IEE 2123 Circuitos Eléctricos
Prof. David Watts, PUC

Clase 18 y 19: Inductancia mutua y transformador ideal

Contenidos:

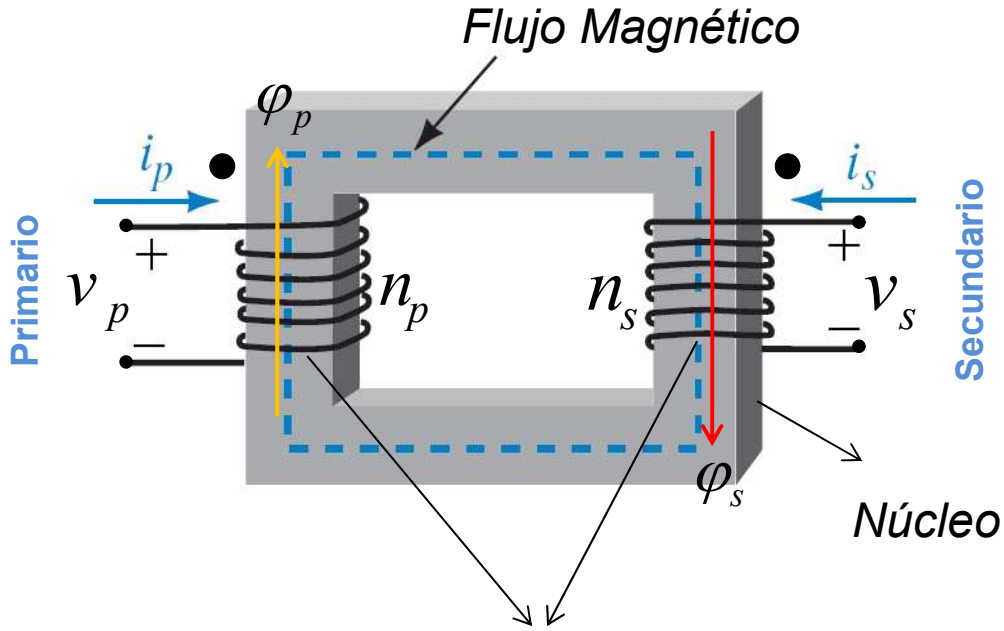
Elementos acoplados magnéticamente:

1. Acoplamiento magnético:
   1.1. Inductancia mutua
2. Transformadores ideales
   2.1. Régimen sinusoidal permanente
   2.2. Aplicaciones
3. Autotransformadores

1. Acoplamiento magnético

Acoplamiento magnético:

- Principio de funcionamiento de los transformadores.
- Dispositivos que cambian voltajes alternos de una magnitud a otra.



n_p: vueltas sobre el núcleo del primario.

n_s: vueltas sobre el núcleo del secundario.

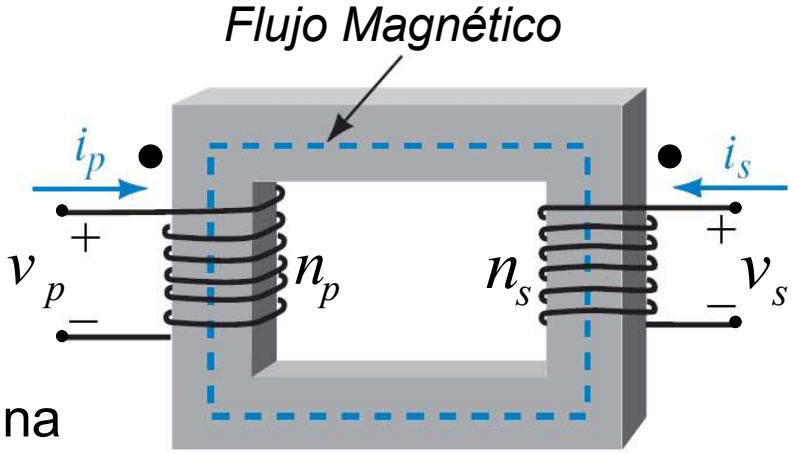
Núcleo de hierro

Espiras eléctricamente aisladas del núcleo (y también entre ellas)

1.1. Inductancia mutua

- **Ley de Faraday:**

$$v(t) = N\frac{d\varphi}{dt}$$



$v(t)$: voltaje en los bornes de la bobina con n espiras.
φ: flujo magnético enlazado por cada bobina.

En el primario:

$$\varphi_p = \varphi_{pp} + \varphi_{ps} \longrightarrow v_p(t) = n_p\frac{d\varphi_{pp}}{dt} + n_s\frac{d\varphi_{ps}}{dt}$$

φ_{pp}: flujo originado por i_p en el primario.
φ_{ps}: flujo originado por i_s en el primario.

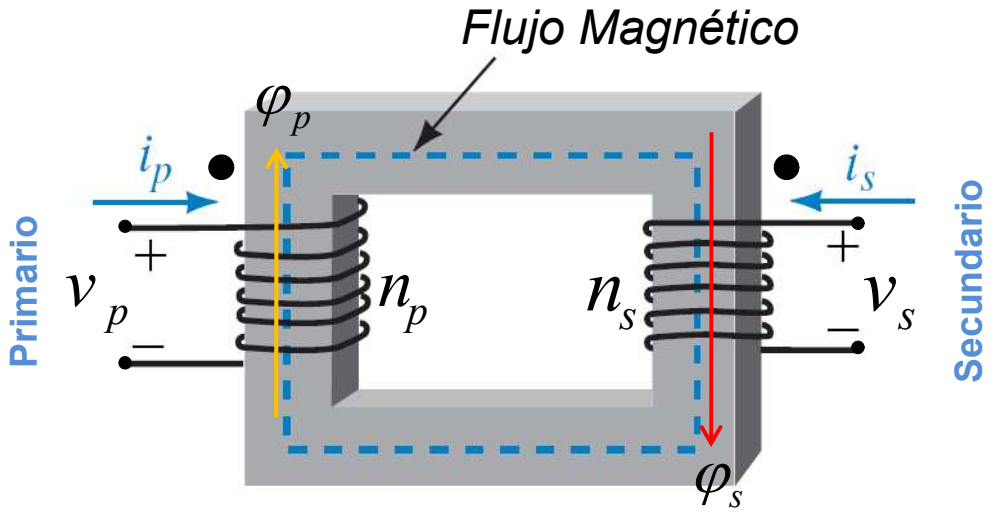
1.1. Inductancia mutua

$$v_p(t) = n_p \frac{d\varphi_{pp}}{dt} + n_s \frac{d\varphi_{ps}}{dt}$$

Además tenemos:

$$\varphi_{pp} = n_p\, i_p\, P_{pp}$$

$$\varphi_{ps} = n_s\, i_s\, P_{ps}$$



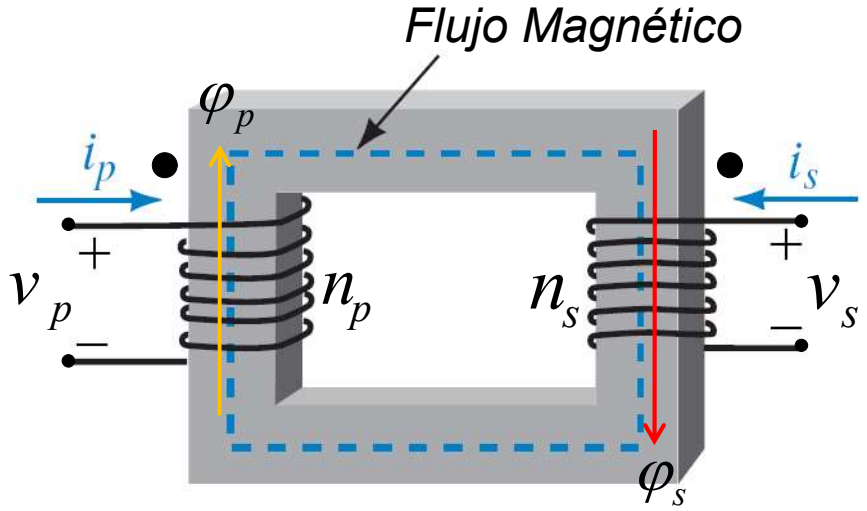
Donde P es Permeancia

O bien:

$$\varphi_{pp} = \frac{n_p\, i_p}{\Re_{pp}} \longrightarrow \textit{Reluctancia}$$

$$\varphi_{ps} = \frac{n_s\, i_s}{\Re_{ps}}$$

1.1. Inductancia mutua



Luego:

$$v_p(t) = n_p^2 P_{pp} \frac{di_p}{dt} + n_s^2 P_{ps} \frac{di_s}{dt}$$

$$v_p(t) = L_{pp} \frac{di_p}{dt} + L_{ps} \frac{di_s}{dt}$$

$$\boxed{v_p(t) = L \frac{di_p}{dt} + M \frac{di_s}{dt}}$$

Donde:

L = Inductancia propia.
M = Inductancia mutua.

