Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ingeniería Eléctrica
IEE2123 - Circuitos Eléctricos
Segundo Semestre de 2022

Ayudantía 4

Profesor: Samuel Cordova
Ayudante: Felipe Burgos - fba@uc.cl

Problema 1
El circuito de la figura 1 se encontraba en regimen permanente hasta que por error se desconectó el inductor tal como muestra la figura. ¿Que esperaría que ocurriese?, ¿y si fuese un condensador en vez de un inductor?.

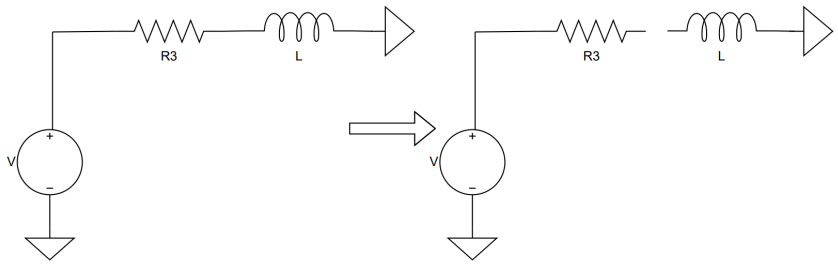


Figura 1: Circuito 1

Solución:
Dada la ecuación que modela el voltaje de un inductor

$$V_L = L * \frac{dI_L}{dt} \tag{1}$$

En el momento en que se desconecta el cable la variación de corriente es abrupta, como la función escalón de la figura 2.

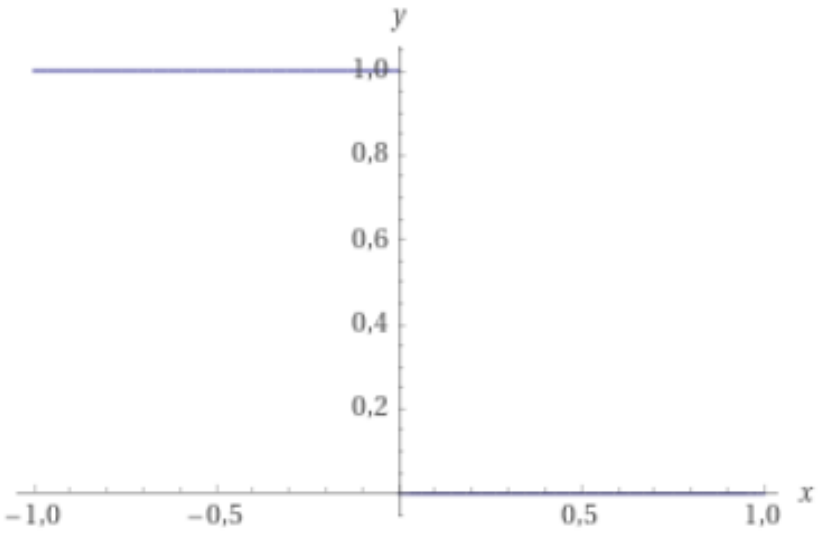


Figura 2

Aquí notamos en que en t = 0 la derivada de la función es infinita, por lo que el voltaje del inductor va a empezar a crecer de forma indefinida, hasta que llegará a tal punto que el voltaje presente hará que el aire se ionice y se forme un arco eléctrico que cortocircuitaría con el extremo de la resistencia, descargando así el inductor.

Si fuese un condensador, planteando su ecuación que relaciona el voltaje y la corriente:

$$i_c = \frac{dv_C}{dt}$$

Notamos que, como la corriente del condensador será 0 A, la variación de voltaje es nula, por lo tanto, el condensador queda cargado con el voltaje que tenía en el instante previo a la desconexión

Problema 2
El circuito de la figura 3 se encontraba en regimen permantene hasta que en t = 0 se abrió el switch.

