanente: la *Transformada de Laplace*.
  - Esto es muy ventajoso! Podemos transformar el circuito completo al dominio de Laplace, usar todas las técnicas que conocemos de circuitos lineales, y luego calcular la transformada inversa de Laplace para obtener la señal de interés en función del tiempo (incluyendo el régimen transitorio y el régimen permanente).

Transformada de Laplace

- La transformada de Laplace tiene como bases e^{st} con $s = \sigma + j\omega$ (en vez de $e^{j\omega t}$ como en el caso de Fourier):

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t \qquad s = \sigma + j\omega$$

  - De forma similar a lo visto anteriormente, df(t)/dt equivale a multiplicar por $s = \sigma + j\omega$ en el dominio de Laplace (e integrar, dividir por s):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(t) \longleftrightarrow sF(s)$$

  - Por lo que ahora las impedancias están dadas por:

$$i_C(t) = C\frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t} \rightarrow I_C(s) = sCV_C(s) \rightarrow Z_C = 1/sC$$

$$v_L(t) = L\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t} \rightarrow V_L(s) = sLI_L(s) \rightarrow Z_L = sL$$

Transformada de Laplace

- En estricto rigor

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right\} = sF(s) - f(t=0)$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\mathrm{d}^n f(t)}{\mathrm{d}t^n}\right\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2}\frac{\mathrm{d}f(0)}{\mathrm{d}t} \ldots - \frac{\mathrm{d}^{n-1} f(0)}{\mathrm{d}t^{n-1}}$$

  - Por lo que

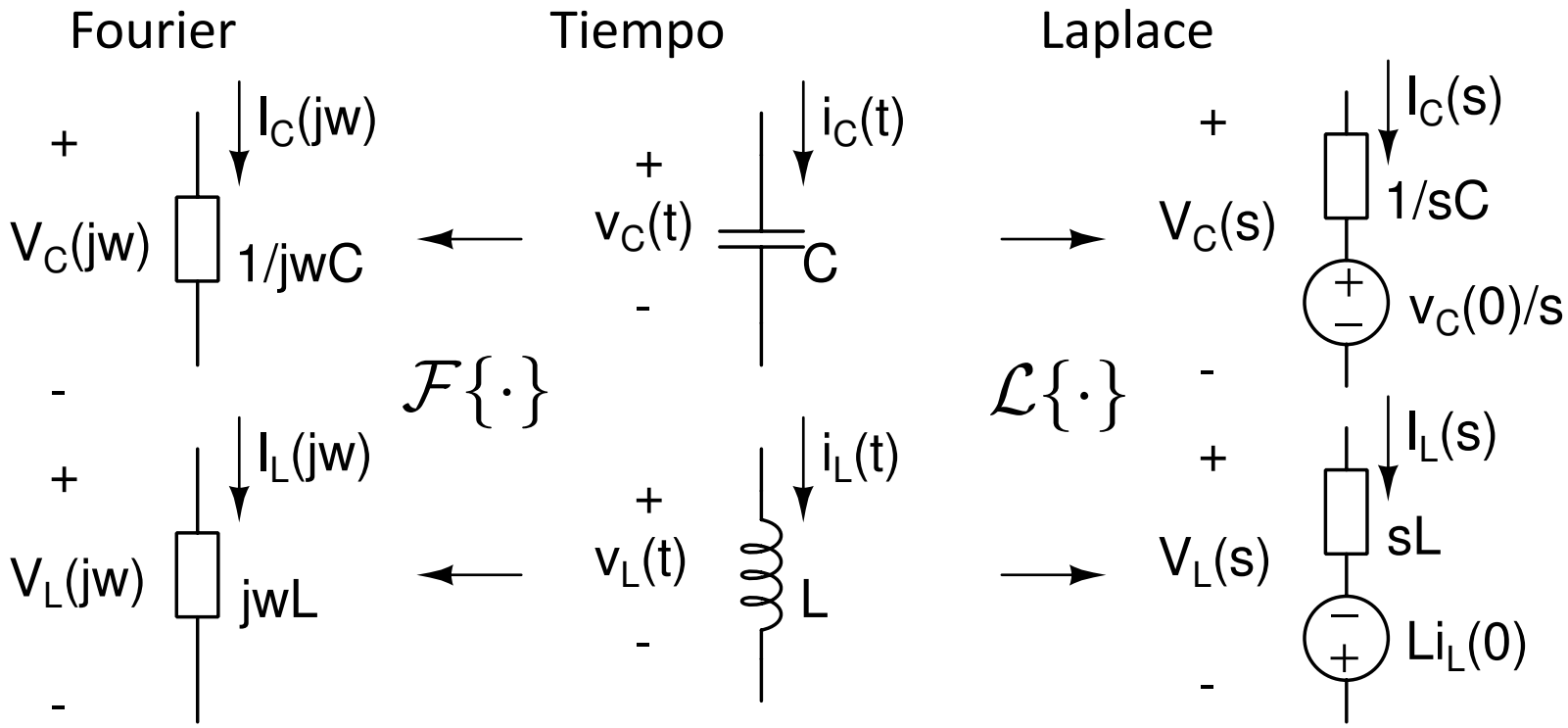
$$\mathcal{L}\left\{\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right\} = sF(s)$$

    sólo si las condiciones iniciales son nulas.

  - Tiene sentido que al usar la Transformada de Laplace importen las condiciones iniciales (recordemos que esto no importaba en régimen sinusoidal permanente), ya que esta transformada "abarca" también el régimen transitorio, no sólo el permanente.

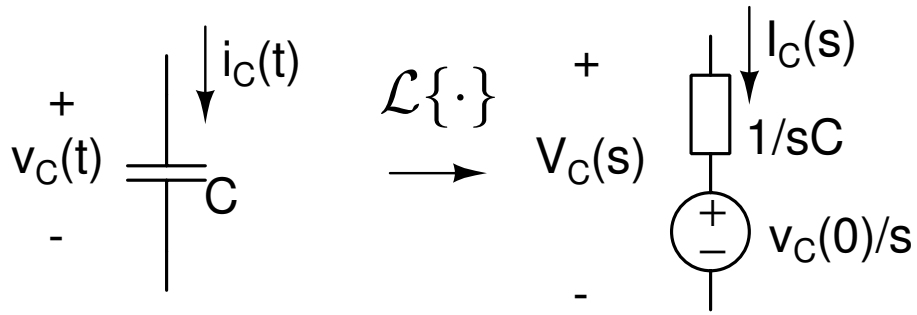
Transformada de Laplace

- Por lo tanto, con condiciones iniciales ≠ 0:



Transformada de Laplace

- **Ejemplo**: demostrar de dónde sale la equivalencia mostrada.



- Dado que

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right\} = sF(s) - f(t=0)$$

- Tenemos

$$i_C(t) = C\frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t} \rightarrow I_C(s) = C\left(sV_C(s) - v_C(0)\right)$$

$$\rightarrow V_c(s) = \frac{1}{sC}I_C(s) + \frac{v_C(0)}{s}$$

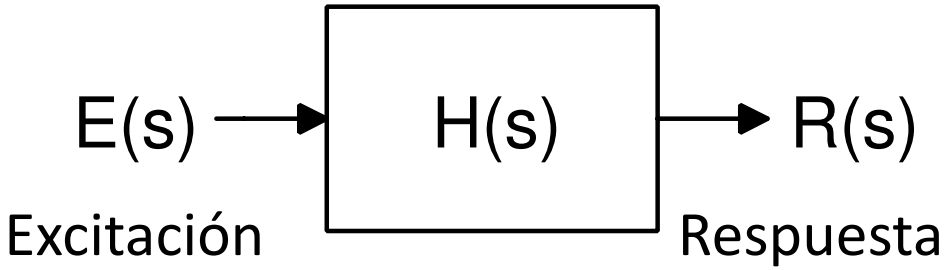
Fin ej.

Transformada de Laplace

- Algunas observaciones:
  - Todo esto puede parecer extraño si es que uno no domina bien las transformadas de Fourier y Laplace. Si bien es importante entender muy bien estas dos transformadas, para efectos de este curso sólo hay que tener claro cómo asociamos una al régimen permanente y la otra a los regímenes transitorio y permanente.
  - Un entendimiento más profundo de estas transformadas se da con el tiempo y con su estudio repetido en diferentes cursos.

Función de transferencia

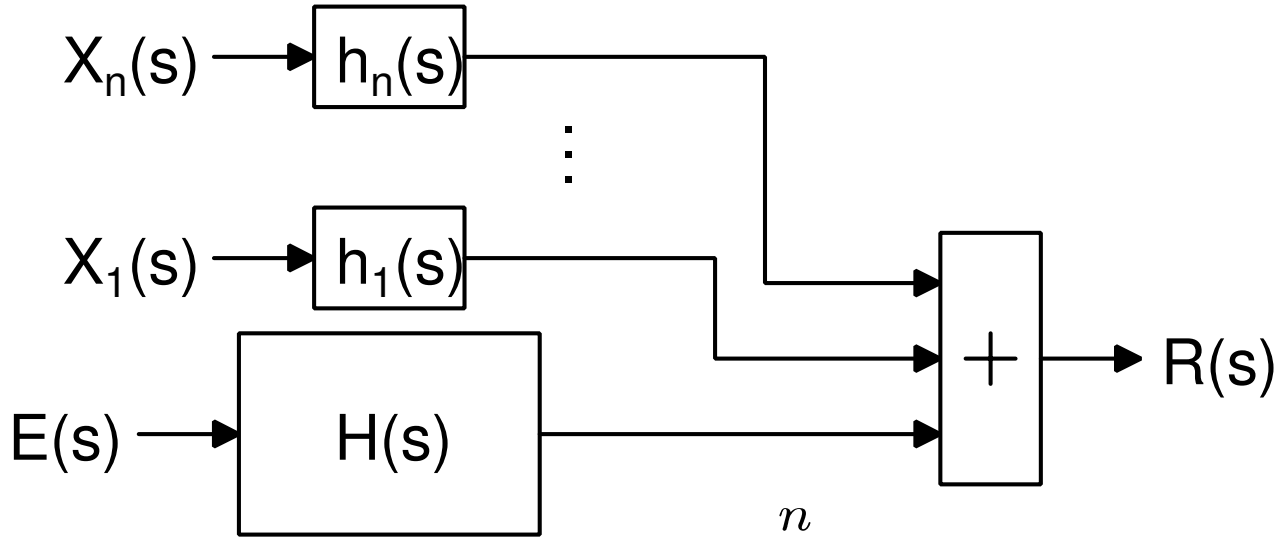
- En un circuito lineal invariante en el tiempo (LTI) con todas sus condiciones iniciales iguales a cero, una función de transferencia H(s) se define como:



$$H(s) = \frac{R(s)}{E(s)}$$

Función de transferencia

- Condiciones iniciales no nulas se comportan como excitaciones, y R(s) está dada por la superposición de estas excitaciones ponderadas por sus respectivas funciones de transferencia:



$$R(s) = H(s)E(s) + \sum_{i=1}^{n} X_i(s)h_i(s)$$

Función de transferencia

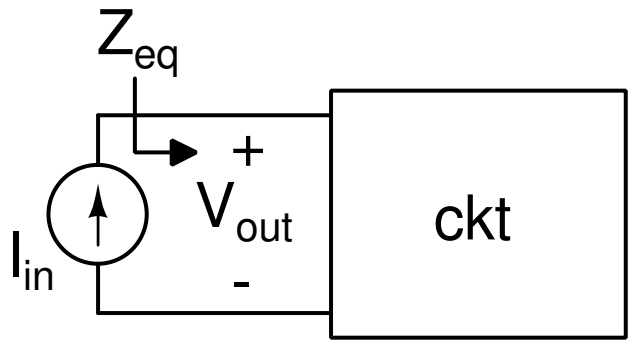
- Una función de transferencia no es más que el cociente entre dos variables de un circuito: la entrada (o excitación) y la salida (o respuesta).
  - En circuitos, existen seis tipos de funciones de transferencia: impedancia de puerto, admitancia de puerto, transimpedancia, transadmitancia, ganancia de voltaje y ganancia de corriente.
  - Ejemplos:





Función de transferencia

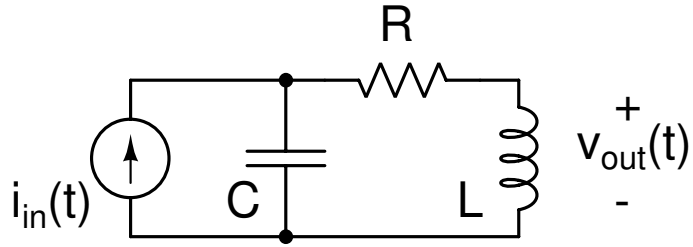
- Una impedancia equivalente es de hecho una función de transferencia donde la entrada es la corriente inyectada en un puerto y la salida es el voltaje generado en el mismo.



$$Z_{eq} = \frac{V_{out}}{I_{in}}$$

Función de transferencia

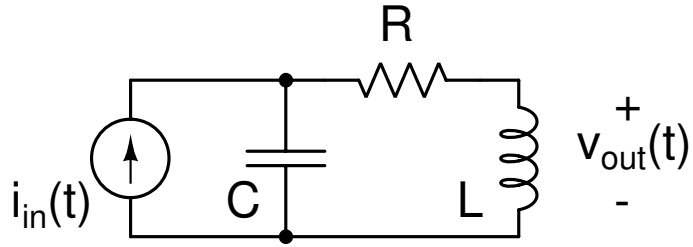
- **Ejemplo**: asumiendo condiciones iniciales nulas, calcule la función de transferencia de transimpedancia $Z_t(s) = V_{out}(s)/I_{in}(s)$.