1.1. Inductancia mutua

$$v_p(t) = L\frac{di_p}{dt} \pm M\frac{di_s}{dt}$$

- **Signo de M:**

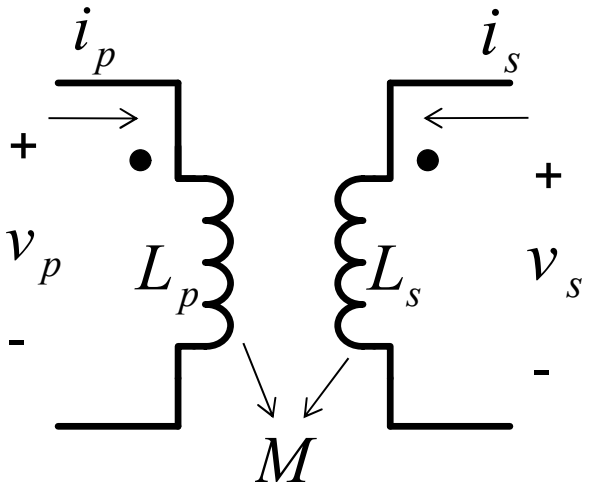
Que se asumió?

1. **Ley de la mano derecha:** Los dedos de la mano derecha abrazan la bobina en el sentido de la corriente, y el pulgar indica la dirección del flujo magnético producido por esa corriente; si las direcciones coinciden, entonces los flujos se suman.

2. **Convención del punto:** Dibujado un punto en un extremo de cada bobina, si las corrientes entran (o salen) en ambos terminales con punto, entonces los flujos producidos por las corrientes se suman, por lo tanto L y M tienen el mismo signo en la expresión anterior.

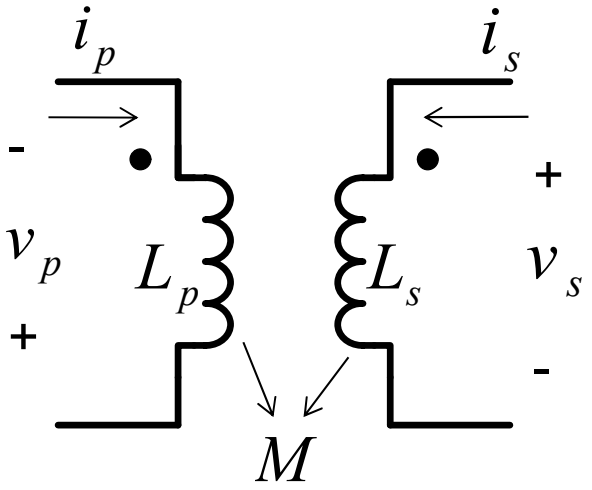
1.1. Inductancia mutua

Por ejemplo:



$$v_p(t) = L_p \frac{di_p}{dt} + M \frac{di_s}{dt}$$

$$v_s(t) = M \frac{di_p}{dt} + L_s \frac{di_s}{dt}$$

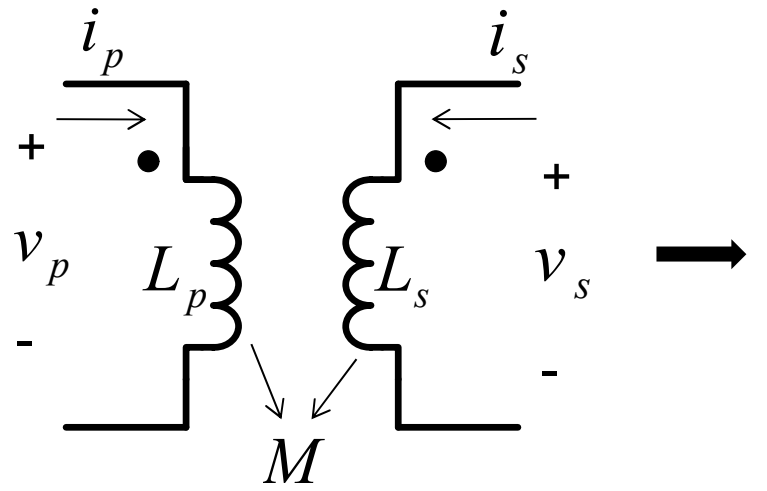


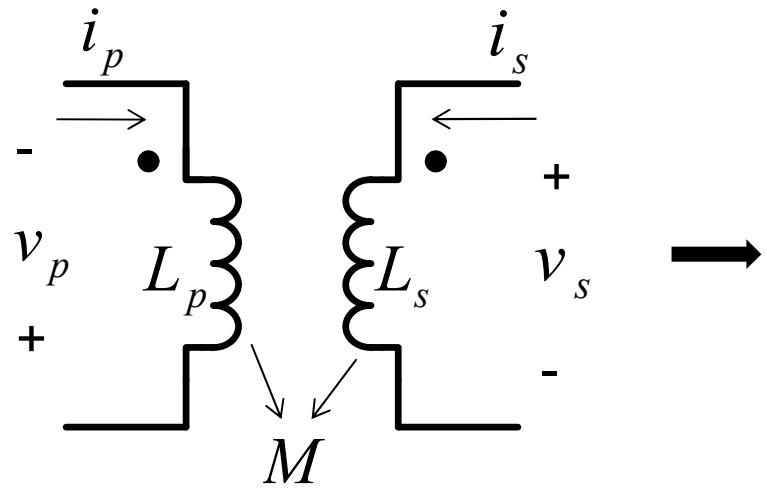
$$-v_p(t) = L_p \frac{di_p}{dt} + M \frac{di_s}{dt}$$

$$v_s(t) = M \frac{dI_p}{dt} + L_s \frac{dI_s}{dt}$$

1.1. Inductancia mutua

Por ejemplo:

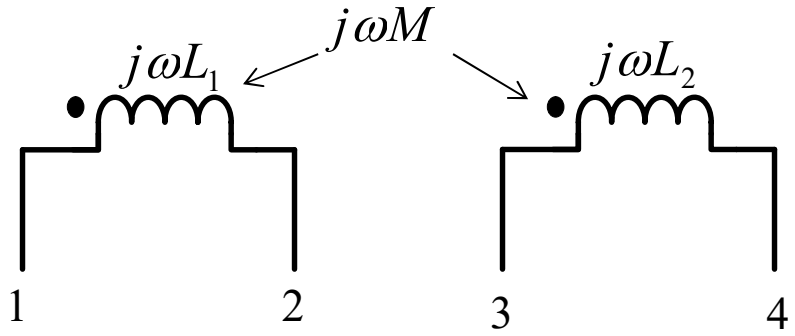




1.1. Inductancia mutua:
Ejemplos:

Determine la **inductancia equivalente** para cada conexión de las bobinas.

a) Serie 1-2-3-4
b) Serie 1-2-4-3
c) Paralelo (1-2) con (3-4)



Solución:

a) Para régimen sinusoidal permanente:

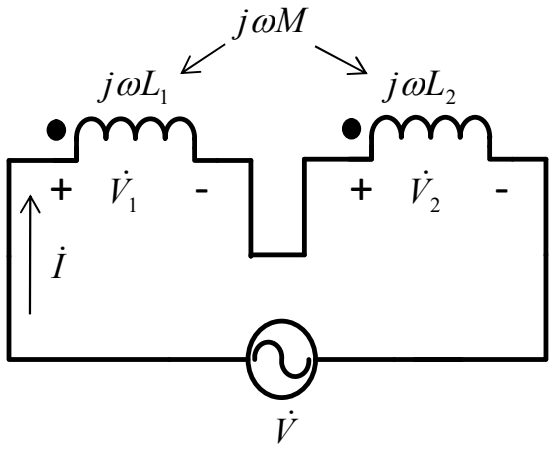
$$\dot{V} = \dot{V}_1 + \dot{V}_2$$

$$\dot{V} = j\omega L_1 \dot{I} + j\omega M\dot{I} + j\omega L_2 \dot{I} + j\omega M\dot{I}$$

$$\dot{V} = j\omega (L_1 + L_2 + 2M)\dot{I}$$

$$\dot{V} = j\omega L_{eq} \dot{I}$$

$$\boxed{L_{eq} = L_1 + L_2 + 2M}$$

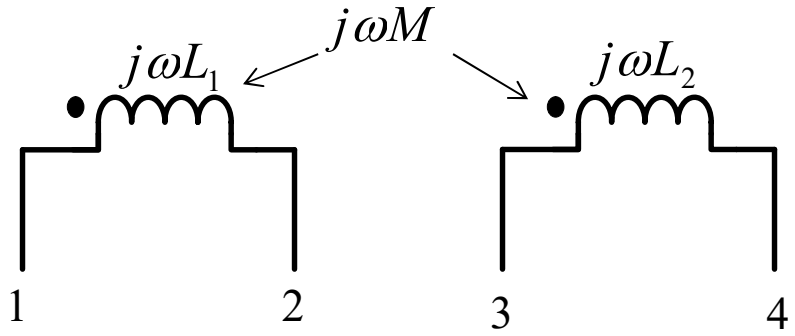


Sorprendido?

1.1. Inductancia mutua:
Ejemplos:

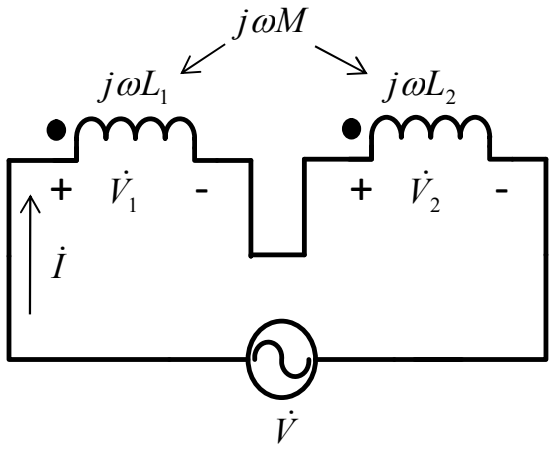
Determine la **inductancia equivalente** para cada conexión de las bobinas.

a) Serie 1-2-3-4
b) Serie 1-2-4-3
c) Paralelo (1-2) con (3-4)



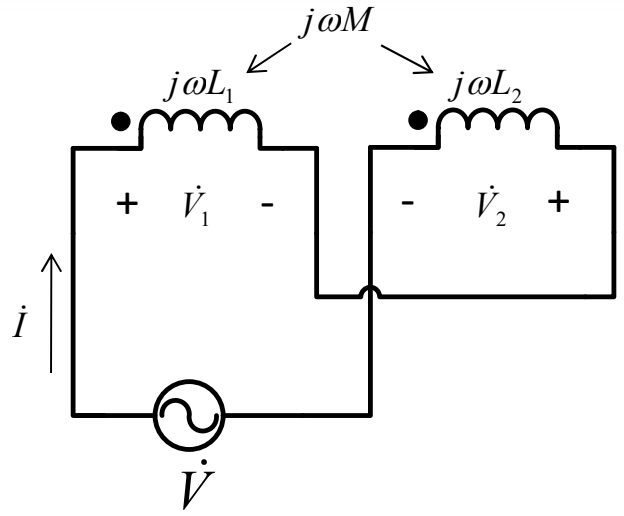
Solución:

a) Para régimen sinusoidal permanente:



1.1. Inductancia mutua:
Ejemplos:

b) Serie 1-2-4-3



1.1. Inductancia mutua:

Ejemplos:

b) Serie 1-2-4-3

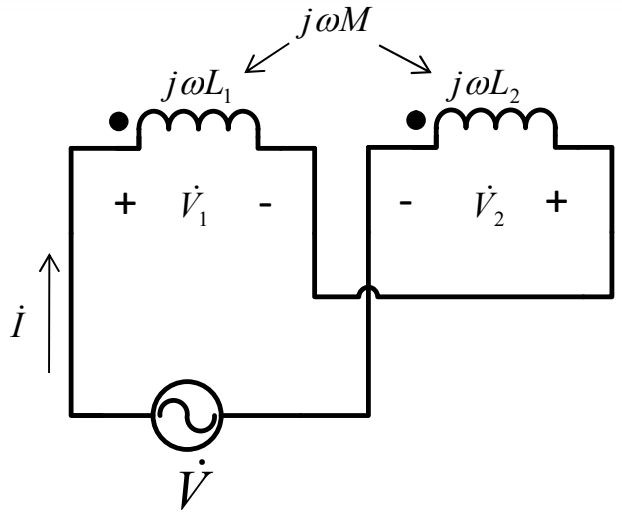
$$\dot{V} = \dot{V}_1 + \dot{V}_2$$

$$\dot{V} = \left(j\omega L_1 - j\omega M\right)\dot{I} + \left(j\omega L_2 - j\omega M\right)\dot{I}$$

$$\dot{V} = j\omega(L_1 + L_2 - 2M)\dot{I}$$

$$\dot{V} = j\omega L_{eq}\dot{I}$$

$$\boxed{L_{eq} = L_1 + L_2 - 2M}$$



1.1. Inductancia mutua:
Ejemplos:

b) Serie 1-2-4-3

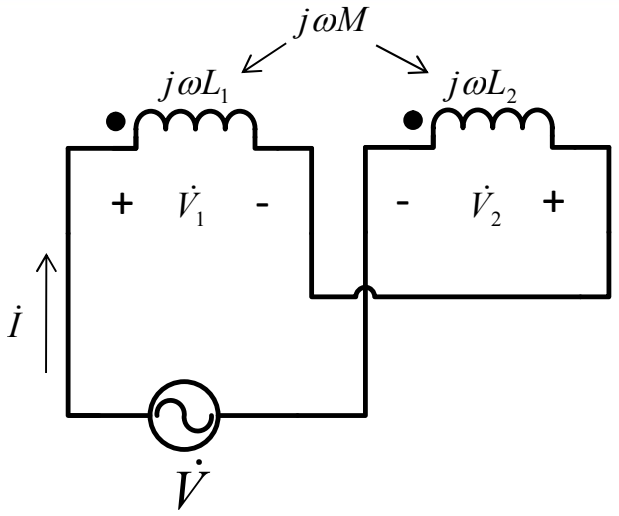
$$\dot{V} = \dot{V}_1 + \dot{V}_2$$

$$\dot{V} = (j\omega L_1 - j\omega M)\dot{I} + (j\omega L_2 - j\omega M)\dot{I}$$