- Determine paso a paso la ecuación diferencial que modela la corriente del inductor y el voltaje del condensador del circuito para $t > 0$ junto con las condiciones iniciales necesarias para resolver la ecuación.
- Para $t > 0$, considerando un valor de L = 0.5 H, determine paso a paso los valores (o condiciones) de R2, R3 y C para obtener una respuesta natural del circuito con $\omega_0 = 10$ rad/s y una respuesta subamortiguada.
- Con los valores (o condiciones) encontrados en el ítem anterior y eligiendo $\zeta = 0.9$, encuentre la corriente i(t) resolviendo la ecuación diferencial (considere R1 = R3 = 3 Ω).

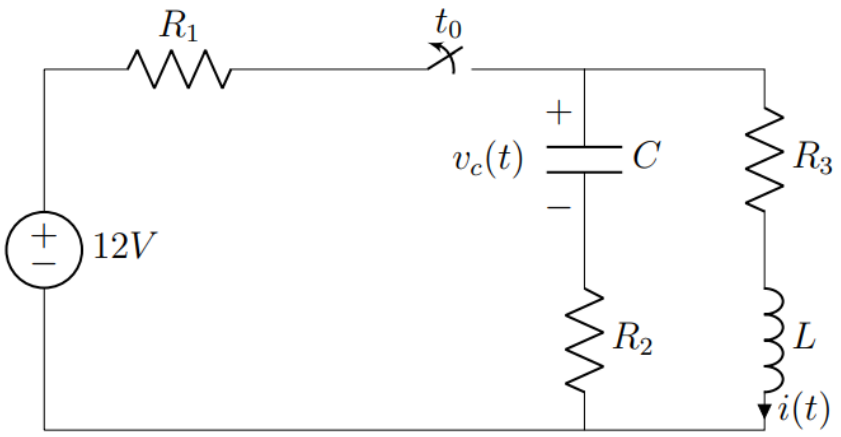


Figura 3: Circuito 2

Solución:
Pregunta A
Primero, calculamos las condiciones iniciales, notamos que cuando el switch se encuentra cerrado y por ende el circuito esta en régimen permanente, el condensador actua como circuito abierto, mientras que el inductor como cortocircuito.

Por lo tanto el circuito puede ser descrito como el de la figura 4, donde i(t) es la corriente que circula y es igual a la del inductor, mientras que Vx corresponde al voltaje del condensador cargado.

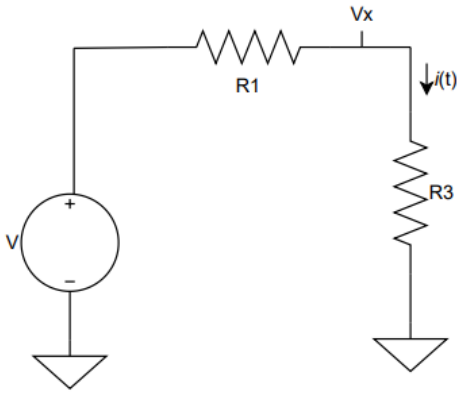


Figura 4

En esa figura se puede ver como la corriente que fluye por las resistencias corresponde a

$$I_L(t=0) = \frac{12}{R1+R3} \tag{2}$$

Mientras que el voltaje del condensador corresponde al voltaje que al que esta sometida la resistecia $R3$, por lo que

$$V_c(t=0) = \frac{12*R3}{R1+R3} \tag{3}$$

Luego, si analizamos el circuito una vez se abrió el switch (figuras 3 y 5), la malla planteada queda como

$$-V_c - i*(R3+R2) - V_L = 0 \tag{4}$$

Y si lo multiplicamos por -1 por conveniencia resulta en:

$$V_c + i*(R3+R2) + V_L = 0$$

Luego, dado que todos los componentes estan en serie se puede concluir que

$$i = i_c = I_L \tag{5}$$

Para obtener la corriente del inductor, queremos dejar todos los componentes de la malla planteada en función de V_L o de I_L. Si se deriva con respecto al tiempo la malla planteada se obtiene:

$$\frac{dV_c}{dt} + \frac{dI_L}{dt}(R3+R2) + \frac{dV_L}{dt} = 0 \tag{6}$$

Si despejamos la relación entre corriente y voltaje de un condensador y reemplazamos en la ecuación se obtiene:

$$\frac{i_c}{C} = \frac{dV_c}{dt} \tag{7}$$

Por lo que la ecuación (6) resulta en

$$\frac{i_c}{C} + \frac{dI_L}{dt}(R3+R2) + \frac{dV_L}{dt} = 0 \tag{8}$$

Luego, teniendo en mente la ecuación de voltaje de un inductor

$$V_L = L\frac{dI_L}{dt} \tag{9}$$

Si derivamos esta relación se llega a

$$\frac{dV_L}{dt} = L\frac{d^2I_L}{dt^2} \tag{10}$$

Por lo tanto la malla final termina obteniendo la siguiente forma

$$\frac{i_c}{C} + \frac{dI_L}{dt}(R3 + R2) + L\frac{d^2I_L}{dt^2} = 0 \tag{11}$$

Finalmente, imponiendo la condición de las corrientes (5) y dividiendo por L se llega a

$$\frac{I_L}{LC} + \frac{dI_L}{dt}(\frac{R3 + R2}{L}) + \frac{d^2I_L}{dt^2} = 0 \tag{12}$$

Llegando así a la ecuación (12) que modela la corriente del inductor en el circuito.

Para obtener el voltaje del condensador, notamos que usando la expresión de la malla obtenida solo falta transformar V_L en función del voltaje o corriente del condensador, por lo que plantemamos la ecuación de voltaje de un inductor.

$$V_L = L\frac{dI_L}{dt} \tag{13}$$

Junto a esto, sabemos que la corriente de un inductor corresponde a

$$i_C = C\frac{dV_c}{dt} \tag{14}$$

E imponiendo la condición de corrientes (5) e igualando (13) y (14) se llega a que

$$V_L = LC\frac{d^2V_c}{dt^2} \tag{15}$$

Por lo tanto, reemplazando el término obtenido en la malla se llega a

$$V_c + i * (R3 + R2) + LC\frac{d^2V_c}{dt^2} = 0 \tag{16}$$

E imponiendo (5) y (14) en el término i se termina llegando a

$$V_c + \frac{dV_c}{dt} * (R3 + R2)C + LC\frac{d^2V_c}{dt^2} = 0 \tag{17}$$

Finalmente, si se divide por LC se termina obteniendo

$$\frac{V_c}{LC} + \frac{dV_c}{dt} * \frac{(R3 + R2)}{L} + \frac{d^2V_c}{dt^2} = 0 \tag{18}$$

Que corresponde a la ecuación diferencial del voltaje del condensador.

Pregunta B

Escribiendo el polinomio característico de la forma

$$x^2 + 2\zeta\omega + \omega^2 = 0 \tag{19}$$

Se llega a

$$x^2 + (\frac{R3 + R2}{L})x + \frac{1}{LC} = 0 \tag{20}$$

Igualando el término ω^2 de (19) en (20) se llega a que

$$\omega^2 = \frac{1}{LC} \tag{21}$$

Por lo tanto, reemplazando el valor de L y ω dado, se despeja C y se concluye que su valor es de 0,02 F.

Para obtener las restricciones del coeficiente de amortiguación ζ, igualamos los términos de la ecuación (19) y (20).

$$2\zeta\omega = \frac{R3 + R2}{L} \tag{22}$$

Si se reemplazan los valores dados se llega a que

$$\zeta = \frac{R3 + R2}{10} \tag{23}$$

Y como se pide que el circuito este subamortiguado, imponemos la condición de que $\zeta < 1$.

$$\frac{R3 + R2}{10} < 1 \tag{24}$$

$$R3 + R2 < 10 \tag{25}$$

Por lo tanto se llegó a que la suma de R3 y R2 debe ser menor a 10 Ω para que el circuito se encuentre subamortiguado.

