IEE 2123 Circuitos Eléctricos
Prof. David Watts, PUC

Clase 10 y 11: Circuitos de 2do Orden

Contenidos:

Respuesta de circuitos de Orden N

Circuitos de segundo orden:

1. Métodos obtención de la ecuación diferencial
    1. Método directo
    2. Método del operador
2. Solución
    1. Respuesta del circuito
3. Ejemplos

Capítulo 9 Dorf 6ª Edición

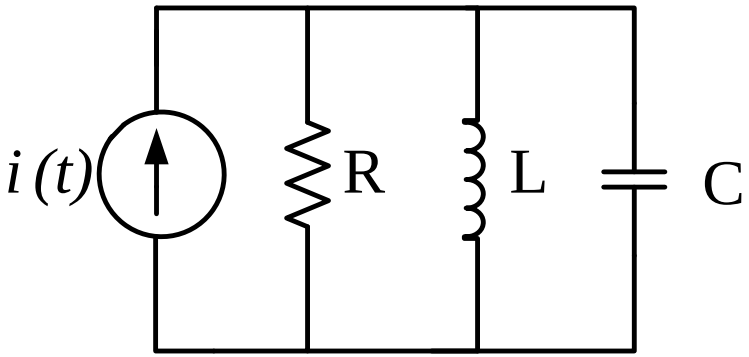
Respuesta de circuitos orden n

- Ejemplos:
  - Reducción de circuitos y orden
  - Relación entre circuitos y la ecuación diferencial
    - Fuente y la respuesta forzada
    - Régimen permanente y transitorio
  - Impedancia operacional Z(D) y método del operador

Circuitos de segundo orden

- **Circuito de segundo orden:** es un circuito con 2 elementos que almacenen energía y múltiples resistencias y fuentes.

- **Variables:** el valor de un voltaje o de una corriente en este tipo de circuitos corresponde a la solución de una ecuación diferencial lineal de segundo orden.



Circuitos de 2do Orden

Obtención de la Ecuación

1. Métodos obtención de la ec. diferencial

- **Métodos:** para obtener la ecuación diferencial de 2º orden podemos usar:

  1. Método directo
  2. Método del operador

- **Solución:** empleando la ecuación diferencial y las **condiciones iniciales** se procede a determinar la respuesta natural y la respuesta forzada del circuito.

- **Observación:** los métodos se pueden utilizar en circuitos de orden superior a 2.

1.1. Método directo

- **Descripción:**

1. **Escoger dos variables**, x_1 y x_2 , normalmente voltaje en el C y/o corriente en la L.

2. Escribir una **ecuación diferencial de 1er orden de x_1** en función de x_2 (ec.(1)):

$$\frac{dx_1}{dt} = f(x_1, x_2)$$

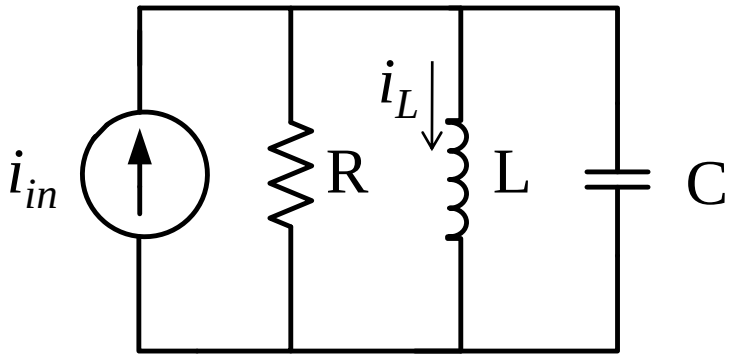
3. Obtener otra ecuación diferencial de 1er orden de la cual podamos **despejar x_2 en función de x_1**(ec.(2)).

4. **Sustituir** la ec. (2) en la ec. (1).

1.1. Método directo:
Aplicación.

Obtener la ecuación diferencial en la variable i_L:

Solución:



1. Elegimos las variables v_C e i_L.
2. LCK:

$$i_{in}(t) = \frac{v_C(t)}{R} + i_L(t) + C\frac{dv_C(t)}{dt}$$

3. Relacionamos las variables de interés:

$$v_C(t) = v_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt}$$

4. Reemplazando:

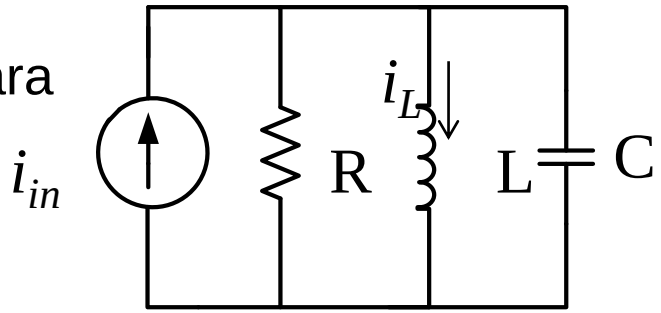
$$\frac{L}{R}\frac{di_L(t)}{dt} + i_L(t) + CL\frac{d^2 i_L(t)}{dt^2} = i_{in}(t)$$

1.1. Método directo:
Aplicación.

Normalizando:

$$\frac{d^2 i_L(t)}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{di_L(t)}{dt} + \frac{1}{LC} i_L(t) = \frac{1}{LC} i_{in}(t)$$

Importante: debemos recordar que para resolver ecuaciones de segundo orden necesitamos 2 condiciones iniciales, o sea:

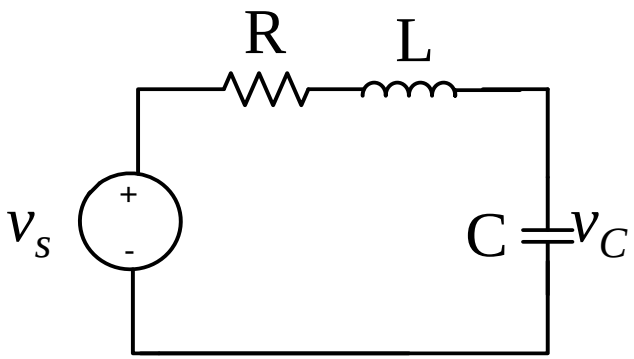


$$i_L(0^+) \text{ y } \frac{di_L(0^+)}{dt}$$

1.1. Método directo:
Aplicación.

Obtener la ecuación diferencial en la variable v_C:

Solución:



1. Escogemos las variables i_L y v_C
2. LKV:

$$v_s(t) = Ri_L(t) + L\frac{di_L(t)}{dt} + v_C(t)$$

3. Relacionamos las variables:

$$i_C = i_L = C\frac{dv_C(t)}{dt}$$

4. Reemplazando y normalizado:

$$\boxed{\frac{d^2v_C(t)}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{1}{LC}v_C(t) = \frac{1}{LC}v_s}$$

- Y si me piden la corriente i_L?
  - Despejo i_L
- Impedancia Operacional Z(D) y el Operador D=d/dt
  - Ejemplo simple en la pizarra!
  - Ejemplo mas avanzado en pizarra!