$$\dot{V} = j\omega(L_1 + L_2 - 2M)\dot{I}$$

$$\dot{V} = j\omega L_{eq}\dot{I}$$

$$\boxed{L_{eq} = L_1 + L_2 - 2M}$$



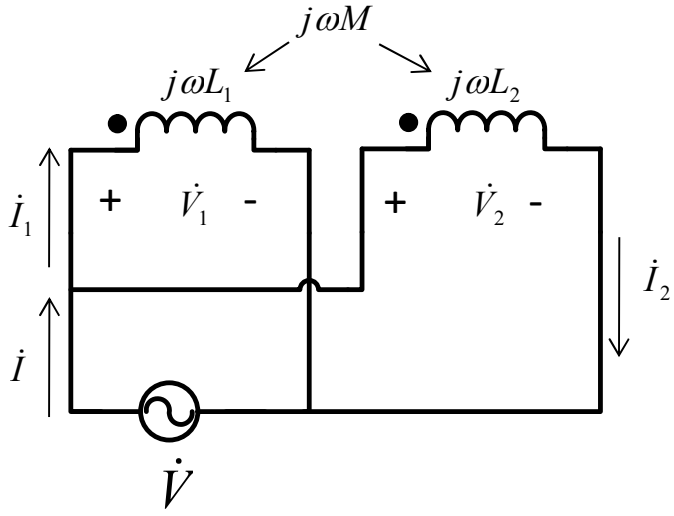
c) Paralelo (1-2) con (3-4)

$$I = \dot{I}_1 + \dot{I}_2; \quad \dot{V} = \dot{V}_1 = \dot{V}_2$$

$$\dot{V}_1 = j\omega L_1 \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2; \quad \dot{V}_2 = j\omega L_2 \dot{I}_2 + j\omega M \dot{I}_1$$

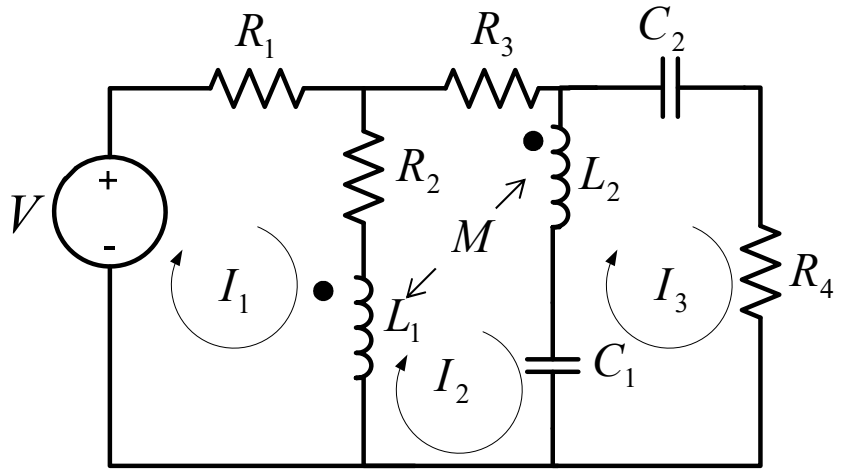
$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{V}}{j\omega}\frac{L_2 - M}{L_1 L_2 - M^2}; \quad \dot{I}_2 = \frac{\dot{V}}{j\omega}\frac{L_1 - M}{L_1 L_2 - M^2}$$

$$I = \frac{\dot{V}}{j\omega}\frac{L_1 + L_2 - 2M}{L_1 L_2 - M^2} \rightarrow \boxed{L_{eq} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M}}$$



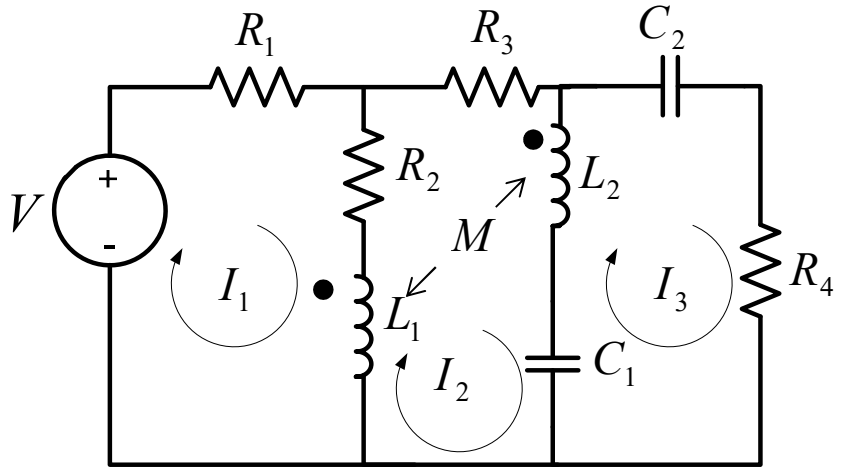
1.1. Inductancia mutua:
Ejemplos:

Sub-problema de una **Interrogación (1/2 y 1/3 de pregunta)**
Para el circuito de la figura encuentre las ecuaciones de malla.



1.1. Inductancia mutua:
Ejemplos:

Para el circuito de la figura encuentre las ecuaciones de malla.



Solución:

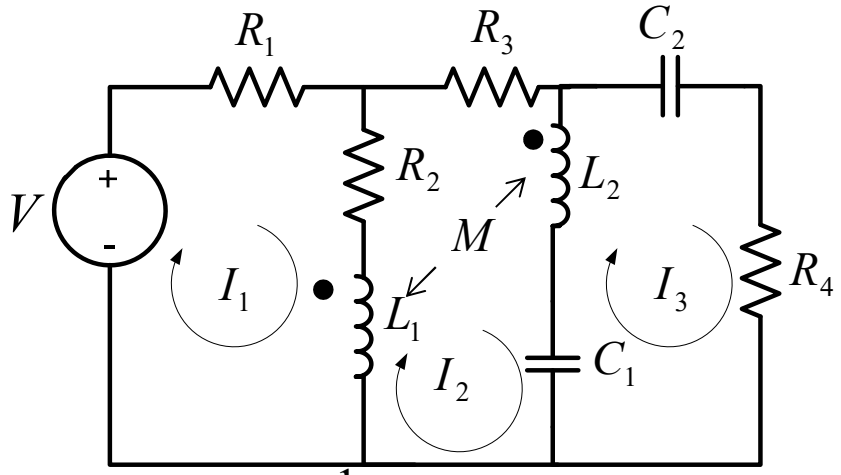
Malla 1:

Malla 2:

Malla 3:

1.1. Inductancia mutua:
Ejemplos:

Para el circuito de la figura encuentre las ecuaciones de malla.



Solución:

Malla 1:

$$R_1 I_1 + R_2 (I_1 - I_2) + j\omega L_1 (I_1 - I_2) + + j\omega M (I_2 - I_3) = V$$

Malla 2:

$$R_2 (I_2 - I_1) + R_3 I_2 + j\omega L_2 (I_2 - I_3) + j\omega M (I_1 - I_2) + \frac{1}{j\omega C_1}(I_2 - I_3) + + j\omega L_1 (I_2 - I_1) + j\omega M (I_3 - I_2) = 0$$

Ojo: No entra por el punto.

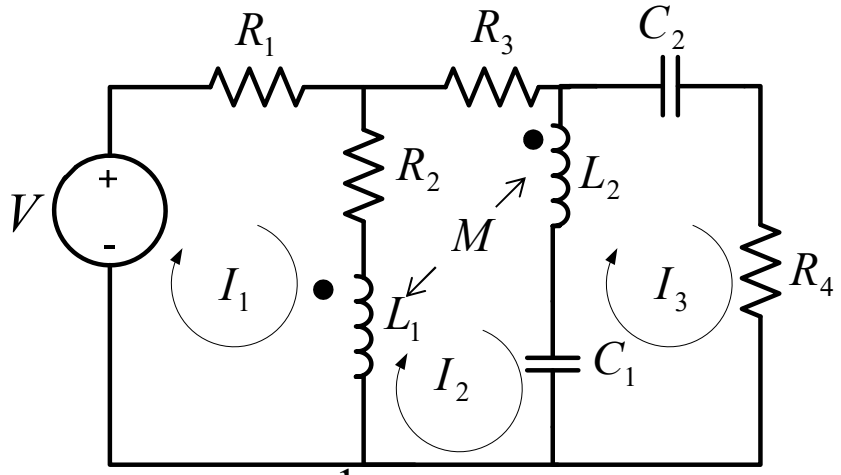
Malla 3:

$$\frac{1}{j\omega C_2} I_3 + R_4 I_3 + \frac{1}{j\omega C_1}(I_3 - I_2) + j\omega L_2 (I_3 - I_2) + j\omega M (I_2 - I_1) = 0$$

Ojo: No entra por el punto.