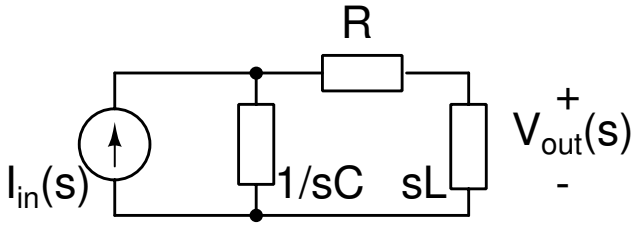
Fin ej.

Función de transferencia

- **Ejemplo**: asumiendo condiciones iniciales nulas, calcule la función de transferencia de transimpedancia $Z_t(s) = V_{out}(s)/I_{in}(s)$.



- Pasamos el circuito al dominio de Laplace y resolvemos por inspección:



$$Z_t(s) = \frac{V_{out}(s)}{I_{in}(s)} = sL\frac{\frac{1}{sC}}{\frac{1}{sC}+R+sL}$$

$$\rightarrow Z_t(s) = \frac{sL}{1+sRC+s^2LC}$$

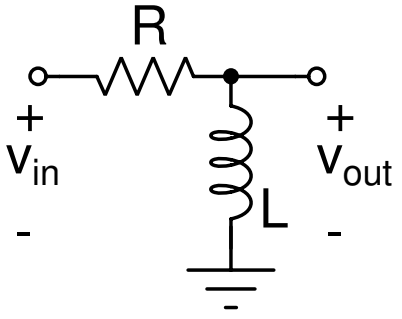
Fin ej.

Función de transferencia

- Toda función de transferencia H(s) de un circuito está dada por el cociente entre dos polinomios:

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

  - Las raíces de N(s) corresponden a los *ceros* de H(s): para dichos valores de s, H(s) se hace cero.
  - Las raíces de D(s) corresponden a los *polos* de H(s): para dichos valores de s, H(s) tiende a infinito.
- Por ejemplo:



$$\frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)} = \frac{sL}{sL+R} \longrightarrow$$

Un cero en s = 0 y
un polo en s = -R/L

Función de transferencia

- En general, siempre se puede factorizar una función de transferencia de un sistema lineal en polinomios de primer orden (una sola raíz real) y/o polinomios de segundo orden (dos raíces complejas conjugadas).
  - Por ejemplo, la función de transferencia

$$H(s) = \frac{s^2+3s+10}{(s+1)^2(s+3)(s+9)}$$

tiene dos ceros complejos conjugados en

$$s = \frac{-3+\sqrt{9-40}}{2} \qquad s = \frac{-3-\sqrt{9-40}}{2}$$

dos polos en

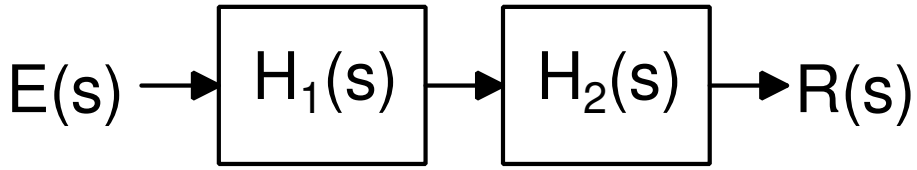
$$s = -1$$

y dos polos más en

$$s = -9 \qquad s = -3$$

Función de transferencia

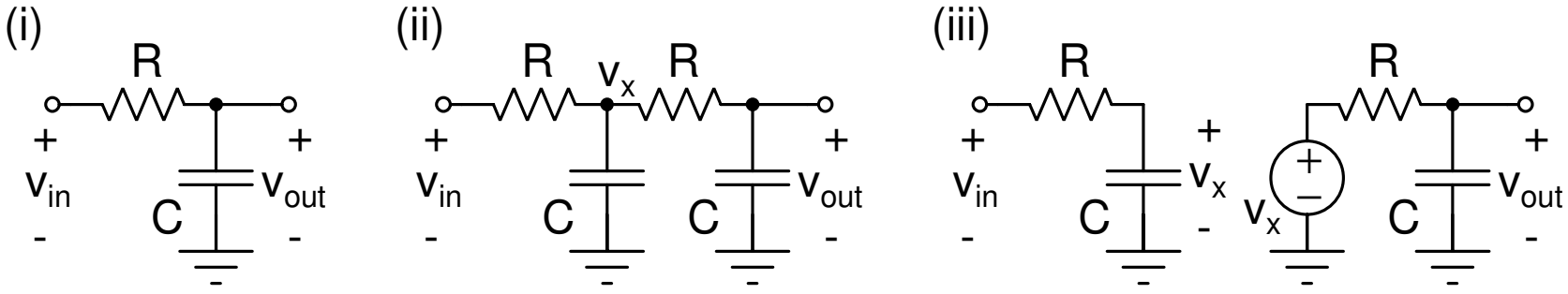
- La función de transferencia de dos bloques en cascada corresponde al producto de las funciones de transferencia originales.
  - En el contexto de circuitos, sin embargo, generalmente éste no es el caso (circuitos "en cascada" no equivale necesariamente a funciones de transferencia en cascada). De todas formas, muchas veces esto corresponde a una buena aproximación (muy útil a la hora de analizar y diseñar circuitos de forma inteligente).



$$H(s) = \frac{R(s)}{E(s)} = H_1(s) \cdot H_2(s)$$

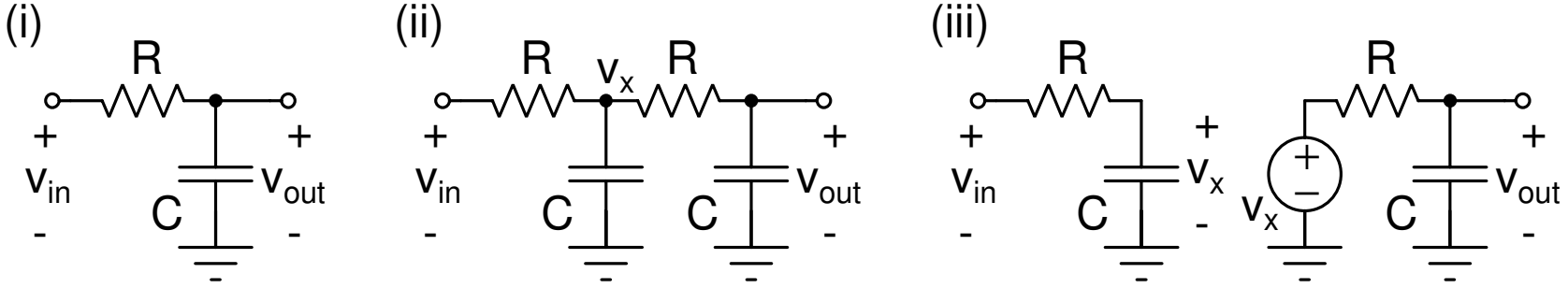
Función de transferencia

- **Ejemplo**: calcular la función de transferencia de ganancia de voltaje $A_v(s) = V_{out}(s)/V_{in}(s)$ de los circuitos (i), (ii), y (iii). Comparar los resultados.



Función de transferencia

- **Ejemplo**: calcular la función de transferencia de ganancia de voltaje $A_v(s) = V_{out}(s)/V_{in}(s)$ de los circuitos (i), (ii), y (iii). Comparar los resultados.



- Por inspección:

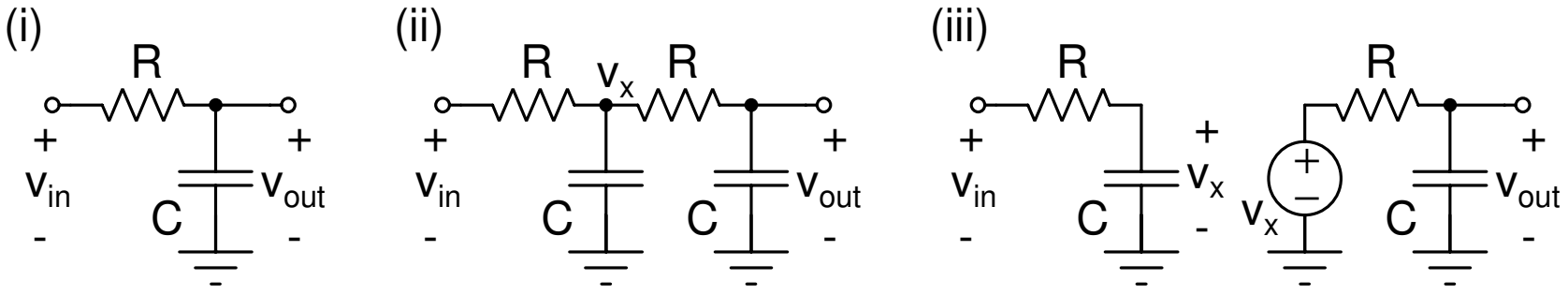
$$A_v^{(i)}(s) = \frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)} = \frac{\frac{1}{sC}}{\frac{1}{sC}+R} = \frac{1}{1+sRC}$$

$$A_v^{(ii)}(s) = \frac{1}{1+sCR}\,\frac{\frac{1}{sC}\,||\left(R+\frac{1}{sC}\right)}{\frac{1}{sC}\,||\left(R+\frac{1}{sC}\right)+R} = \frac{1}{(1+sRC)^2+sRC}$$

$$A_v^{(iii)}(s) = \frac{1}{(1+sRC)^2}$$

Función de transferencia

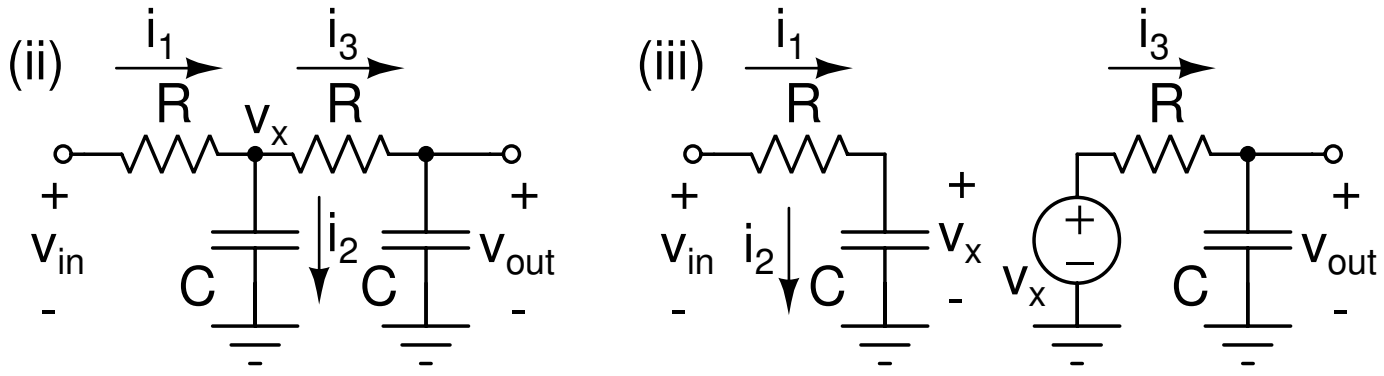
- Se puede ver que si bien el circuito (ii) corresponde a la conexión "en cascada" de dos circuitos (i), $A_v^{(ii)}$ no es igual a $(A_v^{(i)})^2$, sin embargo $A_v^{(iii)} = (A_v^{(i)})^2$.
  - La fuente dependiente del circuito (iii) actúa como *buffer de voltaje*, es decir, hace que la operación del primer circuito no se vea afectada por la del segundo circuito.