1.2. Método del operador

- **Descripción:**

1. **Elegir** variable de interés (x_1).

2. Escribir una **ecuación diferencial** en términos de la variable x_1 y de una segunda variable x_2 y además obtener una ecuación adicional en términos de x_1 y x_2.

3. Para obtener 2 ecuaciones algebraicas en términos de s y de las variables antes escogidas, usar el **operador s**:

$$s = \frac{d}{dt}\,;\ \frac{1}{s} = \int dt$$

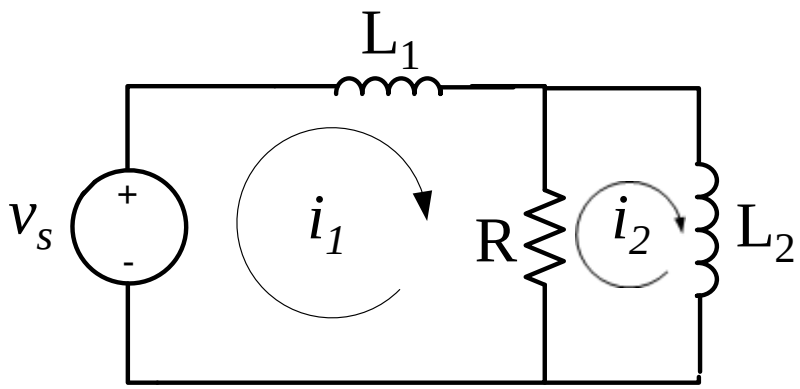
4. **Despejar** la variable de interés con cualquier método.

5. Pasar el operador s a función del tiempo.

1.2. Método del operador:
Aplicación.

Obtener la ecuación diferencial para la corriente i_{L2}

Solución:



Hacemos mallas:

$$v_s = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + R(i_1(t) - i_2(t))$$

$$0 = R(i_2(t) - i_1(t)) + L_2 \frac{di_2(t)}{dt}$$

Para facilitar el ejemplo ,supongamos:

$$R = 1\Omega;\ L_1 = 1H;\ L_2 = 2H$$

Usamos el operador s:

$$si_1 + i_1 - i_2 = v_s$$

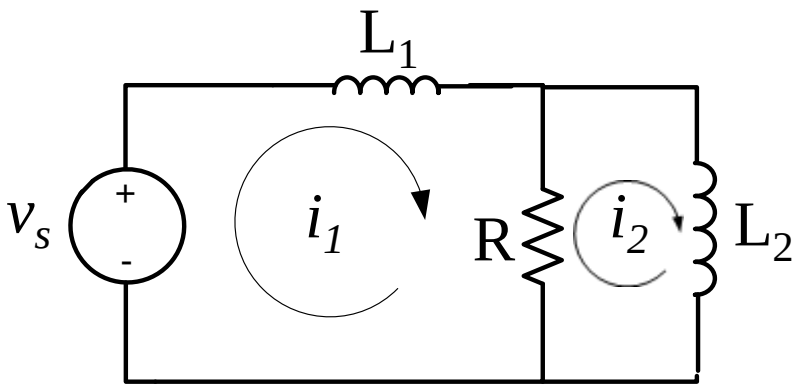
$$-i_1 + i_2 + 2si_2 = 0$$

1.2. Método del operador:
Aplicación.

Despejamos i_2:

$$i_2 = \frac{v_s}{2s^2 + 3s}$$

$$\left(2s^2 + 3s\right) \cdot i_2 = v_s$$



Volvemos al dominio del tiempo:

$$2\frac{d^2 i_2(t)}{dt^2} + 3\frac{di_2(t)}{dt} = v_s$$

Conociendo el voltaje de la fuente v_s se resuelve fácilmente.

2. Recordatorio del colegio

- **Ecuación de 2do grado:** $a\,x^2 + b\,x + c = 0$
- Discriminante: $b^2 - 4ac$ (> < = 0)

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- Interpretación geométrica – parábola

- Ejemplo: $x^2+2.5x+1 = 0$
  - Numerador: - 2.5 +- raíz (2.5x2.5 – 4x1) = - 2.5 +- raíz (6,25 – 4) = - 2.5 +- raíz (2,25) = - 2.5 +- 1,5 = -4 o -1
  - Denominador: 2 (simplemente dividir las soluciones por 2)
  - Soluciones ecuación característica: -2 y -0,5 ¿Siempre negativas? ¿Energía?¿R?
  - Soluciones ecuación homogénea: exponenciales negativas, ..

- Ejemplo en Circuito RLC
  - Los mismo pero mas fácil
  - Interpretación física nos ayuda
  - Circuitos RLC serie y paralelo son clásicos simples donde podemos desarrollar expresiones (fórmulas)

Solución

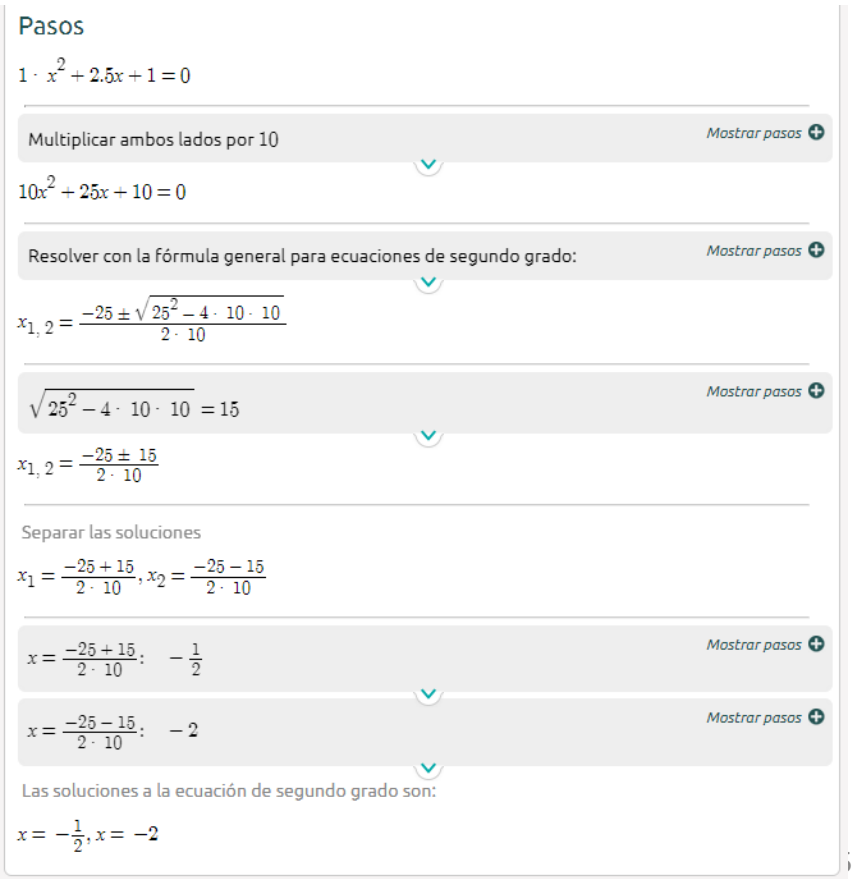
2. Recordatorio

- Ejemplo: $x^2+2.5x+1 = 0$
  - Solución:
  - -1/2 y -2

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

https://es.symbolab.com/solver/quadratic-equation-calculator/1x%5E%7B2%7D%2B2.5x%2B1%3D0?or=input