1.1. Inductancia mutua:
Ejemplos:

Para el circuito de la figura encuentre las ecuaciones de malla.



Solución:

Malla 1:

$$R_1 I_1 + R_2 (I_1 - I_2) + j\omega L_1 (I_1 - I_2) + + j\omega M (I_2 - I_3) = V$$

Malla 2:

$$R_2 (I_2 - I_1) + R_3 I_2 + j\omega L_2 (I_2 - I_3) + j\omega M (I_1 - I_2) + \frac{1}{j\omega C_1}(I_2 - I_3) + + j\omega L_1 (I_2 - I_1) + j\omega M (I_3 - I_2) = 0$$

Ojo: No entra por el punto.

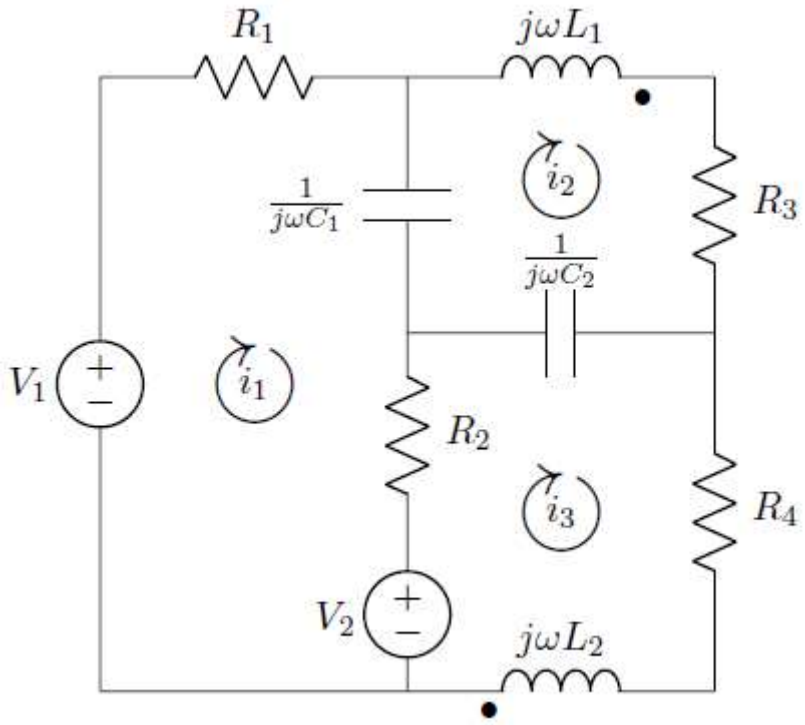
Malla 3:

$$\frac{1}{j\omega C_2} I_3 + R_4 I_3 + \frac{1}{j\omega C_1}(I_3 - I_2) + j\omega L_2 (I_3 - I_2) + j\omega M (I_2 - I_1) = 0$$

Ojo: No entra por el punto.

1.1. Inductancia mutua:
Ejemplos:

Escriba las ecuaciones para resolver sin y con inductancia mutua (M):



1.1. Inductancia mutua

Coeficiente de Acoplamiento (*parámetro utilizado en Microcap***):**

•Cuando hay un acoplamiento magnético y una inductancia mutua M, se define un coeficiente de acoplamiento, ***k***, entre 2 bobinas L_1 y L_2:

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$$

• $0 \leq \boldsymbol{k} \leq 1$

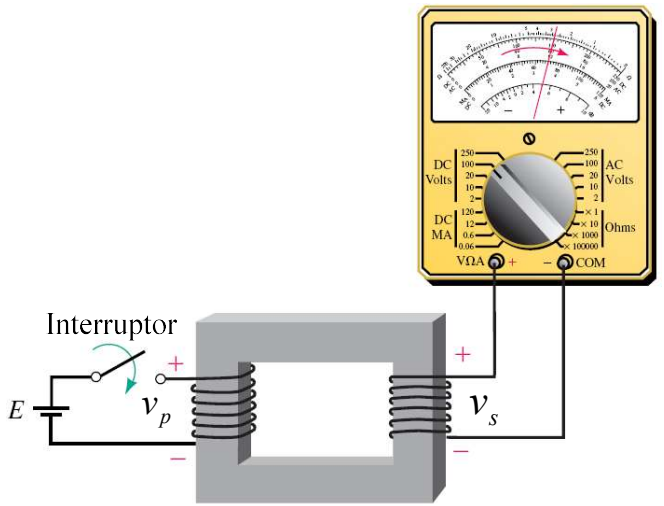
•***k*** es un coeficiente que indica cuanto flujo es enlazado por la otra bobina

• ***k*** = 1 → Acoplamiento de 100%, es decir, todo el flujo producido por la corriente en una bobina se enlaza a las espiras de la otra bobina.

1.1. Inductancia mutua

Polaridad del Flujo Inducido: Convención del Punto

- La fase o desfase del voltaje secundario depende de la dirección del enrollado secundario.
- Se cierra el interruptor de la fuente DC por algunos segundos (el voltaje es inducido en la medida en que el flujo cambie en el tiempo).
- El marcador del voltímetro se moverá para luego volver a cero.



1.1. Inductancia mutua

Polaridad del Flujo Inducido: Convención del Punto

1º Se coloca el punto en la parte superior del primario.

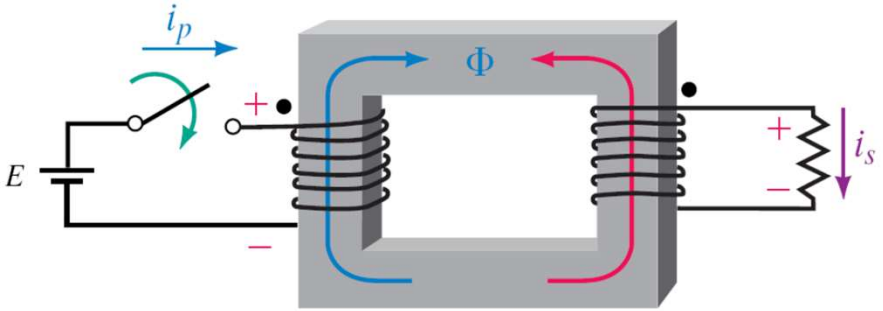
2º Por la ley de Lenz, se induce un flujo secundario (rojo) opuesto al flujo primario.

3º Por la regla de la mano derecha la corriente i_s debe tener la dirección de acuerdo al flujo inducido.

4º Se coloca el punto en el lugar positivo de la "resistencia".

Se habla de terminales correspondientes, puesto que tienen la misma polaridad.