$$A_v^{(i)}(s) = \frac{1}{1+sRC} \qquad A_v^{(ii)}(s) = \frac{1}{(1+sRC)^2+sRC} \qquad A_v^{(iii)}(s) = \frac{1}{(1+sRC)^2}$$

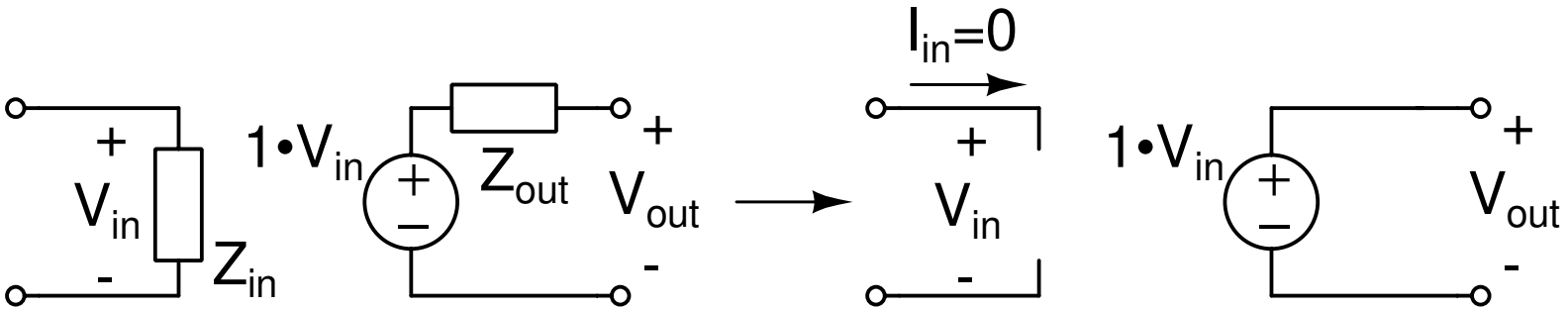
Función de transferencia

- En el circuito (ii) $i_1 \neq i_2$, por lo que el divisor de voltaje de entrada (formado por R y C) no funciona "correctamente". En el circuito (iii) claramente $i_1 = i_2$, e i_3 es entregada por completo por la fuente dependiente de voltaje.
  - En (ii), se dice que "el circuito de la derecha le pone una carga al circuito de la izquierda".
  - Mientras más pequeña sea i_3, menos carga el segundo circuito al primero y "$A_v^{(ii)}$ se parece más a $(A_v^{(i)})^2$".



Función de transferencia

- En términos circuitales un *buffer de voltaje ideal* es un bloque de ganancia unitaria cuya impedancia de entrada es infinita (no consume corriente) y su impedancia de salida es nula. En términos prácticos, es una fuente de voltaje controlada por voltaje, con ganancia unitaria.



$$Z_{in} = \infty$$
$$Z_{out} = 0$$

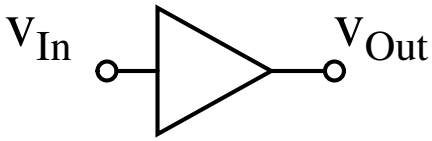
$$A_v(s) = 1$$

  - Como ejercicio, piense sobre qué características debería tener un buffer de corriente ideal.

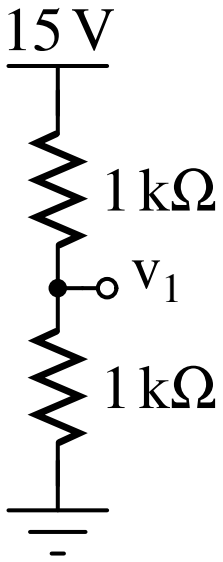
Fin ej.

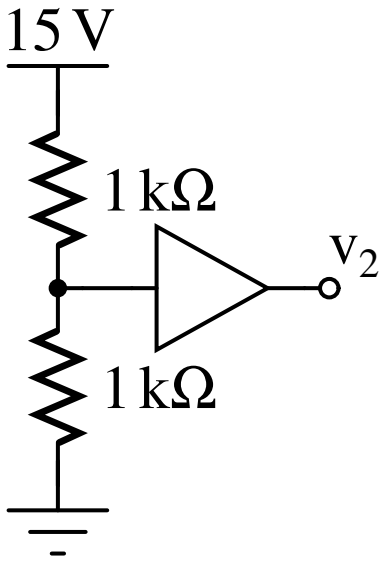
Función de transferencia

- El símbolo del buffer es:



- **Ejemplo**: Bosqueje rectas de carga para los circuitos equivalentes vistos desde los nodos v_1 y v_2.







Fin ej.

Diagrama de Bode

- Los diagramas de Bode muestran cómo se comporta una función de transferencia **en régimen sinusoidal permanente** en función de la frecuencia (ω o f).
- Un diagrama de Bode consta de dos partes: un gráfico de amplitud vs frecuencia y otro de fase vs frecuencia.

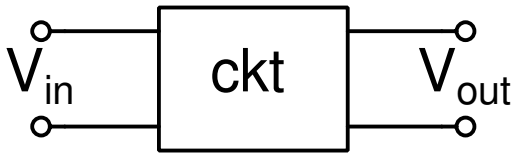
$$H(s) \rightarrow H(j\omega) \quad \Rightarrow \begin{array}{l} |H(j\omega)| \text{ vs } f \\ \angle H(j\omega) \text{ vs } f \end{array}$$

  - En vez de |H(jω)| se grafica $20\log_{10}(|H(j\omega)|)$, que se mide en dB (decibeles).
  - El eje de la frecuencia va en escala logarítmica, lo cual permite mostrar en un mismo gráfico varios órdenes de magnitud.
  - La fase va expresada en grados sexagesimales.

Diagrama de Bode

- Lo valioso de los diagramas de Bode es que pueden ser dibujados *aproximando por asíntotas* el gráfico real.
  - Provee una forma fácil y rápida de conocer el comportamiento de un circuito en función de la frecuencia.
  - Para obtener el gráfico exacto está SPICE (.ac).

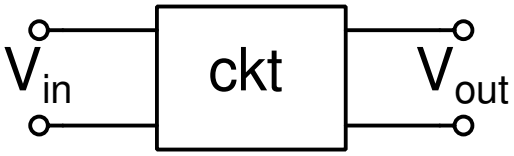
- Por ejemplo supongamos que contamos con un circuito con las siguientes características:



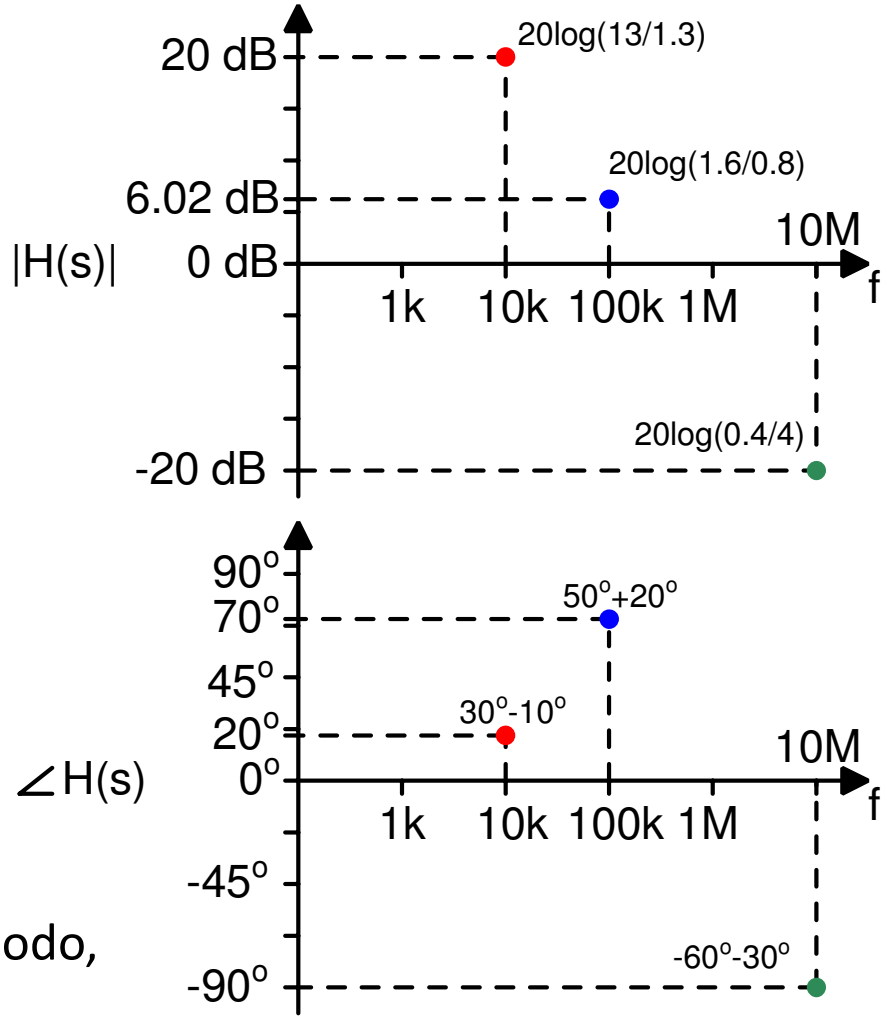
V_{in} =	V_{out} =
$1.3\cos(2\pi 10kt+10^{o})$	$13\cos(2\pi 10kt+30^{o})$
$0.8\cos(2\pi 100kt-20^{o})$	$1.6\cos(2\pi 100kt+50^{o})$
$4\cos(2\pi 10Mt+30^{o})$	$0.4\cos(2\pi 10Mt-60^{o})$

Diagrama de Bode

- En un diagrama de Bode:



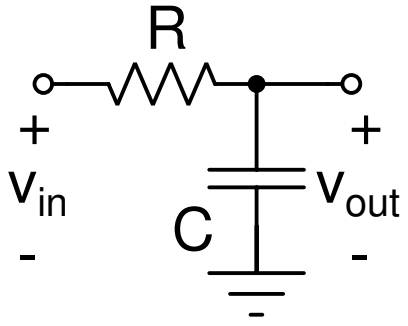
V_{in} =	V_{out} =
$1.3\cos(2\pi 10kt+10^{o})$	$13\cos(2\pi 10kt+30^{o})$
$0.8\cos(2\pi 100kt-20^{o})$	$1.6\cos(2\pi 100kt+50^{o})$
$4\cos(2\pi 10Mt+30^{o})$	$0.4\cos(2\pi 10Mt-60^{o})$



Notar que en el eje de las abscisas se grafica $\log_{10}(f)$, pero se anota f. De este modo, el eje queda en escala logarítmica.

Diagrama de Bode

- **Ejemplo**: bosquejar el diagrama de Bode de la ganancia de voltaje $A_v = V_{out}/V_{in}$ del siguiente circuito.