  - (del colegio)



Pasos

$1 \cdot x^2 + 2.5x + 1 = 0$

Multiplicar ambos lados por 10 — Mostrar pasos

$10x^2 + 25x + 10 = 0$

Resolver con la fórmula general para ecuaciones de segundo grado: — Mostrar pasos

$x_{1,2} = \frac{-25 \pm \sqrt{25^2 - 4 \cdot 10 \cdot 10}}{2 \cdot 10}$

$\sqrt{25^2 - 4 \cdot 10 \cdot 10} = 15$ — Mostrar pasos

$x_{1,2} = \frac{-25 \pm 15}{2 \cdot 10}$

Separar las soluciones

$x_1 = \frac{-25 + 15}{2 \cdot 10}, x_2 = \frac{-25 - 15}{2 \cdot 10}$

$x = \frac{-25 + 15}{2 \cdot 10}: \quad -\frac{1}{2}$ — Mostrar pasos

$x = \frac{-25 - 15}{2 \cdot 10}: \quad -2$ — Mostrar pasos

Las soluciones a la ecuación de segundo grado son:

$x = -\frac{1}{2}, x = -2$

Solución

2. Recordatorio

- **Ecuación de 2do grado:** $a x^2 + b x + c = 0$
- Discriminante: $b^2 - 4ac$ (> < = 0)

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- Interpretación geométrica – parábola

- Ejemplo: $x^2+2.5x+1 = 0$
  - Soluciones: -2 y -0,5 ¿Siempre negativas? ¿Energía?

- Ejemplo en Circuito RLC
  - Circuito RLC de parámetros (R,L,C) = (2Ω,5H,1/5F)
    - RC=2/5 y 1/RC=5/2=2,5
    - LC=5/5=1 y 1/LC=1
  - Comparación con la expresión $x^2+2.5x+1 = 0$
    - LC=1 y RC=1/2.5=1/5/2=2/5
  - Frecuencia resonante: 1/ raíz (LC)
  - Amortiguamiento: ½ RC
  - (Irwin 5th Ed. Pg. 380)

$$\frac{d^2 i_L(t)}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{di_L(t)}{dt} + \frac{1}{LC} i_L(t) = \frac{1}{LC} i_{in}(t)$$

Solución

2. Solución de LIBRO

- **Ecuación diferencial:** los voltajes y corrientes de un circuito de segundo orden obedecen a una ecuación diferencial cuya solución se puede estandarizar de la siguiente forma:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2\zeta\omega_0 \frac{dx(t)}{dt} + \omega_0^2 x(t) = f(t)$$

- **Solución particular o forzada:** normalmente está dada por la suma ponderada de *f(t)* más su derivada y su segunda derivada.

- **Solución natural u homogénea:** está dada por:

$$x^h(t) = Ke^{st}$$

donde K y s son constantes a determinar.

Solución

2. Solución

- Si igualamos a cero la ecuación diferencial y reemplazamos *x(t)* por la solución homogénea antes presentada:

$$\frac{d^2 Ke^{st}}{dt^2} + 2\zeta\omega_0 \frac{dKe^{st}}{dt} + \omega_0^2 Ke^{st} = 0$$

$$s^2 Ke^{st} + 2\zeta\omega_0 sKe^{st} + \omega_0^2 Ke^{st} = 0$$

$$\boxed{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2 = 0}$$

- Esta última expresión se denomina **polinomio característico**, y sus **raíces** son fundamentales para encontrar la respuesta homogénea del sistema.

Ejemplo en pizarra!

2.1. Respuesta del circuito

- **Polinomio característico:**

Coeficiente de amortiguamiento

$$s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2 = 0$$

Frecuencia natural

- **Coeficiente de amortiguamiento:** determina el tipo de solución del circuito:
  - $\zeta > 1$: Decrecimiento exponencial (**sobre**-amortiguado)
  - $\zeta < 1$: Decrecimiento exponencial sinusoidal (**sub-**amortiguado)
  - $\zeta = 1$: Decrecimiento amortiguado crítico

- **Frecuencia natural:** determina cuán rápido oscila la solución.

2.1. Respuesta del circuito

- **Tipos de respuesta:** las raíces del polinomio característico están dadas por:

$$s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2 = 0$$

$$s_1 = -\zeta\omega_0 + \omega_0\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

$$s_2 = -\zeta\omega_0 - \omega_0\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

ς>1 acá!

- **Amortiguamiento (ς)**

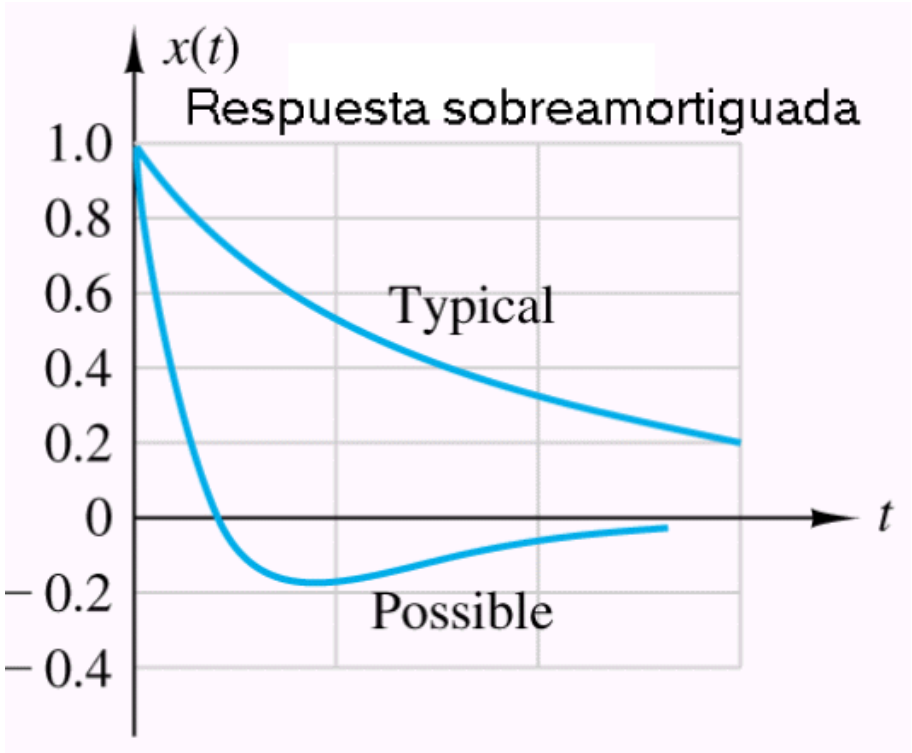
  dependiendo del valor del coeficiente de **amortiguamiento** tenemos 3 tipos de respuestas:

  - ς>1: Sobreamortiguada
  - ς <1: Subamortiguada
  - ς =1: Críticamente amortiguada

2.1. Respuesta del circuito:
Sobreamortiguada.

- Si $\zeta > 1$, s_1 y s_2 son reales y distintas:

$$x^h(t) = K_1 e^{\left(-\zeta\omega_0 + \omega_0\sqrt{\zeta^2-1}\right)t} + K_2 e^{\left(-\zeta\omega_0 - \omega_0\sqrt{\zeta^2-1}\right)t}$$



Solución – Respuesta del circuito

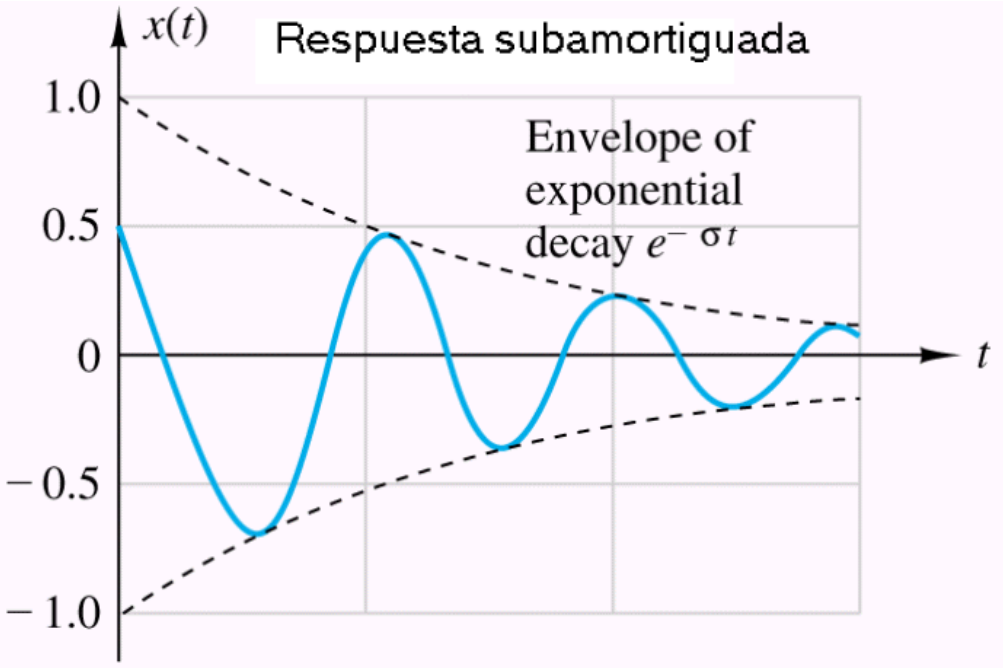
2.1. Respuesta del circuito:
Subamortiguada.

- Si $\zeta < 1$, s_1 y s_2 son complejas conjugadas:

$$x^h(t) = e^{-\sigma t}\left(A_1 \cos \omega_d t + A_2 \sin \omega_d t\right)$$

$$\sigma = \varsigma\omega_0 \qquad \omega_d = \omega_0\sqrt{1-\varsigma^2}$$

ς<1 acá!

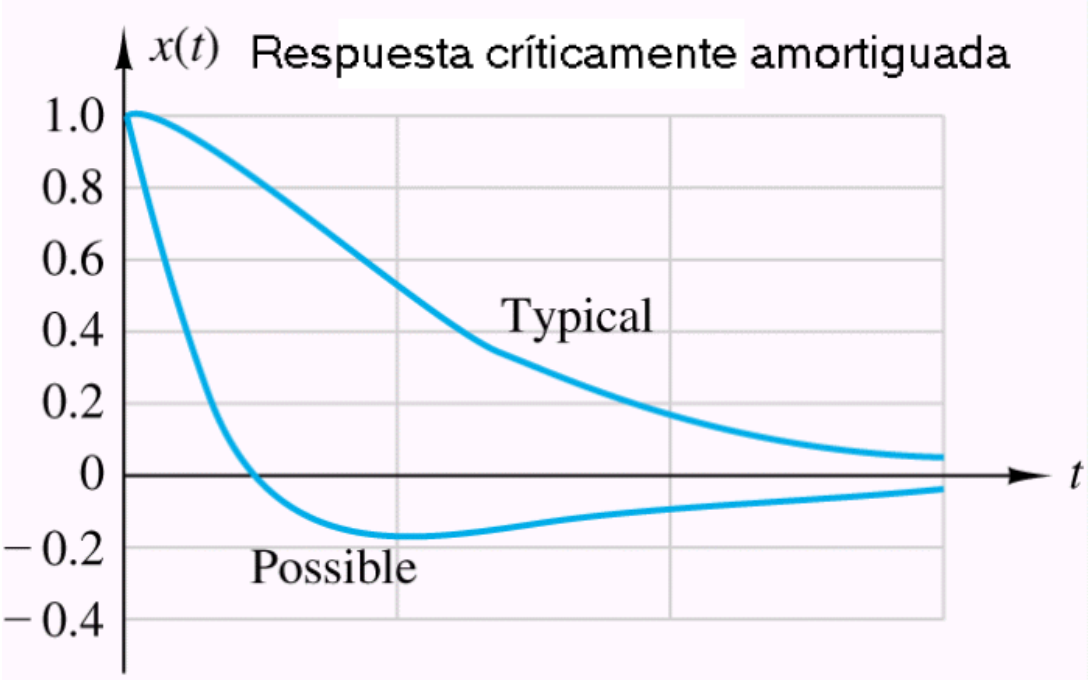


Solución – Respuesta del circuito

2.1. Respuesta del circuito:
Críticamente amortiguada.

- Si $\zeta = 1$, s_1 y s_2 son reales e iguales:

$$x^h(t) = K_1 e^{-\zeta\omega_0 t} + K_2 t\, e^{-\zeta\omega_0 t}$$



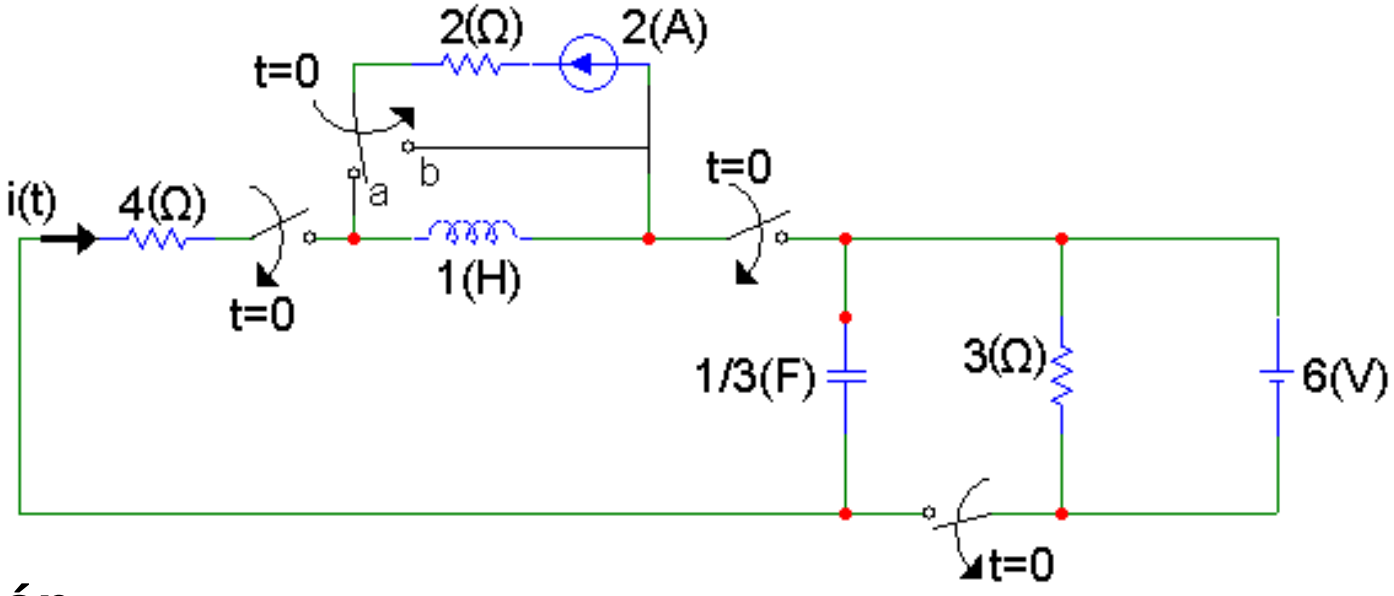
3. Ejemplos

- Ejemplo y desarrollo detallado de las diversas respuestas: http://circuitos2eo.files.wordpress.com/2011/08/cap7.pdf

- Ejemplos circuitos de segundo orden:
  - Respuesta natural
  - Respuesta completa

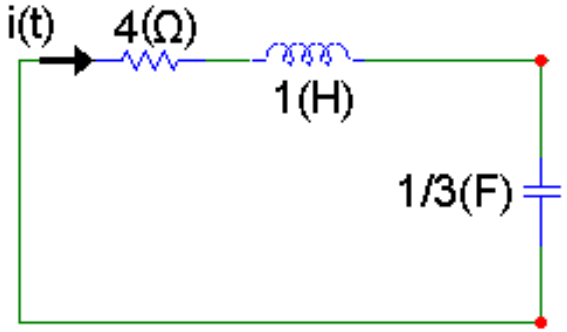
3. Ejemplos:
Respuesta natural.

Calcular la respuesta natural de *i(t)*, para t > 0:



Solución:

Para t>0:



Ejemplos

3. Ejemplos:
Respuesta natural.

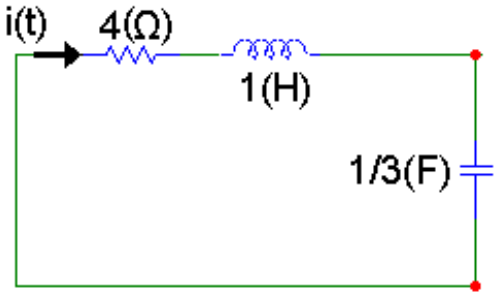
- LVK:

$$Ri(t) + v_L(t) + v_C(t) = 0$$

$$\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(x)dx + L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = 0$$

$$\frac{1}{C}i(t) + L\frac{d^2i(t)}{dt^2} + R\frac{di(t)}{dt} = 0$$

$$\frac{d^2i(t)}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{LC}i(t) = 0$$



Si comparamos la ecuación recién obtenida con:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2\zeta\omega_0\frac{dx(t)}{dt} + \omega_0^2 x(t) = f(t)$$

Ejemplos

3. Ejemplos:
Respuesta natural.

Recordamos:

$$s_1 = -\varsigma\omega_0 + \omega_0\sqrt{\varsigma^2 - 1}$$

$$s_2 = -\varsigma\omega_0 - \omega_0\sqrt{\varsigma^2 - 1}$$

Luego la solución del polinomio característico es:

$$s_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{LC}}\right)^2}$$

$s_1 = -1$

$s_2 = -3$

Por lo tanto, la respuesta es sobreamortiguada y está dada por:

$$i(t) = A_1 e^{-t} + A_2 e^{-3t}$$

Notar que no hay respuesta forzada ya que $f(t)=0$.

Ejemplos

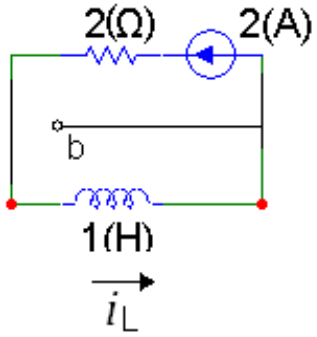
3. Ejemplos:
Respuesta natural.

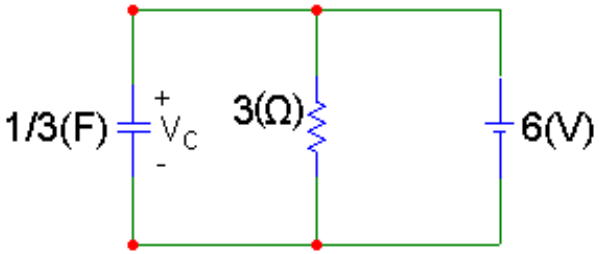
- Buscamos las condiciones iniciales:

En t = 0⁻

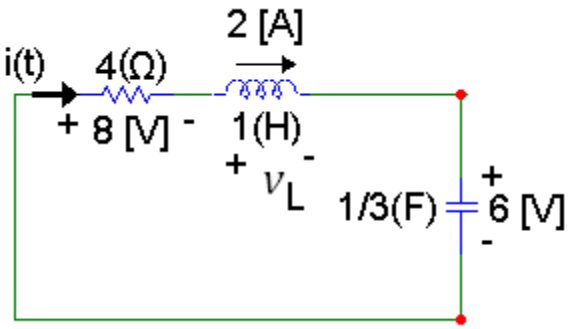
$$i_L(0^-) = 2[A] = i_L(0^+)$$

$$v_C(0^-) = 6[V] = v_C(0^+)$$





En t = 0⁺



LKV: $V_R + V_L + V_C = 0$

$8? + V_L + 6 = 0$

$v_L = -8 - 6 = -14\ [V]$

Para resolver se requiere la corriente de la inductancia y su derivada (que sale de su propia expresión $V_L = L di/dt$)