Pregunta C

Notamos que considerando los valores para R1 y R3 entregados, aun falta conocer el valor de R2 para resolver la ecuación diferencial de la corriente del inductor, por lo que usando la ecuación (23) e imponiendo que ζ tiene un valor de 0.9, se concluye que

$$0{,}9 = \frac{3 + R2}{10} \tag{26}$$

$$R2 = 6\Omega \tag{27}$$

Por lo tanto, el polinomio característico

$$x^2 + (\frac{R3 + R2}{L})x + \frac{1}{LC} = 0$$

Termina siendo (28) si se reemplazan los valores.

$$x^2 + 18x + 100 = 0 \tag{28}$$

Cuya solución es

$$x = -9 \pm j\sqrt{19} \tag{29}$$

Por lo tanto, la corriente del circuito es

$$i(t) = e^{-9t}(ACos(\sqrt{19} * t) + BSin(\sqrt{19} * t)) \tag{30}$$

Imponiendo la condición inicial que la corriente en t = 0 es

$$I_L(t = 0) = \frac{12}{R1 + R3} = 2A \tag{31}$$

Se llega a que A = 2, resultando la corriente en

$$i(t) = e^{-9t}(2Cos(\sqrt{19} * t) + BSin(\sqrt{19} * t)) \tag{32}$$

Para imponer la otra condición inicial, reescribiremos el circuito como lo muestra la figura 5.

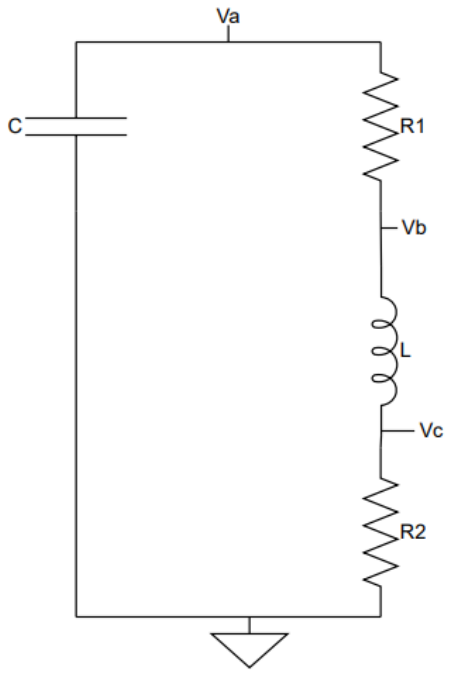


Figura 5: Circuito rescrito

Notamos que, en t = 0, como el voltaje del condensador es de 6 V (reemplazando los valores en la ecuación (3)), el voltaje del nodo Va debe ser 6 V, junto a esto, sabemos que en ese instante la corriente que circula por el circuito es de 2 A (obtenido de la ecuación 31), por lo tanto, sabemos que el voltaje a traves de la resistencia R1 es de 6 V, mientras que el de la resistencia R2 es de 12 V (valores obtenidos usando ley de Ohm). Por lo tanto, se puede plantear el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} Va = 6V \\ Va - Vb = 6V \\ Vc = 12V \\ Vb - Vc = V_L \end{cases} \tag{33}$$

Si se resuelve el sistema de ecuaciones, se llega a que en t = 0, Vb = 0 V y V_L= -12 V.
Por lo tanto, sabemos que $V_L(t = 0) = -12V$, por lo que, planteando la ecuación de voltaje del inductor (13) se llega a que.

$$V_L(t) = 0{,}5 * [-9e^{-9t}(2Cos(\sqrt{19}t) + BSin(\sqrt{19}t)) + e^{-9t}(-2\sqrt{19}Sin(\sqrt{19}t) + B\sqrt{19}Cos(\sqrt{19}t))] \tag{34}$$

Y si evaluamos en t = 0.

$$V_L(t = 0) = -12 = 0{,}5 * [-9(2 + 0) + (0 + B\sqrt{19})]$$

$$-24 = -18 + B\sqrt{19}$$

Por lo tanto se concluye que B ≈ 1.37, por lo que la ecuación para la corriente es:

$$I_L(t) = e^{-9t}(2 * Cos(\sqrt{19} * t) - 1{,}37Sin * (\sqrt{19} * t)) \tag{35}$$

Problema 3
Para el circuito de la figura 3, responda.

- Los valores iniciales del voltaje del condensador
- La ecuación diferencial del voltaje del condensador.
- La frecuencia natural ω_0 y el factor de amortiguamiento ζ, indicando a que tipo de amortiguamiento corresponde.