- Por inspección

$$A_v(s) = \frac{\frac{1}{sC}}{\frac{1}{sC}+R} = \frac{1}{1+sRC} \longrightarrow \text{Polo en} \quad s = -\frac{1}{RC}$$

- En régimen sinusoidal permanente

$$A_v(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega RC} \Rightarrow \begin{aligned} |A_v(j\omega)| &= \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2 R^2 C^2}} \\ \angle A_v(j\omega) &= -\tan^{-1}(\omega RC) \end{aligned}$$

Diagrama de Bode

- Para ω<<1/RC (frecuencias mucho más bajas que el polo):

$$|A_v(j\omega)| \approx 1 \rightarrow 20\log_{10}(1) = 0 \text{ dB}$$

$$\angle A_v(j\omega) \approx 0^{\text{o}}$$

- Para ω=1/RC

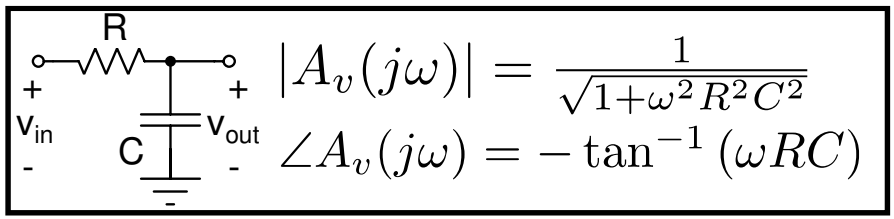
$$|A_v(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow 20\log_{10}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \approx -3 \text{ dB}$$

$$\angle A_v(j\omega) = -45^{\text{o}}$$

- En ω>>1/RC

$$|A_v(j\omega)| \approx \frac{1}{\omega RC} \rightarrow 20\log_{10}\left(\frac{1}{\omega RC}\right) = -20\log_{10}(\omega) + 20\log_{10}\left(\frac{1}{RC}\right) \text{ dB}$$

$$\angle A_v(j\omega) \approx -90^{\text{o}}$$



$$|A_v(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2R^2C^2}}$$

$$\angle A_v(j\omega) = -\tan^{-1}(\omega RC)$$

Diagrama de Bode

- Es fácil anticipar cómo se vería el Bode de fase completo y de magnitud a bajas frecuencias, pero el Bode de magnitud a altas frecuencias no es tan fácil de anticipar.
  - Como en realidad el eje de las abscisas es $\log_{10}$(f) (en este caso $\log_{10}(\omega)$), tenemos:

$$y = 20\log_{10}\left(A_v(j\omega)\right)$$

$$x = \log_{10}(\omega) \rightarrow \omega = 10^x$$

  - Para ω>>1/RC:

$$y = -20\log_{10}(\omega) + 20\log_{10}\left(\tfrac{1}{RC}\right) = -20\log_{10}(10^x) + 20\log_{10}\left(\tfrac{1}{RC}\right)$$

$$\rightarrow y = -20x + 20\log_{10}\left(\tfrac{1}{RC}\right)$$

↓

Es una recta de pendiente -20
con desplazamiento vertical!

Diagrama de Bode

- Por lo tanto, el Bode de magnitud sería más o menos algo así:

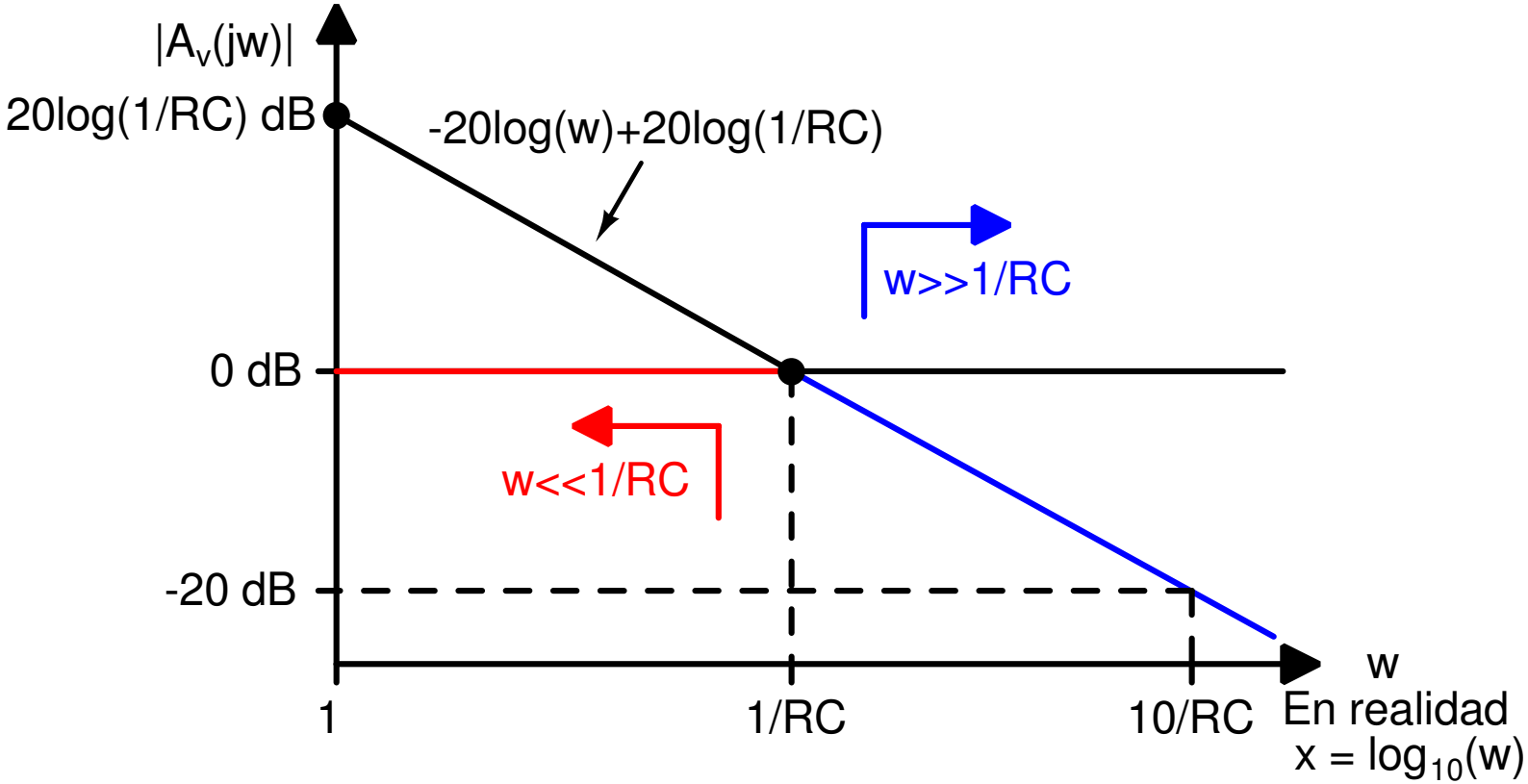


Diagrama de Bode

- Finalmente:

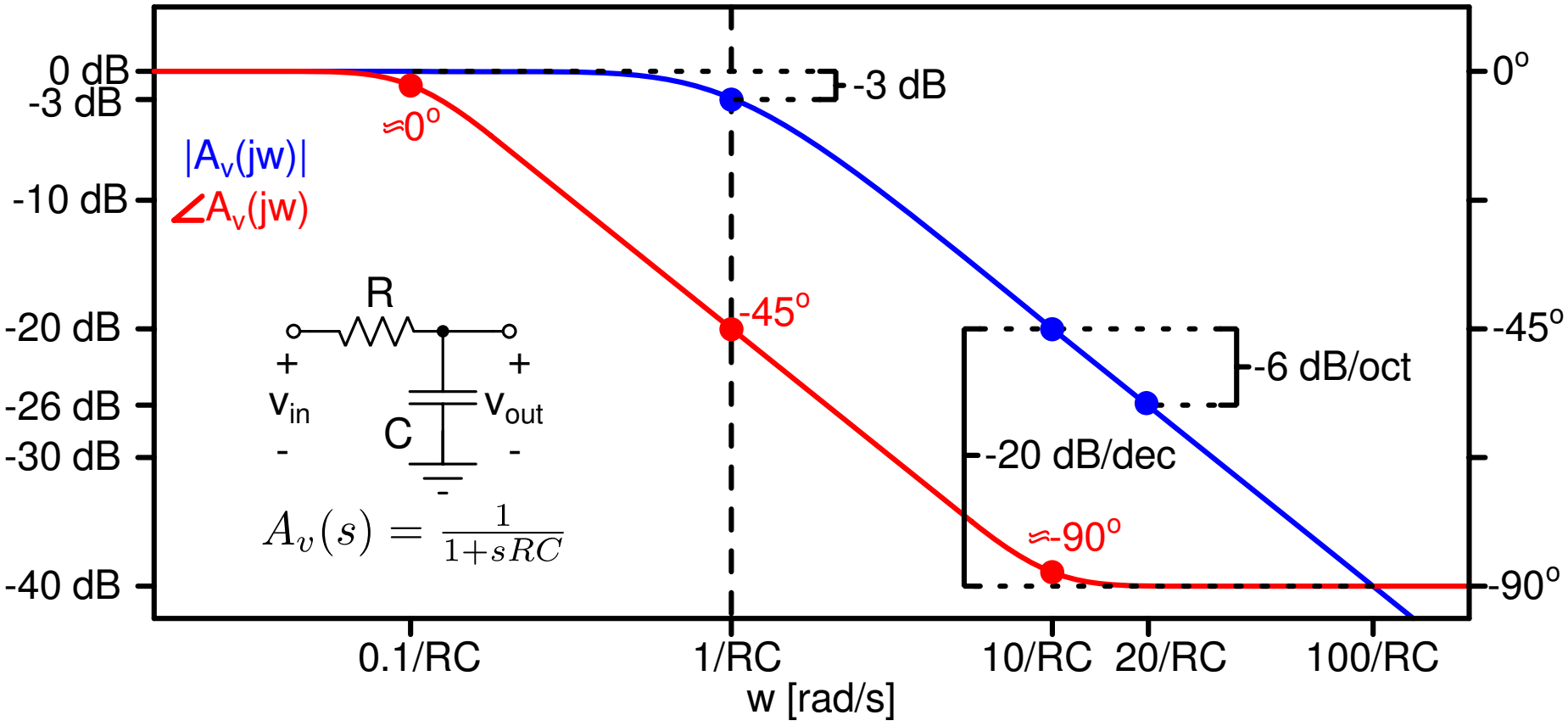


Diagrama de Bode

- Algunas observaciones:
  - Si bien el diagrama de Bode recién presentado no es exacto, el hecho de que el gráfico sea de $20\log_{10}(|A_v(j\omega)|)$ en vez de $|A_v(j\omega)|$ hace que se "suavice" la curva, y por lo mismo la aproximación por asíntotas bosquejada anteriormente es en realidad muy parecida al gráfico exacto.
  - Un buen ejercicio consiste en reproducir estos gráficos calculando todos los puntos relevantes a mano. También es bueno comparar el diagrama de Bode con un gráfico de $|A_v(j\omega)|$ vs ω para ver las diferencias que introduce el hecho de graficar $20\log_{10}(|A_v(j\omega)|)$ y no $|A_v(j\omega)|$.

Fin ej.

Diagrama de Bode

- Acabamos de ver cómo es el diagrama de Bode de una función del tipo $H(s) = (1-s/p)^{-1}$, donde p es el polo.

$$20\log_{10}\left(|H(j\omega)|\right) = -20\log_{10}\left(\sqrt{1+\frac{\omega^2}{p^2}}\right)$$

$$\angle H(j\omega) = \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{p}\right)$$

$\omega << \lvert p\rvert$	$\omega = \lvert p\rvert$	$\omega >> \lvert p\rvert$
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
≈ 0 dB	≈ -3 dB	$\approx -20\log_{10}\left(\frac{\omega}{p}\right)$ dB
$\approx 0^{\circ}$	$= \mathrm{sgn}(p)\cdot 45^{\circ}$	$\approx \mathrm{sgn}(p)\cdot 90^{\circ}$

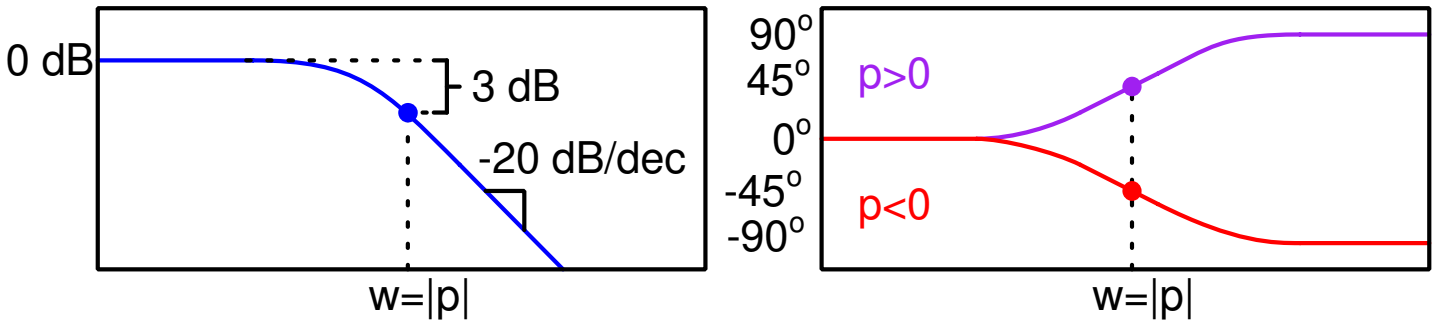


Diagrama de Bode

- El diagrama de Bode de H(s) = (1-s/z), donde z es el cero, estaría dado por:

$$20\log_{10}\left(|H(j\omega)|\right) = 20\log_{10}\left(\sqrt{1+\frac{\omega^2}{z^2}}\right)$$

$$\angle H(j\omega) = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{z}\right)$$