Set de condiciones iniciales:

$i_L(0^+) = 2\ [A]$

$v_L(0^+) = -14\ [V]$

Ejemplos

3. Ejemplos:
Respuesta natural.

Entonces:

$$i(t) = A_1 e^{-t} + A_2 e^{-3t}$$

$$v_L(t) = L\frac{di(t)}{dt} = -A_1 e^{-t} - 3A_2 e^{-3t}$$

L = 1

$$\Rightarrow$$

$$i(0^+) = A_1 + A_2 = 2$$

$$v_L(0^+) = -A_1 - 3A_2 = -14$$

$A_1 = -4$

$A_2 = 6$

Finalmente:

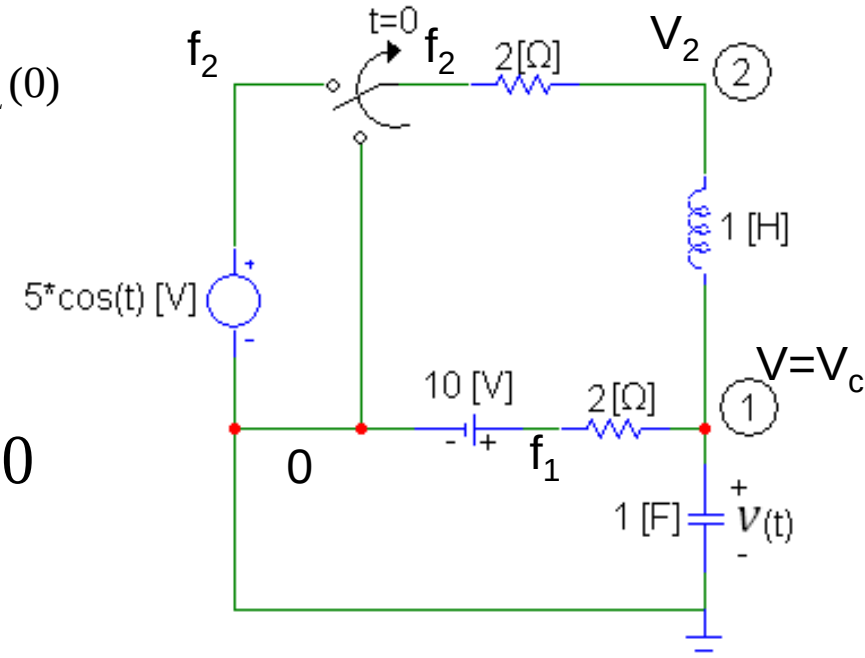
$$\boxed{i(t) = -4e^{-t} + 6e^{-3t}\,[A]}$$

Ejemplos

3. Ejemplos:
Respuesta completa.

Calcular la respuesta completa de *v(t)*, para *t >0*:

Solución: $v_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt}$ $i_L(t) = \frac{1}{L}\int_0^t v_L(t)dt + i_L(0)$



- LCK en 1 y 2 para *t>0*:
  (suma corrientes entrando = 0, IL=)

N1: $\frac{1}{1}\int_{-\infty}^{t}(v_2 - v)dx + \frac{f_1 - v}{2} + 1\frac{d(-v)}{dt} = 0$

N2: $\int_{-\infty}^{t}(v - v_2)dx + \frac{f_2 - v_2}{2} = 0$

Con: $f_1(t) = 10[V]$ y $f_2(t) = 5\cos(t)[V]$

Ejemplos

3. Ejemplos:
Respuesta completa.

Resolvemos con el método del operador s, luego las dos ecuaciones anteriores quedan:

$$\frac{(v_2 - v)}{s} + \frac{f_1 - v}{2} - sv = 0$$

$$\frac{(v - v_2)}{s} + \frac{f_2 - v_2}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_2(v) = \frac{sf_2 + 2v}{s + 2}$$

Reemplazamos $v_2(v)$ en la primera ecuación, quedándonos:

$$s^2 v + \frac{5}{2} sv + 2v = f_1 + f_2 + \frac{sf_1}{2}$$

Volvemos al dominio del tiempo:

$$\frac{d^2 v(t)}{dt} + \frac{5}{2}\frac{dv(t)}{dt} + 2v(t) = 5\cos(t) + 10$$

3. Ejemplos:
Respuesta completa.

- Solución homogénea: resolvemos el polinomio característico de la ecuación:

$$\frac{d^2v(t)}{dt} + \frac{5}{2}\frac{dv(t)}{dt} + 2v(t) = 5\cos(t) + 10$$

$$s^2 + \frac{5}{2}s + 2 = 0 \Rightarrow \quad s_{1,2} = -\frac{5}{4} \pm j\frac{\sqrt{7}}{4}$$

Subamortiguado

Luego la respuesta homogénea está dada por:

$$v^h(t) = e^{-\frac{5t}{4}}\left(K_1\cos\left(\frac{\sqrt{7}}{4}t\right) + K_2\sin\left(\frac{\sqrt{7}}{4}t\right)\right)$$

Interpretar:

Ejemplos

3. Ejemplos:
Respuesta completa.

- Solución particular:

$$v^p(t) = A_1 \sin(t) + A_2 \cos(t) + A_3$$

Fuente sinusoidal

Fuente constante

Reemplazando en la ecuación diferencial para encontrar los coeficientes indeterminados:

$$(-A_1 \sin(t) - A_2 \cos(t)) + \frac{5}{2}(A_1 \cos(t) - A_2 \sin(t)) +$$

$$2(A_1 \sin(t) + A_2 \cos(t) + A_3) = 5\cos(t) + 10$$

$$\left.\begin{aligned} 2A_3 &= 10 \\ A_1 - \frac{5}{2}A_2 &= 0 \\ \frac{5}{2}A_1 + A_2 &= 5 \end{aligned}\right\} \quad A_1 = \frac{50}{29}; \quad A_2 = \frac{20}{29}; \quad A_3 = 5$$