Circuito Equivalente

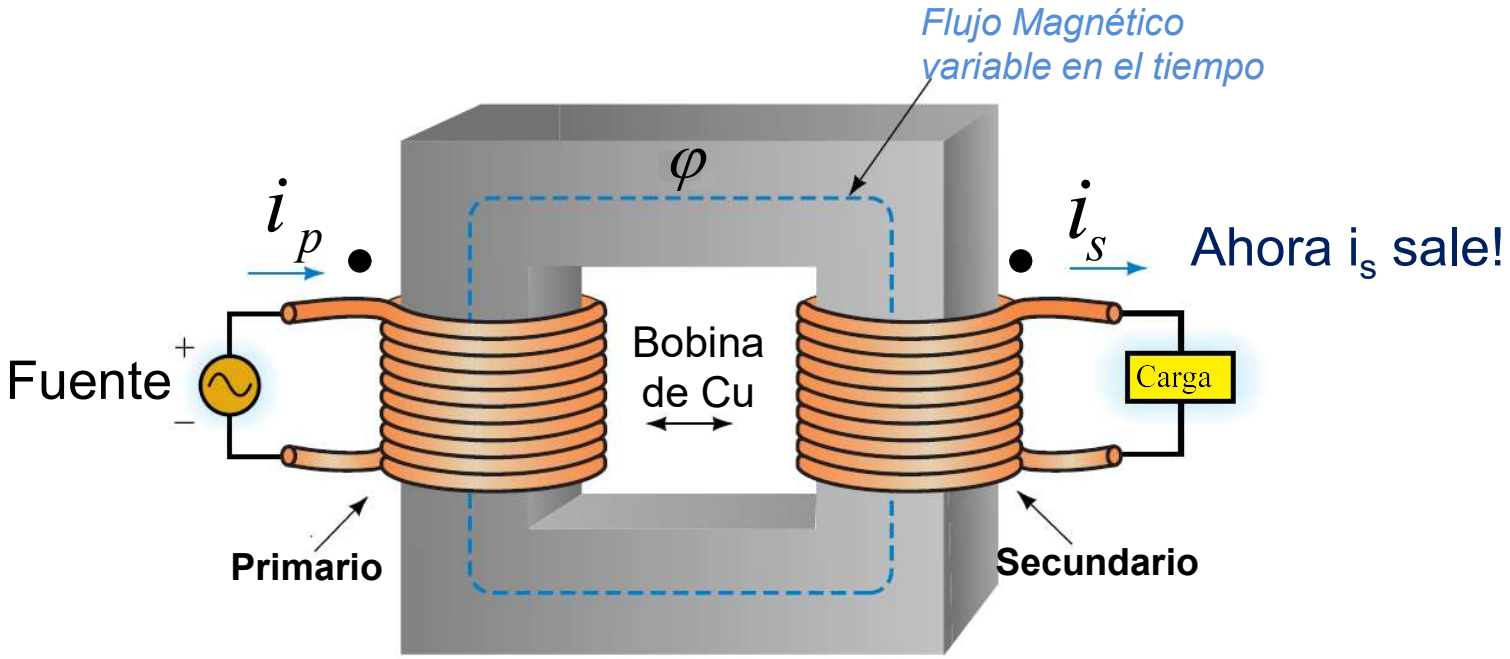


Transformadores

Aquí cambiamos la convención de la corriente

2. Transformadores ideales

- El núcleo central concentra el flujo magnético, cuya totalidad enlaza todas las espiras de ambas bobinas→ $\varphi_p = \varphi_s = \varphi$

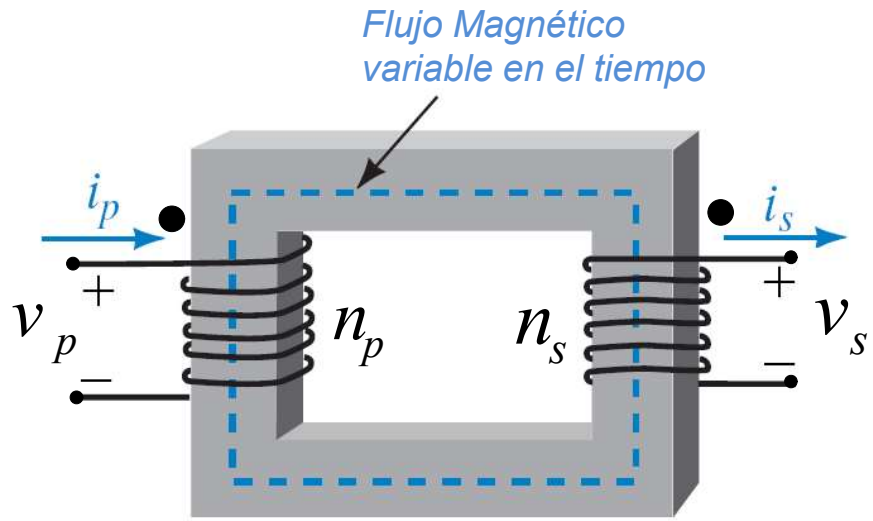


Luego,

$$v_p(t) = n_p \frac{d\varphi}{dt}; \quad v_s(t) = n_s \frac{d\varphi}{dt} \longrightarrow \boxed{\frac{v_p(t)}{v_s(t)} = \frac{n_p}{n_s}}$$

2. Transformadores ideales

- **Supuestos de un transformador ideal:**
  - Resistencia de los enrollados despreciable.
  - Pérdidas en el núcleo despreciables.
  - Reluctancia del material magnético nula
  - Todo el flujo está confinado en el núcleo.



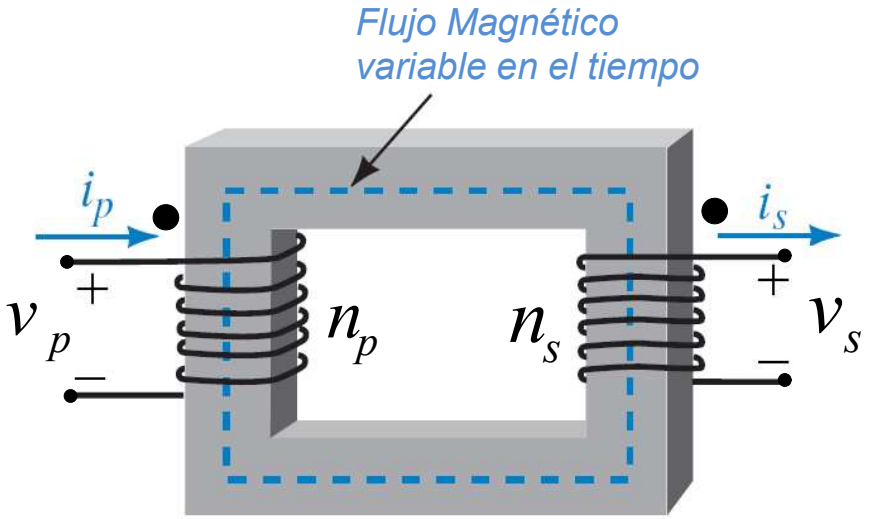
2. Transformadores ideales

- **Ley de Ampére:**

$$\oint H \cdot ds = i_{encerrada} = \sum n_i \cdot i_i(t) = \Re\ \varphi(t)$$

$$\Re = 0 \rightarrow n_p\, i_p(t) - n_s\, i_s(t) = 0$$

$$\boxed{\frac{i_p(t)}{i_s(t)} = \frac{n_s}{n_p}}$$



- **Potencia:**

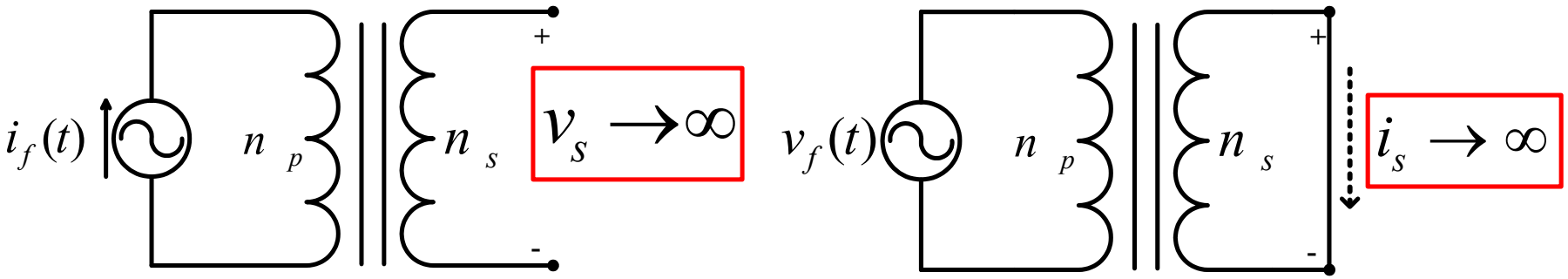
$$\frac{v_p(t)}{v_s(t)} = \frac{n_p}{n_s} \quad y \quad \frac{i_p(t)}{i_s(t)} = \frac{n_s}{n_p} \rightarrow v_p(t)\, i_p(t) = v_s(t)\, i_s(t) \rightarrow \boxed{P_p = P_s}$$

¡En un transformador ideal no hay pérdidas!