$\omega << \|z\|$	$\omega = \|z\|$	$\omega >> \|z\|$
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
≈ 0 dB	≈ 3 dB	$\approx 20\log_{10}\left(\frac{\omega}{z}\right)$ dB
$\approx 0^{\circ}$	$= -\text{sgn}(z)\cdot 45^{\circ}$	$\approx -\text{sgn}(z)\cdot 90^{\circ}$

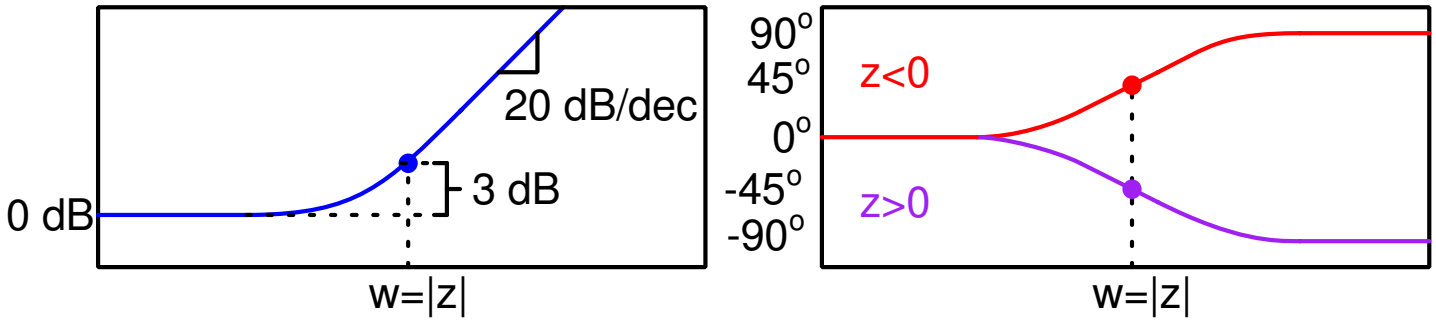


Diagrama de Bode

- **Ejemplo**: bosquejar el diagrama de Bode de la función de transferencia dada.

$$H(s) = 10\frac{\left(1+\frac{s}{10^2}\right)}{\left(1+\frac{s}{10^7}\right)\left(1+\frac{s}{10^6}\right)}$$

- Determinamos la ubicación de los polos (s=p_1 y s=p_2) y ceros (s=z_1) de H(s):

$$p_1 = -10^6 \rightarrow \omega_{p_1} = |p_1| = 10^6 \text{ Hz}$$
$$p_2 = -10^7 \rightarrow \omega_{p_2} = 10^7 \text{ Hz}$$
$$z_1 = -10^2 \rightarrow \omega_{z_1} = 10^2 \text{ Hz}$$

Diagrama de Bode

- Calculamos el módulo de H(s):

$$|H(s)| = 10\frac{\sqrt{1+\frac{\omega^2}{10^4}}}{\sqrt{1+\frac{\omega^2}{10^{14}}}\sqrt{1+\frac{\omega^2}{10^{12}}}}$$

$$\rightarrow 20\log_{10}(|H(s)|) = 20\log_{10}(10) + 20\log_{10}\left(\sqrt{1+\frac{\omega^2}{10^4}}\right)$$

$$-20\log_{10}\left(\sqrt{1+\frac{\omega^2}{10^{14}}}\right) - 20\log_{10}\left(\sqrt{1+\frac{\omega^2}{10^{12}}}\right)$$

- Calculamos la fase:

$$\angle H(s) = \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{10^2}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{10^7}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{10^6}\right)$$

  - Se puede ver que el Bode de H(s) corresponde a la simple superposición de los Bodes de cada uno de los factores!

Diagrama de Bode

- Por lo tanto, tenemos que hacer los diagramas de Bode de las funciones de transferencia $h_1(s)$, $h_2(s)$, $h_3(s)$ y $h_4(s)$ y luego simplemente sumar los gráficos punto a punto para obtener el bode de $H(s) = h_1(s)h_2(s)h_3(s)h_4(s)$.

$$
\begin{aligned}
h_1(s) &= 10 \\
h_2(s) &= \left(1 + s/10^2\right) \\
h_3(s) &= \left(1 + s/10^6\right)^{-1} \\
h_4(s) &= \left(1 + s/10^7\right)^{-1}
\end{aligned}
$$

Diagrama de Bode - Magnitud

- Así:

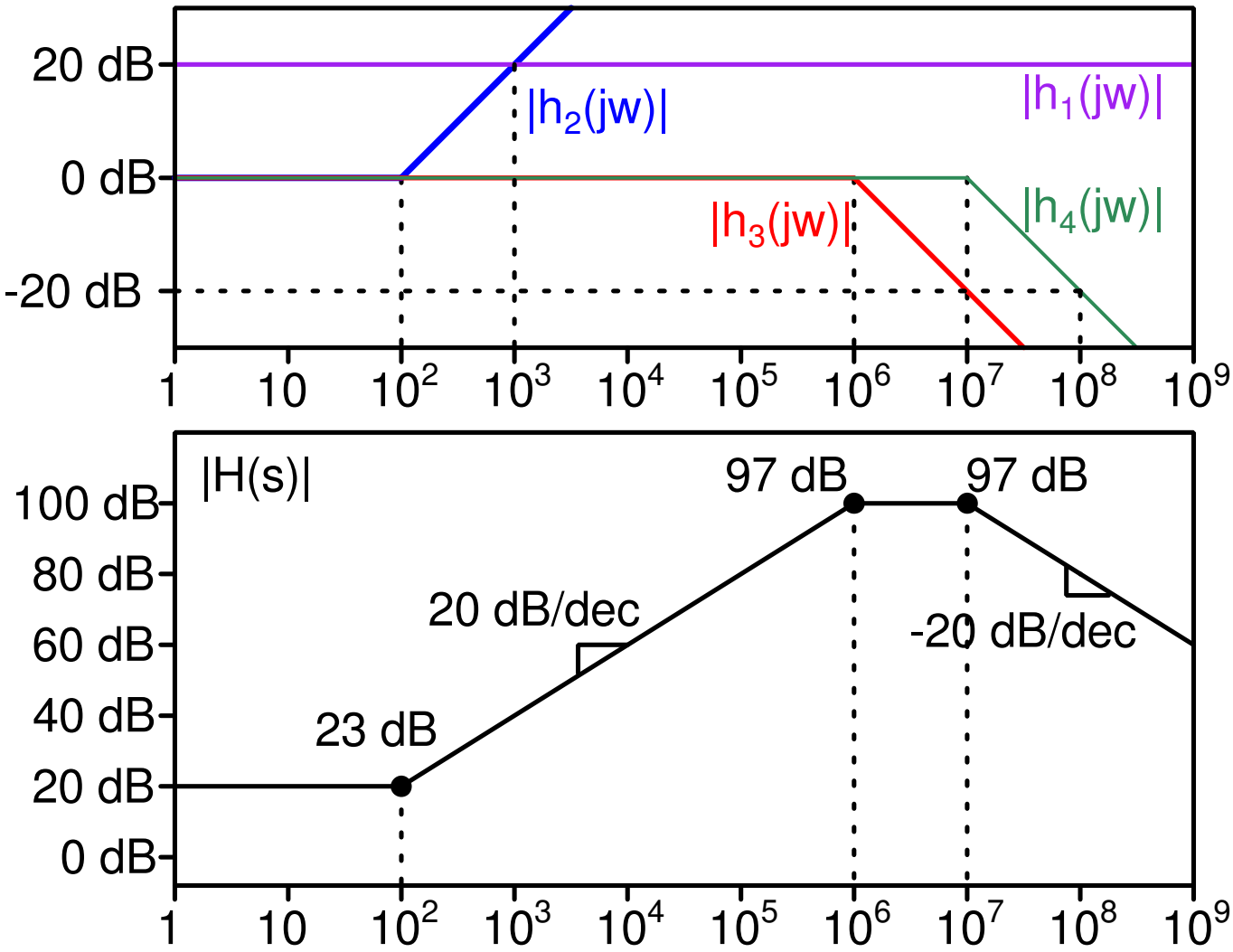
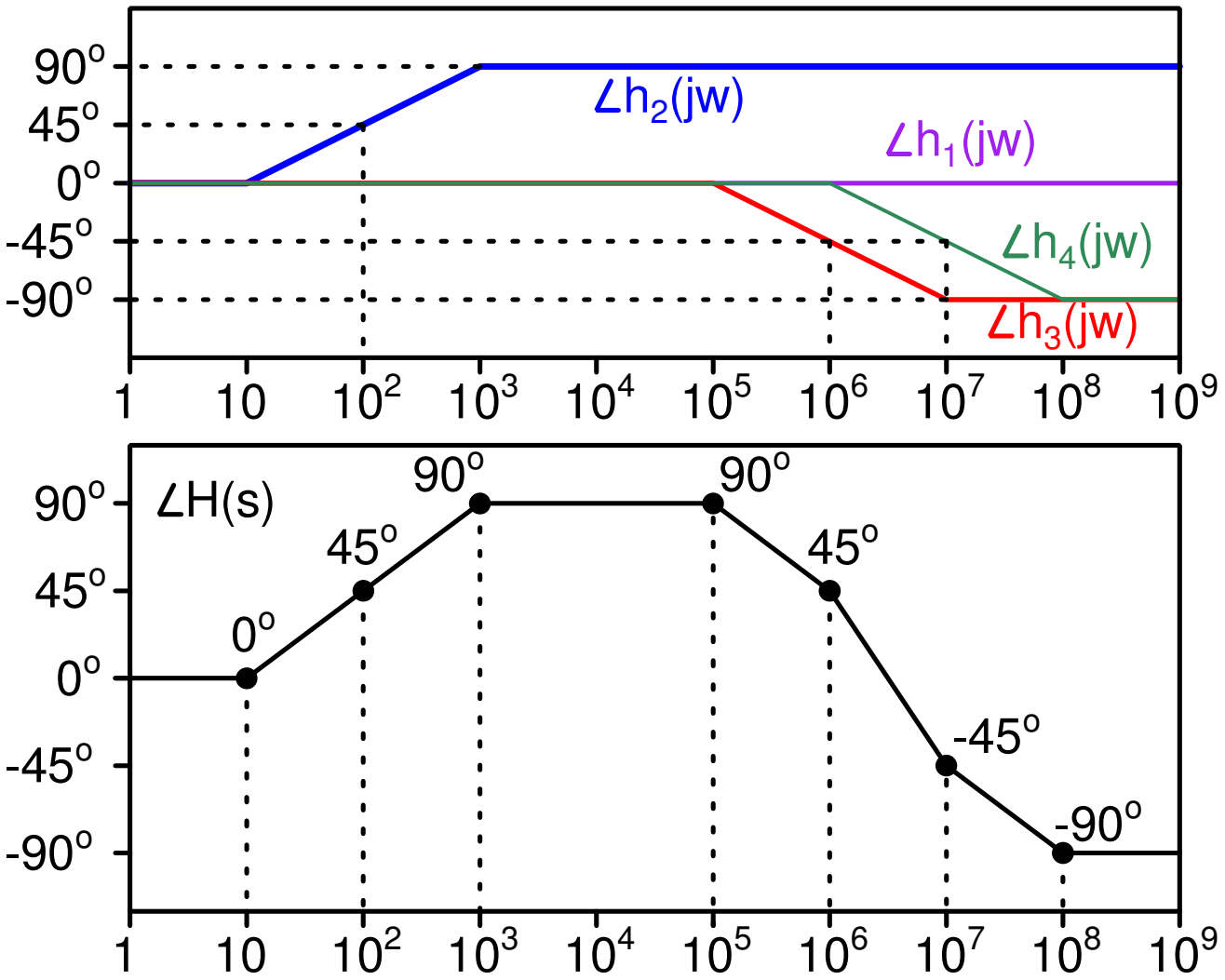


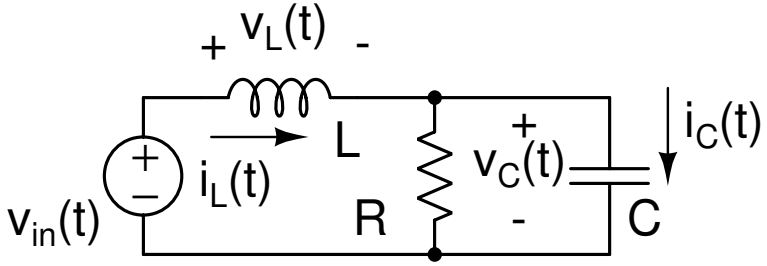
Diagrama de Bode - Fase



Fin ej.