Ejemplos

3. Ejemplos:
Respuesta completa.

Luego la solución particular está dada por:

$$v^p(t) = \frac{50}{29}\sin(t) + \frac{20}{29}\cos(t) + 5$$

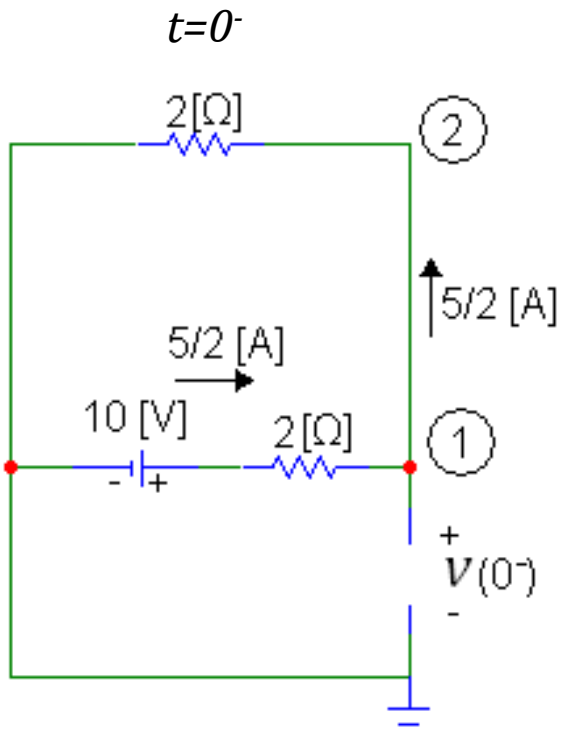
Y la solución completa:

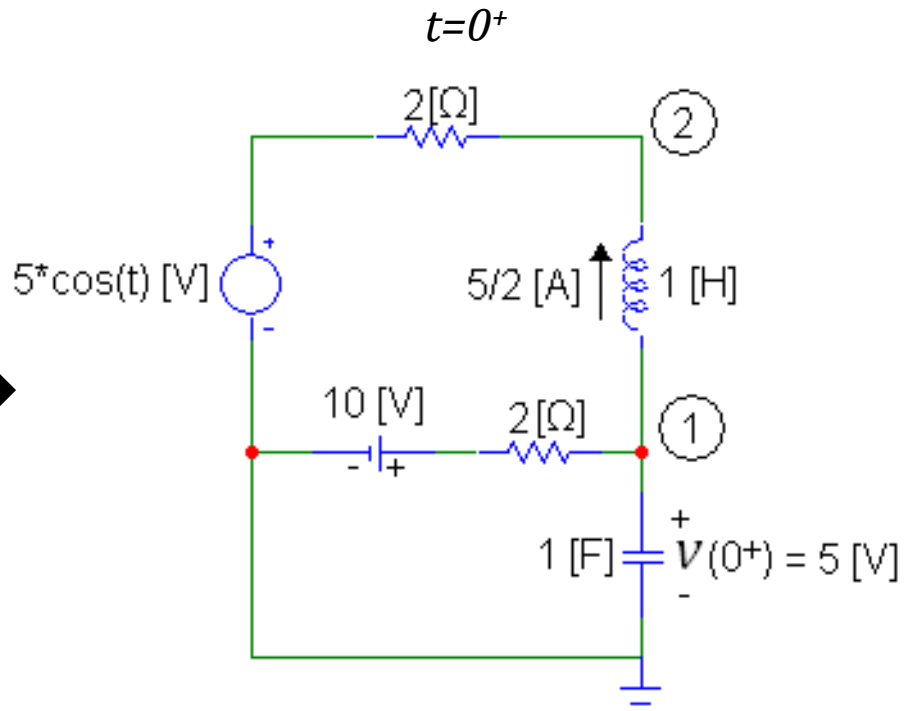
$$v(t) = e^{-\frac{5t}{4}}\left(K_1 \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{4} t \right) + K_2 \sin\left(\frac{\sqrt{7}}{4} t \right) \right) + \frac{50}{29}\sin(t) + \frac{20}{29}\cos(t) + 5$$

Para determinar las constantes K_1 Y K_2 buscamos las condiciones iniciales.

3. Ejemplos:
Respuesta completa.

- Condiciones iniciales:

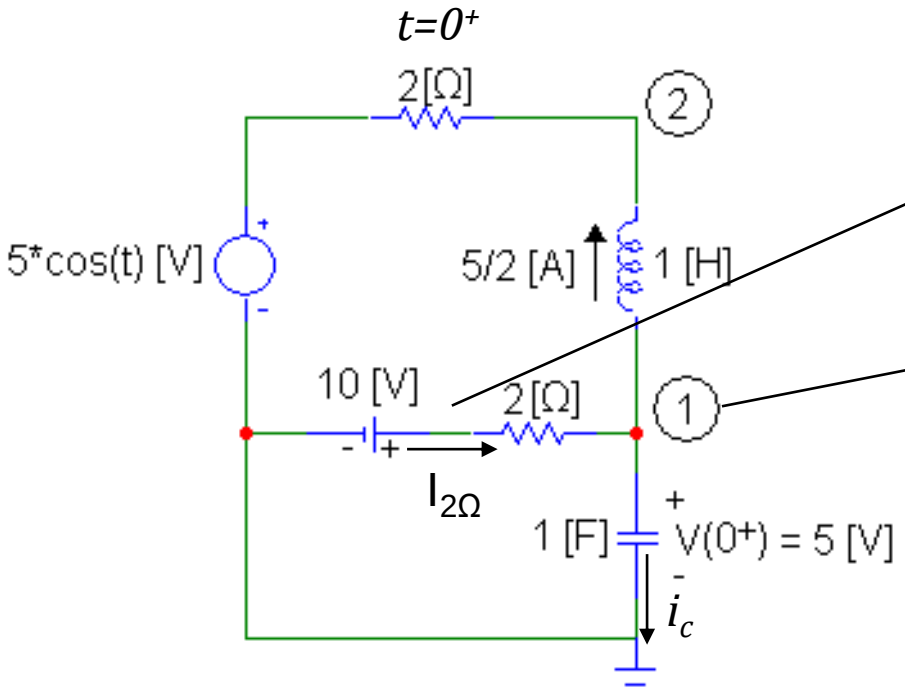




$$v(0^-) = 10 - 2 \cdot \frac{5}{2} = 5[V]$$

3. Ejemplos:
Respuesta completa.

- Condiciones iniciales:



$$I_{2\Omega} = \frac{10-5}{2} = \frac{5}{2}[A]$$

LKC:

$$I_{2\Omega} = i_C + \frac{5}{2} \rightarrow i_C = 0$$

Set de condiciones iniciales:

$v(0^+) = 5\ [V]$

$i_C(0^+) = 0\ [A]$

Ejemplos

3. Ejemplos:
Respuesta completa.

Entonces:

$$v(0) = 5 = e^{-\frac{5*0}{4}}(K_1\cos(0) + K_2\sin(0)) + \frac{50}{29}\sin(0) + \frac{20}{29}\cos(0) + 5$$

$$\Rightarrow \quad K_1 = -\frac{20}{29}$$

$$i_c(t) = C\frac{dV(t)}{dt} = \frac{-5}{4}e^{-\frac{5}{4}t}(K_1\cos(\frac{\sqrt{7}}{4}t) + K_2\sin(\frac{\sqrt{7}}{4}t)) + \ldots$$

$$\ldots\ e^{\frac{-5t}{4}}(-K_1\frac{\sqrt{7}}{4}\sin(\frac{\sqrt{7}}{4}t) + K_2\frac{\sqrt{7}}{4}\cos(\frac{\sqrt{7}}{4}t)) + \frac{50}{29}\cos(t) - \frac{20}{29}\sin(t)$$

$$i_c(0) = 0 = \frac{-5}{4}K_1 + K_2\frac{\sqrt{7}}{4} + \frac{50}{29} \quad \Rightarrow \quad K_2 = -\frac{300}{203}\sqrt{7}$$