2. Transformadores ideales

Preguntas:

- ¿Qué pasa si la fuente de entrada es una fuente continua?
- Suponga **conexión serie de una fuente de corriente** en el primario, y **circuito abierto en el secundario**. ¿Qué sucede?.
- Suponga **conexión en paralelo de una fuente de voltaje** en el primario, y **cortocircuito en el secundario**. ¿Qué sucede?

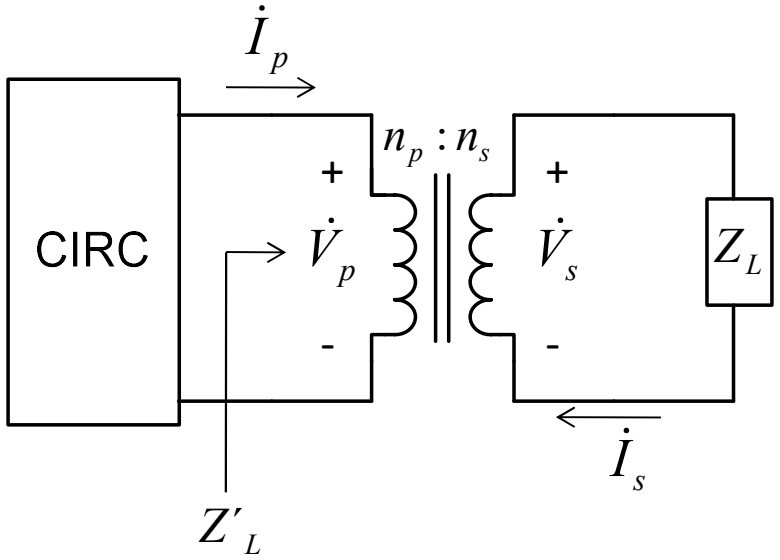


2.1. Régimen sinusoidal permanente

- **Potencia compleja:**

$$\dot{S}_p = \dot{V}_p \, \dot{I}_p^* = \left(\frac{n_p}{n_s} \dot{V}_s \right) \left(\frac{n_s}{n_p} \dot{I}_s \right)^* = \dot{V}_s \, \dot{I}_s^*$$

$$\boxed{\dot{S}_p = \dot{S}_s}$$



- **Impedancia de carga (Z_L) vista desde el primario (referida al 1ro).**

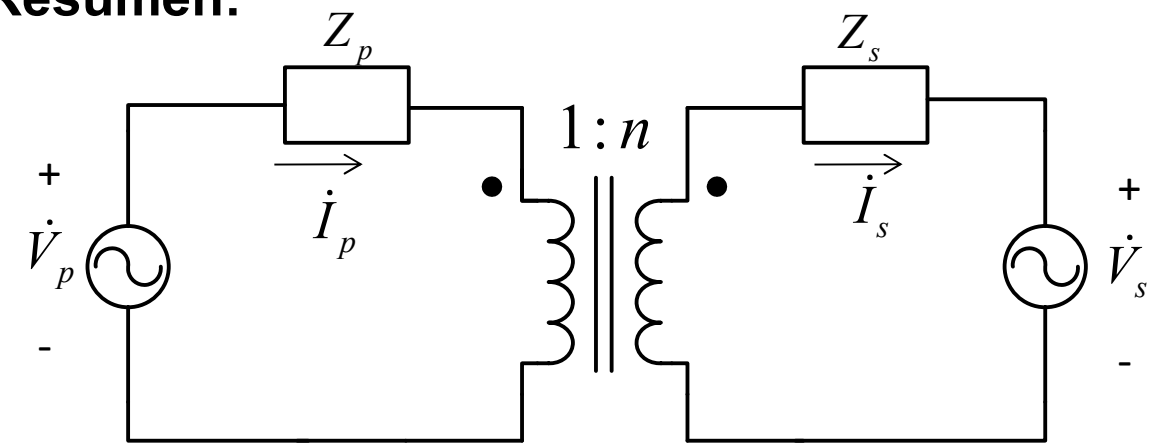
$$Z_L = \frac{\dot{V}_s}{\dot{I}_s}; \quad Z_L' = \frac{\dot{V}_p}{\dot{I}_p}$$

$$\frac{\dot{V}_p}{\dot{V}_s} = \frac{n_p}{n_s} \; e \; \frac{\dot{I}_p}{\dot{I}_s} = \frac{n_s}{n_p} \rightarrow \frac{\dot{V}_p}{\dot{I}_p} = \left(\frac{n_p}{n_s} \right)^2 \frac{\dot{V}_s}{\dot{I}_s}$$

$$\boxed{Z_L' = \left(\frac{n_p}{n_s} \right)^2 Z_L}$$

2.1. Régimen sinusoidal permanente

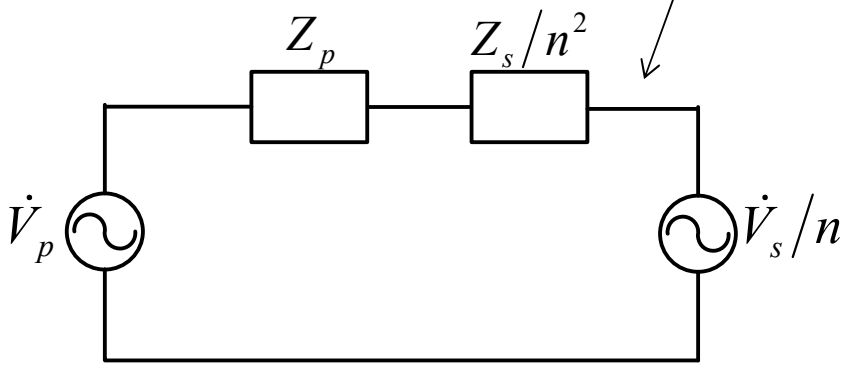
- **Resumen:**



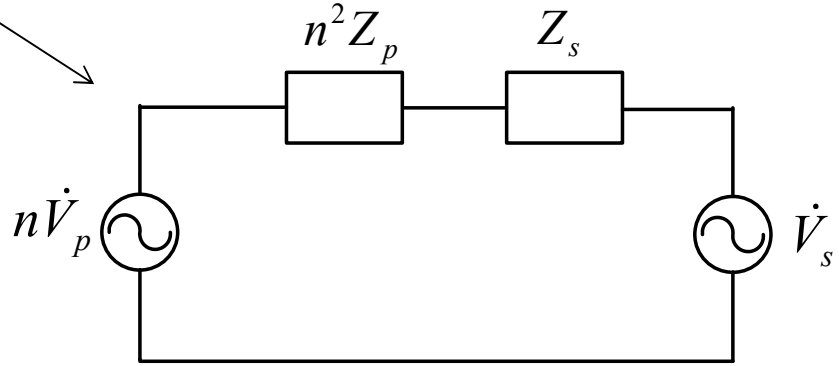
Y si los puntos cambian ?

1) Cambiar signo de relación de *V*, ó

2) Rotar el circuito completo!