Diagrama de Bode

- Queda preguntarnos todavía cómo se grafica el Bode de una función de transferencia que contiene polinomios cuadráticos como factores. Tomemos por ejemplo el siguiente circuito y calculemos $H(s) = V_C(s)/V_{in}(s)$:



- Claramente:

$$V_C(s) = \frac{R||\frac{1}{sC}}{sL+R||\frac{1}{sC}} \rightarrow H(s) = \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2 + \frac{2\zeta}{\omega_0}s+1} \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad \zeta = \frac{1}{2R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Diagrama de Bode

- Asumiendo que ζ<1 (caso subamortiguada → dos raíces complejas conjugadas), los polos se encuentran en:

$$\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2 + \frac{2\zeta}{\omega_0}s + 1 = 0$$

$$\rightarrow s_{1,2} = -\zeta\omega_0 \pm j\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}$$

- Por lo tanto:

$$\omega_{1,2} = |s_{1,2}| = \omega_0 \longleftarrow$$ Dos polos en ω_0!

  - Notar que en los casos críticamente amortiguados (dos raíces reales e iguales) y sobreamortiguado (dos raíces reales y distintas) el polinomio se puede factorizar en dos polinomios de grado uno (ya sabemos cómo hacer el Bode de eso!).

Diagrama de Bode

- Luego:

$$20\log_{10}\left(|H(j\omega)|\right) = -20\log_{10}\left(\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2+\frac{4\zeta^2\omega^2}{\omega_0}}\right)$$

$$\angle H(j\omega) = -\angle\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2+2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)j\right)$$

$$\omega << \omega_0 \quad \omega = \omega_0 \quad \omega >> \omega_0$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$\approx 0\ \text{dB} \qquad = 20\log_{10}\left(\frac{1}{2\zeta}\right)\ \text{dB} \qquad \approx -20\log_{10}\left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)\ \text{dB}$$

$$\approx 0^o \qquad = -90^o \qquad \approx -180^o$$

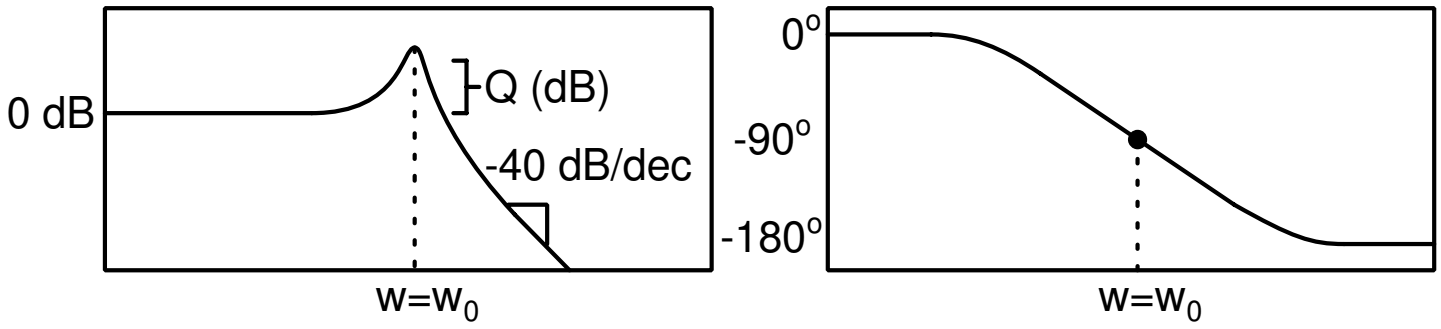


Diagrama de Bode

- Acá hemos introducido el *factor de calidad* Q = 1/(2ζ), que corresponde a muy grandes rasgos a una medida de la "selectividad" del circuito.
  - Mientras más alto Q (i.e., más pequeño ζ), más alto es el *peak* que se ve en el Bode de magnitud y más abrupto es el cambio de fase.

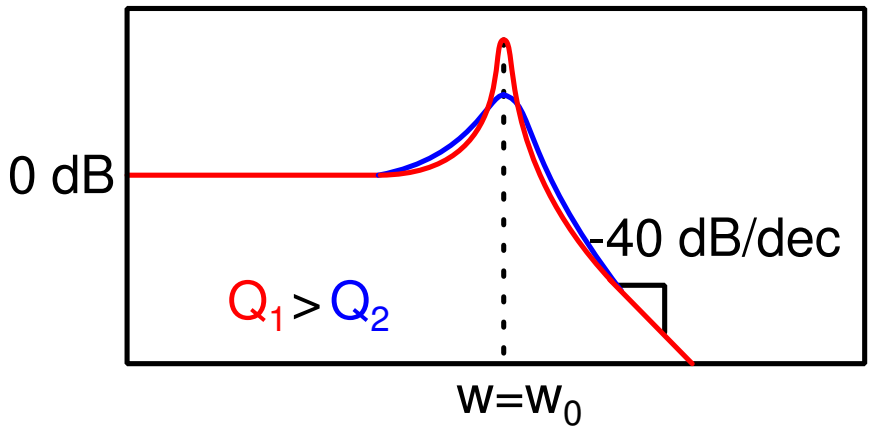
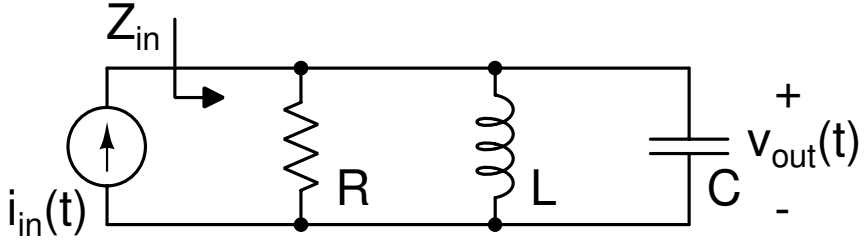


Diagrama de Bode

- **Ejemplo**: bosquejar el diagrama de Bode de la función de transferencia $Z_{in}(s) = V_{out}(s)/I_{in}(s)$ del circuito para distintos valores de Q.



- Calculamos $Z_{in}(s)$:

$$V_{out} = I_{in}(R||\frac{1}{sC}||sL) \rightarrow Z_{in}(s) = \frac{sL}{1+\frac{s}{\omega_0 Q}+\frac{s^2}{\omega_0^2}}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\zeta = \frac{1}{2R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$Q = \frac{1}{2\zeta} = R\sqrt{\frac{C}{L}}$$

Diagrama de Bode

- Determinamos los ceros y polos de $Z_{in}(s)$:

$$Z_{in}(s) = \frac{sL}{1+\frac{s}{\omega_0 Q}+\frac{s^2}{\omega_0^2}}$$

Un cero en:

$$z_1 = 0 \rightarrow \omega_{z1} = |z_1| = 0$$

Dos polos en:

$$p_{1,2} = \frac{\omega_0}{2}\left(-\frac{1}{Q} \pm \sqrt{\frac{1}{Q^2}-4}\right)$$

  - Dependiendo del valor de Q los polos pueden ser ambos reales y distintos (caso sobre amortiguado, ζ>1), reales e iguales (caso críticamente amortiguado, ζ=1) o complejos conjugados (caso subamortiguado, ζ<1). Así, como $Q = (2\zeta)^{-1}$:

$$\zeta > 1 \quad \rightarrow \quad Q < 0.5$$
$$\zeta = 1 \quad \rightarrow \quad Q = 0.5$$
$$\zeta < 1 \quad \rightarrow \quad Q > 0.5$$

Diagrama de Bode

- Por lo tanto, para Q<0.5:

$$p_1 = \frac{\omega_0}{2}\left(-\frac{1}{Q} + \sqrt{\frac{1}{Q^2} - 4}\right) \rightarrow \omega_{p_1} = |p_1| = \frac{\omega_0}{2}\left(\frac{1}{Q} - \sqrt{\frac{1}{Q^2} - 4}\right)$$

$$\underbrace{p_2 = \frac{\omega_0}{2}\left(-\frac{1}{Q} - \sqrt{\frac{1}{Q^2} - 4}\right)}_{\text{Dos polos negativos que se alejan en la medida que Q disminuye}} \rightarrow \omega_{p_2} = |p_2| = \frac{\omega_0}{2}\left(\frac{1}{Q} + \sqrt{\frac{1}{Q^2} - 4}\right)$$

- Para Q = 0.5:

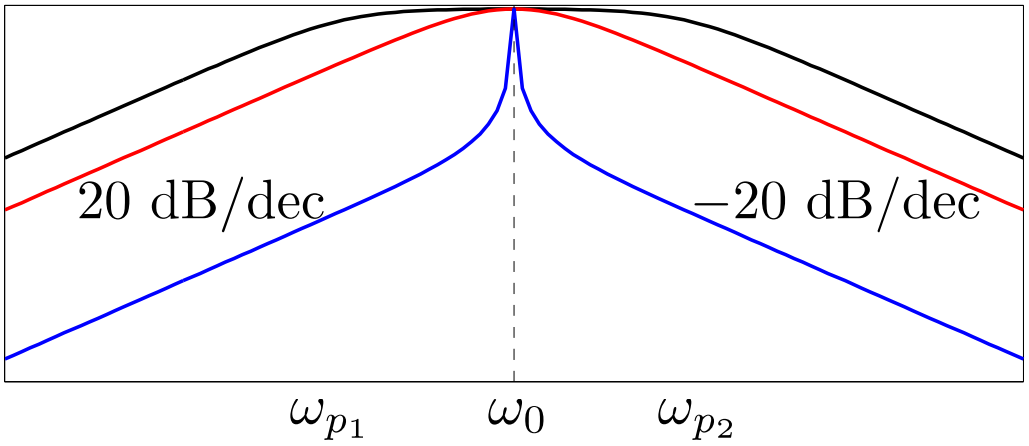
$$p_{1,2} = -\omega_0 \rightarrow \omega_{p_1,p_2} = \omega_0 \longleftarrow$$ Dos polos negativos en ω_0

- Para Q>0.5

$$p_{1,2} = \frac{\omega_0}{2}\left(-\frac{1}{Q} \pm j\sqrt{4 - \frac{1}{Q^2}}\right) \rightarrow \omega_{p_1,p_2} = \omega_0$$

Diagrama de Bode

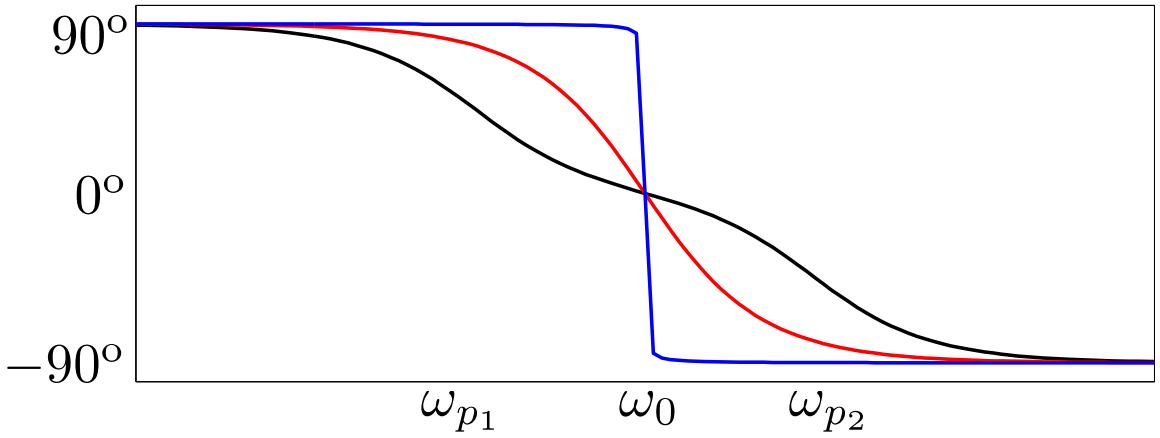
- Así:



$Q = 0.1$

$Q = 0.5$

$Q = 50$



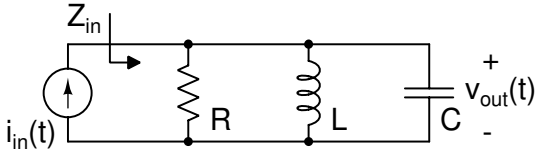


Diagrama de Bode

- Tratemos de entender este resultado desde un punto de vista cualitativo:
  - A altas frecuencias C se comporta como un cortocircuito, por lo que tiene sentido que v_{out} sea muy pequeño.
  - A bajas frecuencias L se comporta como un cortocircuito, por lo que v_{out} también es muy pequeño.
  - En la medida que nos alejamos de los extremos deberíamos alcanzar un máximo de v_{out} (y por ende un máximo de Z_{in}). Este máximo ocurre en $\omega = \omega_0$, cuando se anula la parte reactiva de la impedancia, es decir $Z_{in}(j\omega_0) = R$.