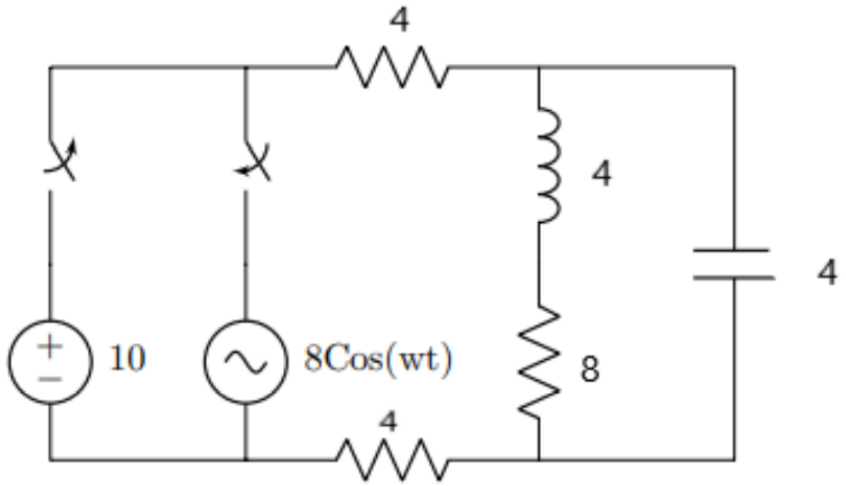


Figura 6: Circuito 3

Solución:

Pregunta A
Para calcular las condiciones iniciales, escribimos el circuito cuando este se encontraba en régimen permanente, es decir, el condensador es circuito abierto y el inductor cortocircuito.

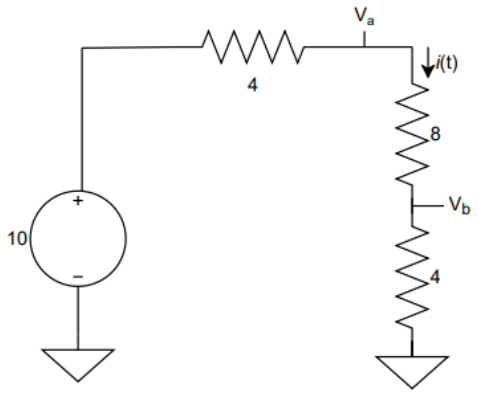


Figura 7: Circuito en regimen permanente

Donde i(t) corresponde a la corriente del inductor y el voltaje entre V_a y V_b (es decir, el voltaje a traves de la resistencia de 8 Ω) corresponde al voltaje del condensador. Por lo tanto, aplicando ley de Ohm se pue-

de obtener que:

$$i = I_L = \frac{10}{16} = 0{,}625A$$

$$V_a - V_b = V_c = 8 * 0{,}625 = 5V$$

Pregunta B

Para obtener la ecuación diferencial, planteamos 2 mallas, la de color morado y la de color verde.

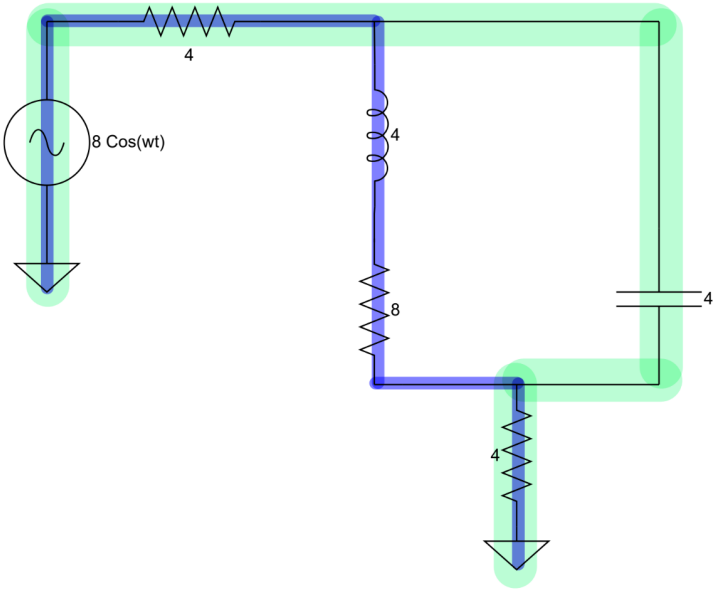


Figura 8: Circuito con mallas planteadas

Antes de escribir las ecuaciones de mallas, notamos que la corriente que circula por las resistencias de 4 Ω es igual, y que esta puede escribirse como.