3. Ejemplos:
Respuesta completa.

Finalmente:

$$v(t) = e^{-\frac{5t}{4}}\left(\frac{-20}{29}\cos\left(\frac{\sqrt{7}}{4}t\right) + \frac{-300\sqrt{7}}{203}\sin\left(\frac{\sqrt{7}}{4}t\right)\right) + \frac{50}{29}\sin(t) + \frac{20}{29}\cos(t) + 5$$

Veamos que ocurre en régimen permanente:

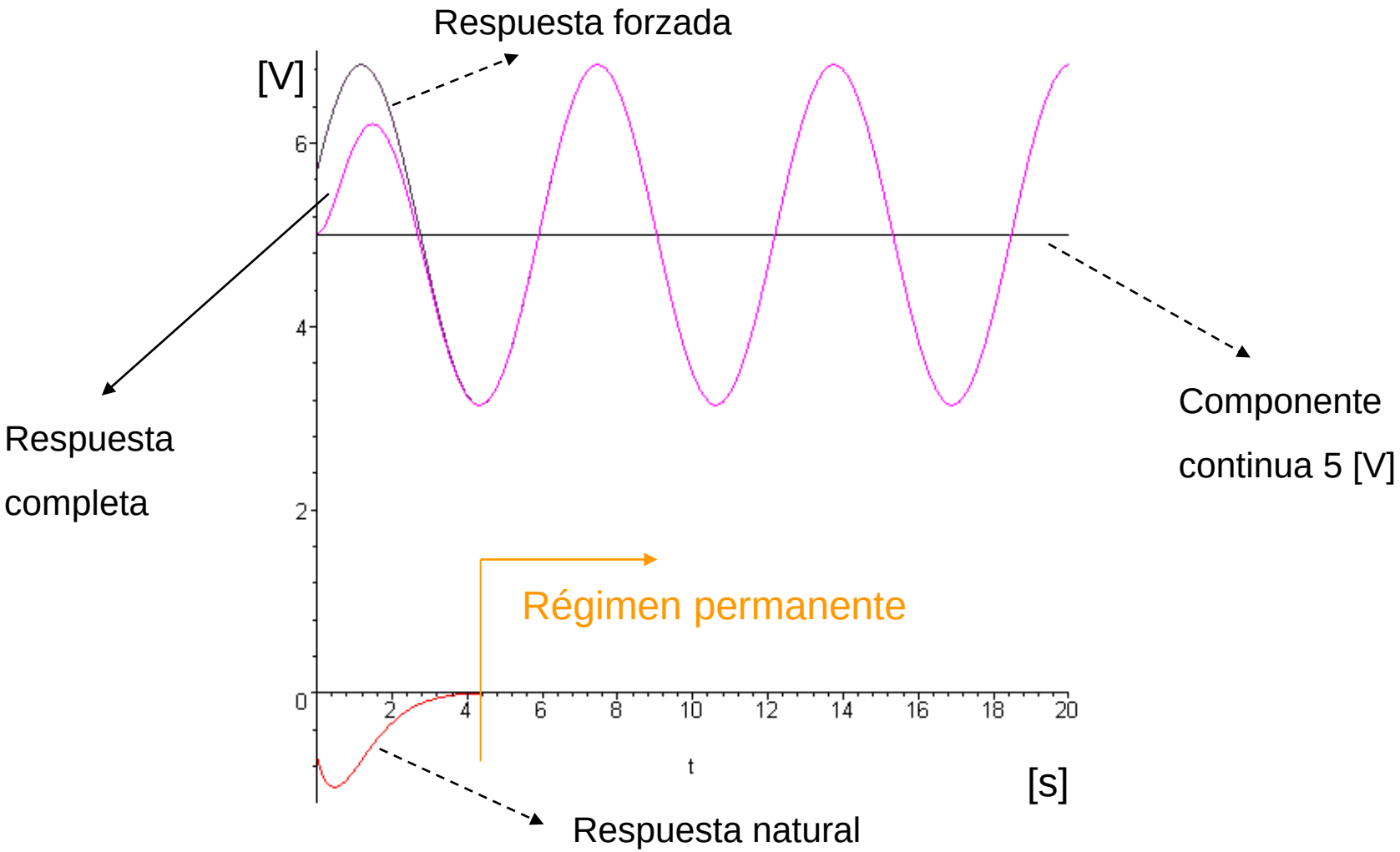
$$v(t >> 1) = \frac{50}{29}\sin(t) + \frac{20}{29}\cos(t) + 5 = \frac{10\sqrt{29}}{29}\cos(t - 68.2^{o}) + 5$$

Ángulo de desfase respecto a la fuente externa

Componente continua

Ejemplos

3. Ejemplos:
Respuesta completa.



3. Ejemplos:
Recomendación: Usar fasores!

En régimen permanente:

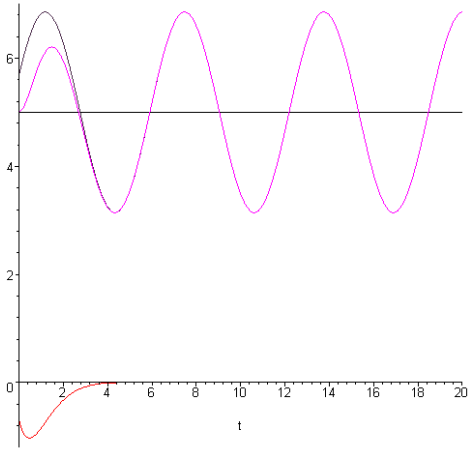
$$v(t >> 1) = \frac{50}{29}\sin(t) + \frac{20}{29}\cos(t) + 5 = \frac{10\sqrt{29}}{29}\cos(t - 68.2^{\circ}) + 5$$

Ángulo de desfase respecto a la fuente externa

Componente continua

Finalmente:

- Esta metodología es demasiado larga y mediante el uso de fasores la solución particular habría salido muchísimo mas rápido.
- Se recomienda usar **fasores**!



Ejemplos

Detalle

- Recordemos que si la función excitación (entrada o fuente) tiene la misma forma que uno de los componentes de la respuesta natural, x_n, como solución particular se debe utilizar:

$$x^p(t) = t^a x_n(t)$$

con “a” número entero elegido de tal manera que x^p no esté duplicada en la respuesta natural (se usa la menor potencia “a” de t)