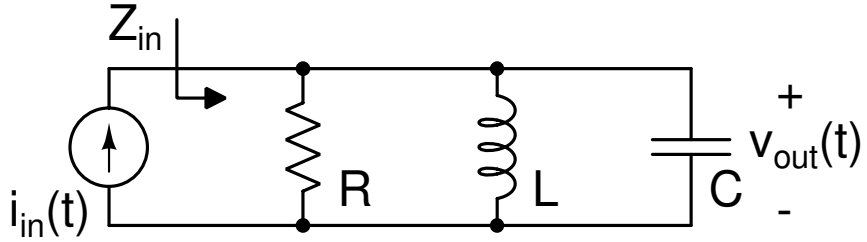
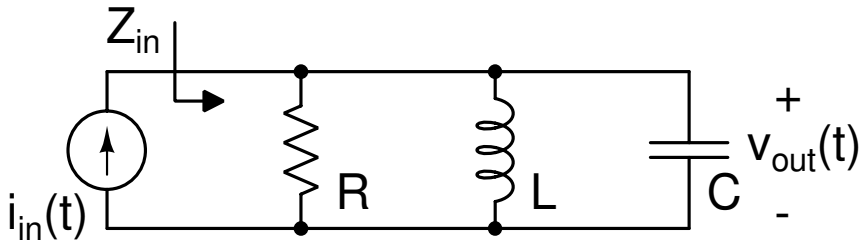


Diagrama de Bode

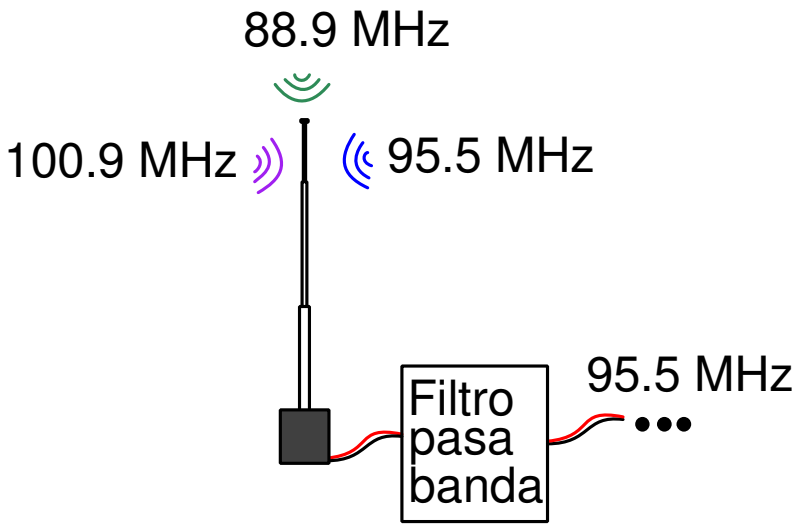
- Visto de otra manera, antes de ω_0 el elemento dominante en el paralelo RLC es el inductor (y por eso la fase de 90º de Z_{in}!). Pasado ω_0 el elemento dominante es C (por eso la fase de -90º de Z_{in}). En el punto medio, la impedancia es puramente resistiva e igual a R (0º de fase).
- Se dice que este circuito actúa como *filtro pasa banda*, ya que sólo "deja pasar" señales de una frecuencia en torno a ω_0. Las señales de frecuencias fuera de esta banda son atenuadas por este circuito.
- A mayor Q, más alta la selectividad del filtro (banda más angosta).



Fin ej.

Filtros

- Un *filtro* consiste en un circuito que deja pasar señales o componentes de frecuencia de una señal dependiendo de su frecuencia. Como el nombre lo dice, se trata de un filtro.
  - Ya llevamos algo de tiempo estudiando filtros, sólo que no hemos hecho énfasis en esta característica de los circuitos discutidos.

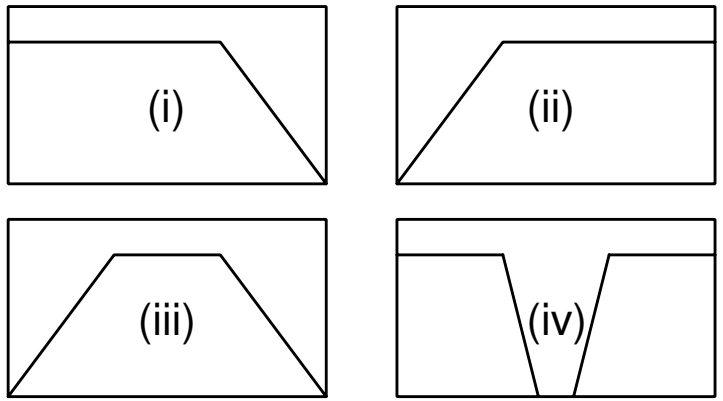


Filtros

- Un filtro puede ser de primer orden, segundo orden, etcétera, dependiendo esto del número de polos que tienen.
- Se pueden encontrar amplios tratados sobre filtros en la literatura, todos ellos basados en cómo debería verse el diagrama de Bode del filtro. En este curso sólo estudiaremos filtros básicos y más que nada nos preocuparemos de introducir el concepto con énfasis en sus diagramas de Bode y en el análisis cualitativo.
  - Uno puede reconocer a qué tipo de filtro corresponde un determinado circuito a partir de lo que las ecuaciones dicen. Es más, uno puede ser capaz de reconocer el filtro mucho antes de plantear ecuaciones.

Filtros

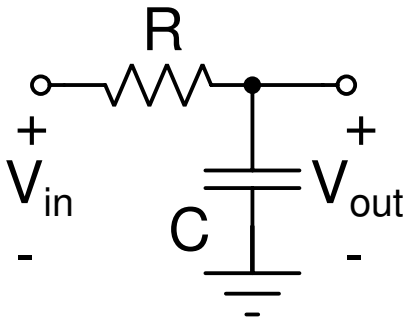
- A muy grandes rasgos distinguimos cuatro tipos de filtros típicos:
  - (i) Pasa bajos
  - (ii) Pasa altos
  - (iii) Pasa banda
  - (iv) Rechaza banda

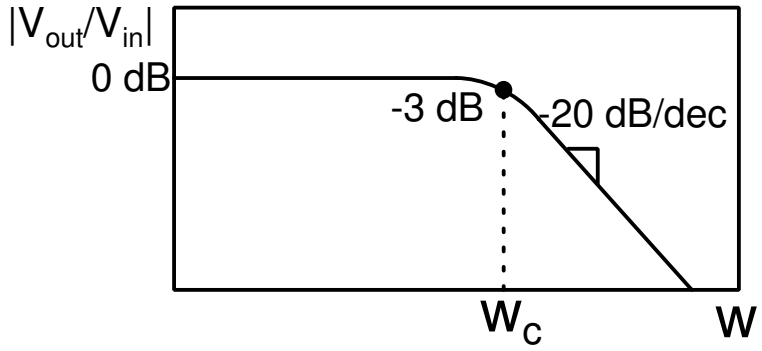


- A continuación veremos algunos ejemplos simples de los cuatro tipos de filtros con sus respectivos análisis cualitativos.

Filtros

- Filtro pasa-bajos:

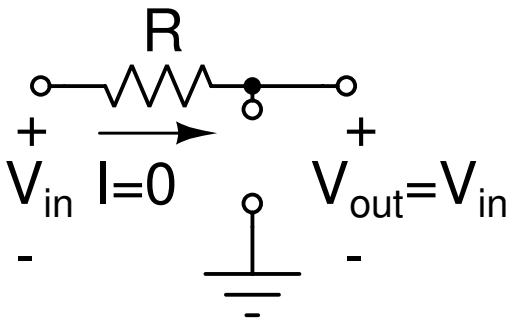




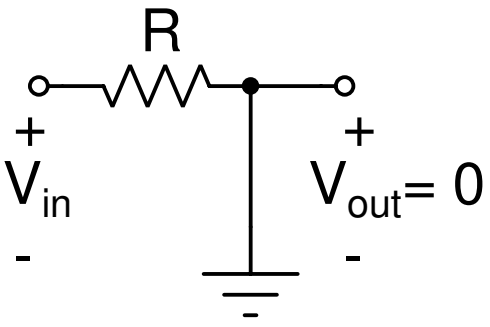
$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{1}{1+sRC}$$

$$\omega_c = \frac{1}{RC}$$

Baja frecuencia

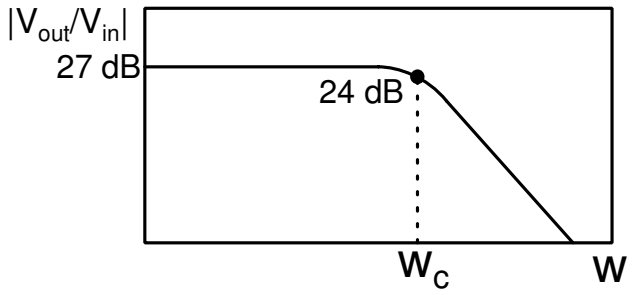


Alta frecuencia



Filtros

- La frecuencia ω_c corresponde a la *frecuencia de corte* del filtro, y se define como el punto donde hay una caída de 3 dB (x1/√2). Ojo, esta frecuencia no corresponde siempre a la frecuencia del polo.
  - Considere el caso de un filtro pasa bajos de segundo orden con dos polos a la misma frecuencia. En el lugar de los polos la atenuación es de 6 dB (x1/2) en vez de 3 dB.
- La ganancia en la banda pasante no tiene por qué ser necesariamente de 0 dB. La caída de 3 dB se mide con respecto a la ganancia de la pasa banda, no 0 dB.



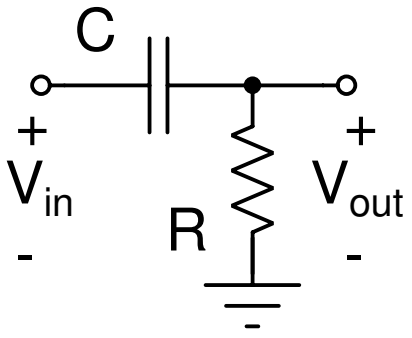
Filtros

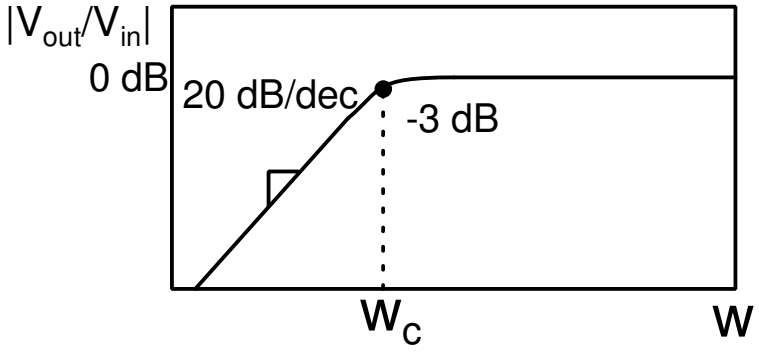
- Notar que en este caso particular la frecuencia de corte corresponde al inverso de la constante de tiempo τ del circuito.
  - Mientras más lento el circuito (mayor constante de tiempo) más le cuesta dejar pasar señales de frecuencias altas, y por lo mismo la frecuencia de corte del filtro es menor.