$$i = i_c + i_L \tag{36}$$

Teniendo en cuenta la relación planteada, se escriben las ecuaciones de mallas, para simplificar la notación, el voltaje de la fuente se escribirá como V.

$$V - 4i - v_L - 8i_L - 4i = 0$$

$$V - 4i - v_C - 4i = 0$$

Para las ecuaciones obtenidas reemplazamos i por lo obtenido en la ecuación (36), y simplificamos términos, resultando en:

$$V - 8i_C = 16i_L + v_L \tag{37}$$

$$V - v_C - 8i_C = 8i_L \tag{38}$$

Si dividimos por 8 la ecuación (38) para despejar i_L y reemplazamos v_L usando la relación voltaje-corriente del inductor en la ecuación (37) se obtiene:

$$V - 8i_C = 16i_L + 4\frac{di_L}{dt} \tag{39}$$

$$\frac{V}{8} - \frac{v_C}{8} - i_C = i_L \tag{40}$$

Luego, factorizamos la igualdad de la derecha en la ecuación (39), resultando en:

$$V - 8i_C = i_L(16 + 4\frac{d}{dt}) \tag{41}$$

Luego, reemplazamos el valor de i_L obtenido en la ecuación (40) en la ecuación (41), resultando en:

$$V - 8i_C = (\frac{V}{8} - \frac{v_C}{8} - i_C)(16 + 4\frac{d}{dt}) \tag{42}$$

Si expandimos el producto se llega a:

$$V - 8i_C = 2V + \frac{1}{2}\frac{dV}{dt} - 2v_C - \frac{1}{2}\frac{dv_C}{dt} - 16i_C - 4\frac{di_C}{dt} \tag{43}$$

$$V + \frac{1}{2}\frac{dV}{dt} = 2v_C + 8i_C + 4\frac{di_C}{dt} + \frac{1}{2}\frac{dv_C}{dt} \tag{44}$$

Y si empleamos la relación voltaje-corriente del condensador se obtiene:

$$V + \frac{1}{2}\frac{dV}{dt} = 2v_C + 32\frac{dv_C}{dt} + 16\frac{d^2v_C}{dt^2} + \frac{1}{2}\frac{dv_C}{dt} \tag{45}$$

La cual finalmente, corresponde a:

$$V + \frac{1}{2}\frac{dV}{dt} = 2v_C + 32{,}5\frac{dv_C}{dt} + 16\frac{d^2v_C}{dt^2} \tag{46}$$

Por lo tanto, si reemplazamos V por $8Cos(\omega t)$, se llega al resultado pedido.

$$8Cos(\omega t) - 4\omega Sin(\omega t) = 2v_C + 32{,}5\frac{dv_C}{dt} + 16\frac{d^2v_C}{dt^2} \tag{47}$$

Pregunta C

Para obtener los valores pedidos, debemos plantear la ecuación homogenea de v_C, resultando en:

$$16\frac{d^2v_C}{dt^2} + 32{,}5\frac{dv_C}{dt} + 2v_C = 0 \tag{48}$$

Si dividimos por 16 la ecuación resultante es:

$$\frac{d^2v_C}{dt^2} + 2{,}03125\frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{8} = 0 \tag{49}$$

Luego despejamos los valores para llegar a ω y ζ empleando la formula del polinomio característico.

$$x^2 + 2\zeta\omega + \omega^2 = 0$$

Por lo que resulta en:

$$2\zeta\omega = 2{,}03125 \tag{50}$$

$$\omega^2 = 0{,}125 \tag{51}$$

Despejando las ecuaciones (50) y (51) se llega a:

$$\omega = \frac{\sqrt{2}}{4} rad/s$$

$$\zeta = 2{,}87262$$

Por lo tanto, se puede concluir que el amortiguamiento es sobreamortiguado.