- Es un excelente ejercicio estudiar los contenidos de esta clase y comparar los resultados aquí presentados en el dominio de la frecuencia con los resultados obtenidos en el dominio del tiempo cuando estudiamos circuitos de primer y segundo orden.

Filtros

- Filtro pasa-altos:

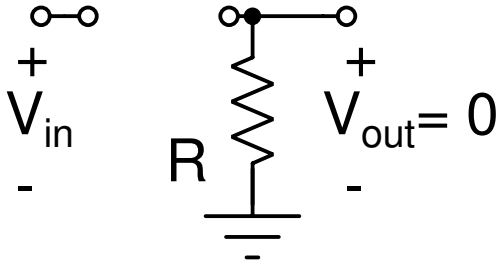




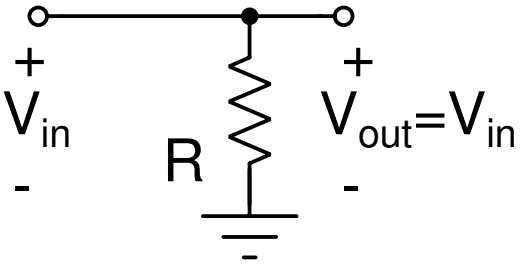
$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{sRC}{1+sRC}$$

$$\omega_c = \frac{1}{RC}$$

Baja frecuencia

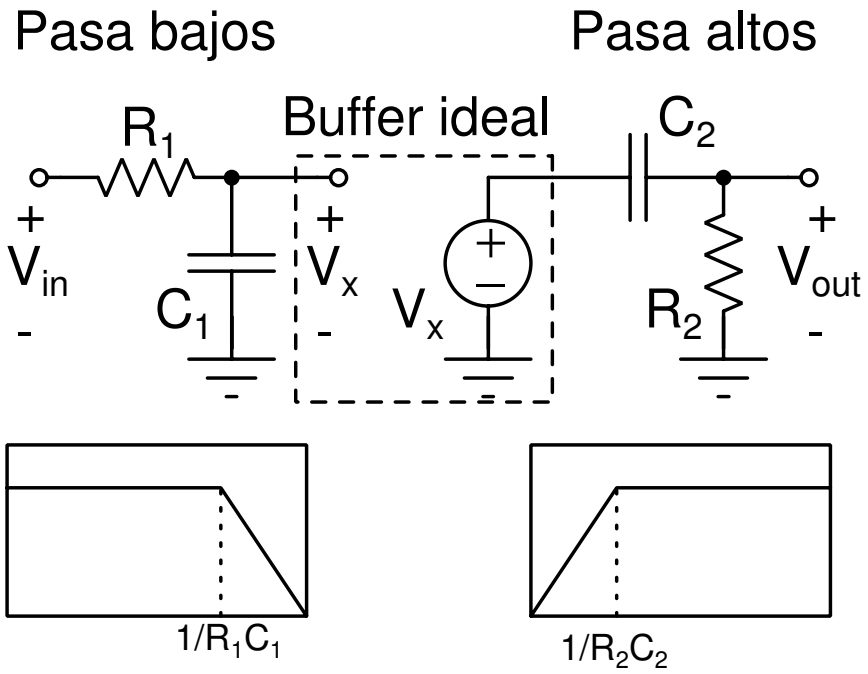


Alta frecuencia



Filtros

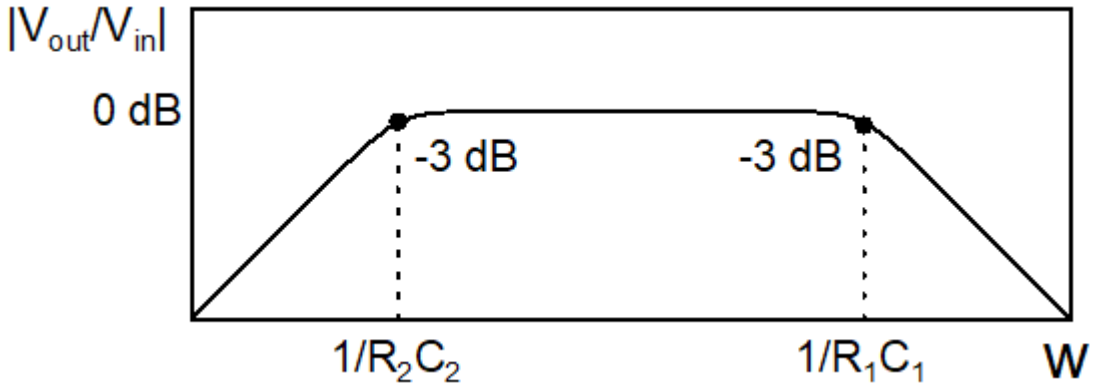
- Filtro pasa-banda:

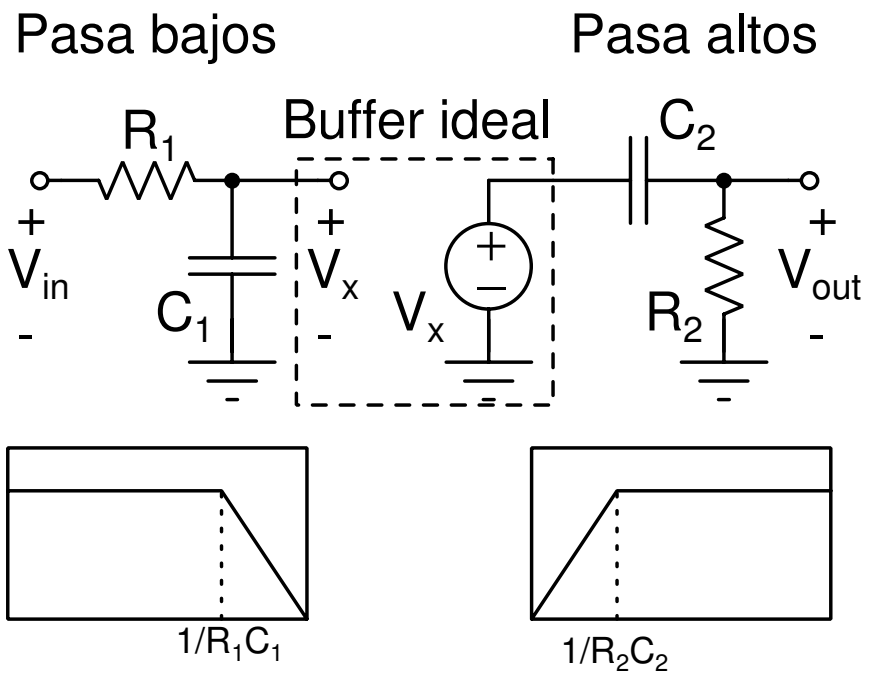


- Como están unidos por un buffer de voltaje ideal, las funciones de transferencia se multiplican.
- Es decir, los logaritmos de las magnitudes se suman.

Filtros

Pasa-banda:





Filtros

- Filtro rechaza-banda:
  - Basta con construir la siguiente función de transferencia, para $a < b < c < d$:

$$H(s) = A\left(1 + \frac{s}{a}\right)^{-1}\left(1 + \frac{s}{b}\right)\left(1 + \frac{s}{c}\right)\left(1 + \frac{s}{d}\right)^{-1}$$

- Bode de Magnitud se ve de la siguiente forma:
  - En (0,a) es constante
  - En (a,b) baja linealmente
  - En (b,c) es constante
  - En (c,d) sube linealmente
  - Desde d hacia adelante es constante

Filtros

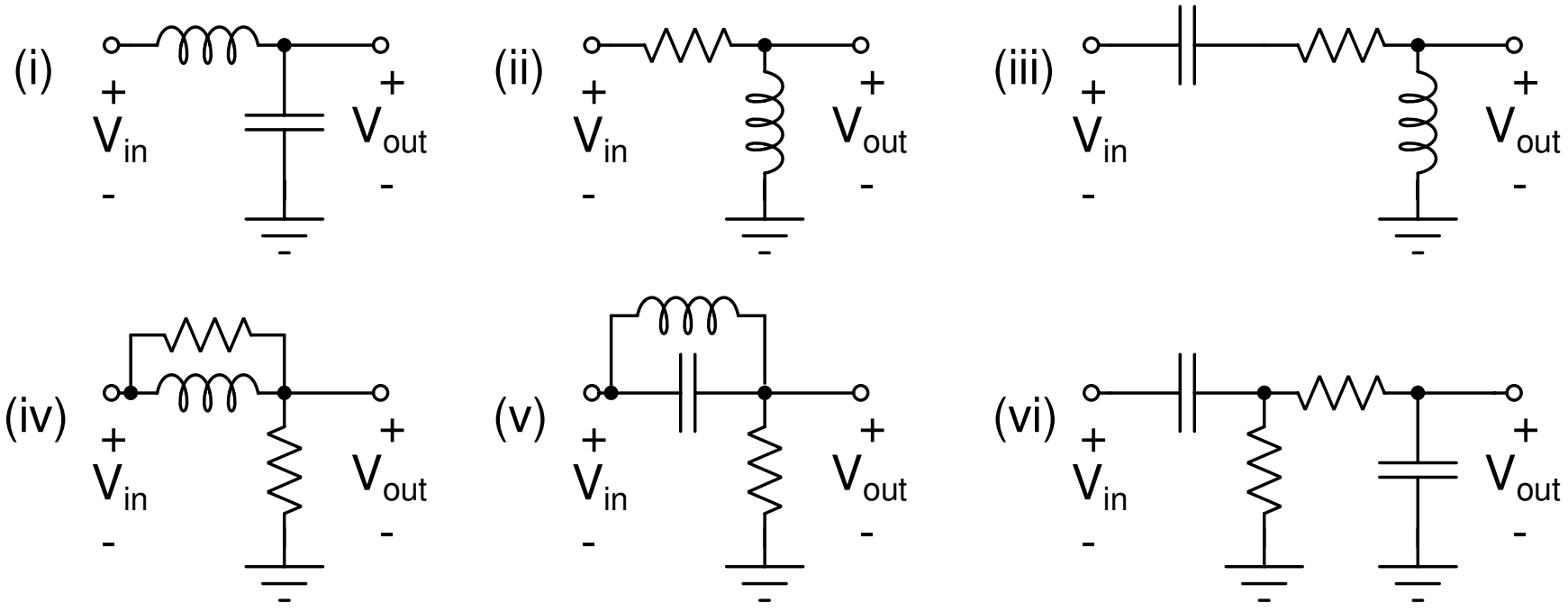
- Filtro rechaza-banda:
  - Basta con construir la siguiente función de transferencia, para $a < b < c < d$:

$$H(s) = A\left(1 + \frac{s}{a}\right)^{-1}\left(1 + \frac{s}{b}\right)\left(1 + \frac{s}{c}\right)\left(1 + \frac{s}{d}\right)^{-1}$$

- Esto se puede lograr con cuatro circuitos conectados a través de fuentes dependientes
  - El primer y cuarto circuito es un pasa-bajos (con frecuencias de corte a y d respectivamente)
  - El segundo y tercer circuito tiene que ser constante y luego creciente (con frecuencias de corte b y c respectivamente) (se puede construir con una fuente dependiente de corriente y un resistor en serie con un inductor)

Filtros

- **Ejemplo**: aproximando los circuitos a circuitos equivalentes para ciertos valores de frecuencia, trate de reconocer a qué tipo de filtro corresponde cada uno de los siguientes circuitos.



Filtros

- Respuestas:
  - (i): pasa bajos.
  - (ii): pasa altos.
  - (iii): pasa altos.
  - (iv): pasa los bajos, y atenúa las frecuencia altas según el divisor resistivo resultante a alta frecuencia.
  - (v): rechaza banda.
  - (vi): aparenta ser pasa banda. Es similar al último filtro visto en la clase, pero la ausencia del buffer hace que el segundo filtro cargue al primero por lo que las frecuencias de corte no se encuentran exactamente en los polos de cada uno de los filtros.

Fin ej.