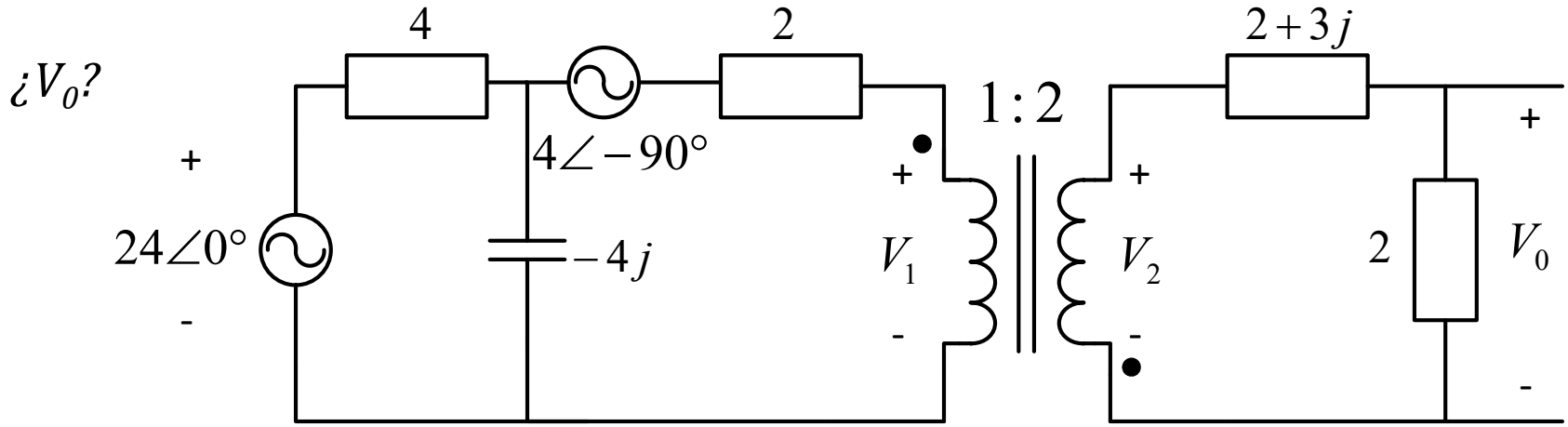
Visto desde el primario



Visto desde el secundario

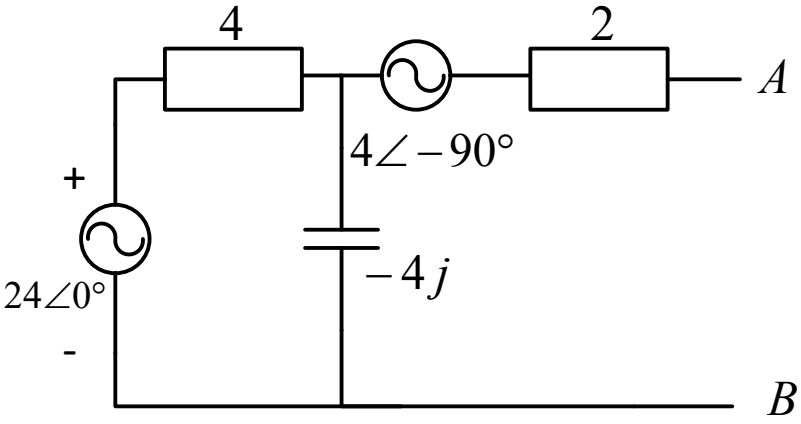
Referir todo al primario o secundario!

2.1. Régimen sinusoidal permanente:
Ejemplos.



- **Solución:**

Equivalente Thévenin del circuito primario:



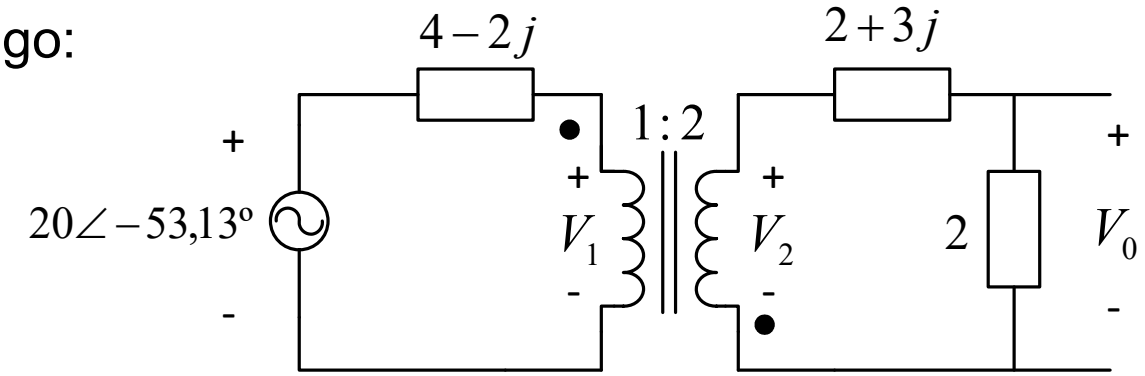
$$V_{AB} = \frac{-4j \cdot 24}{4-4j} + 4\angle -90° = -\frac{24j}{1-j} - 4j$$

$$V_{AB} = 12 - 16j = 20\angle -53{,}13°$$

$$Z_{Th} = \frac{4\cdot(-4j)}{4-4j} + 2 = 4 - 2j\ \Omega$$

2.1. Régimen sinusoidal permanente:
Ejemplos.

Luego:



Dado que hay un punto invertido podemos rotar el circuito. Luego el circuito equivalente visto desde el secundario queda:

Divisor de voltaje:

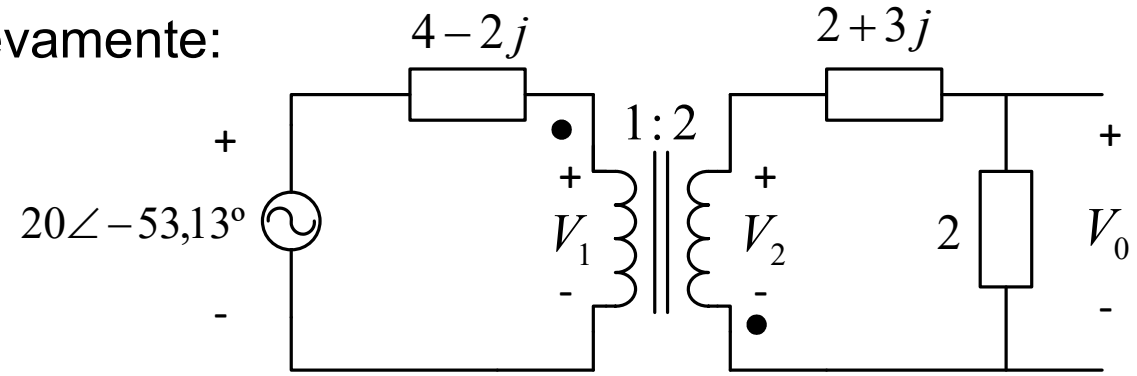
$$V_0 = \frac{2}{(2+2+4*2^2)+(-2*2^2 j+3j)}\left(-2*20\angle -53{,}13^\circ\right)$$

$$\boxed{V_0 = 3{,}88\ \angle 140{,}9^\circ\ [V]}$$

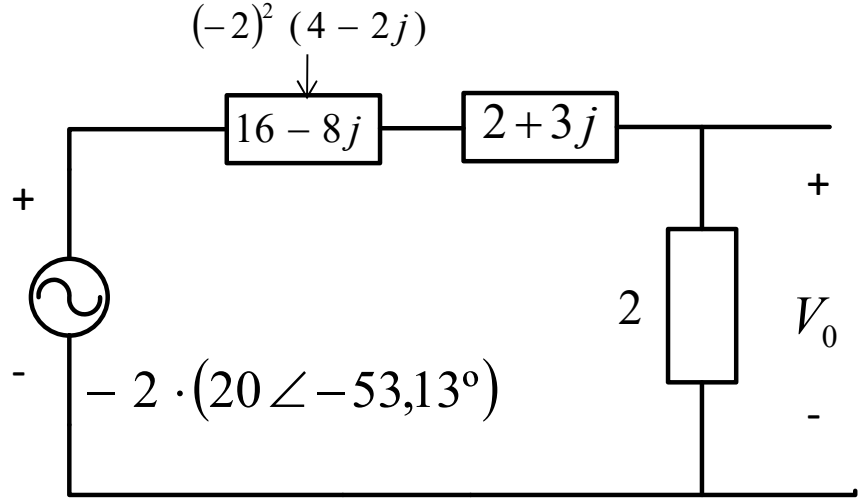
Veamos otra forma:

2.1. Régimen sinusoidal permanente:
Ejemplos.

Nuevamente:



Dado que hay un punto invertido, se usa – n (– razón de vueltas), luego el circuito equivalente visto desde el secundario queda:



Divisor de voltaje:

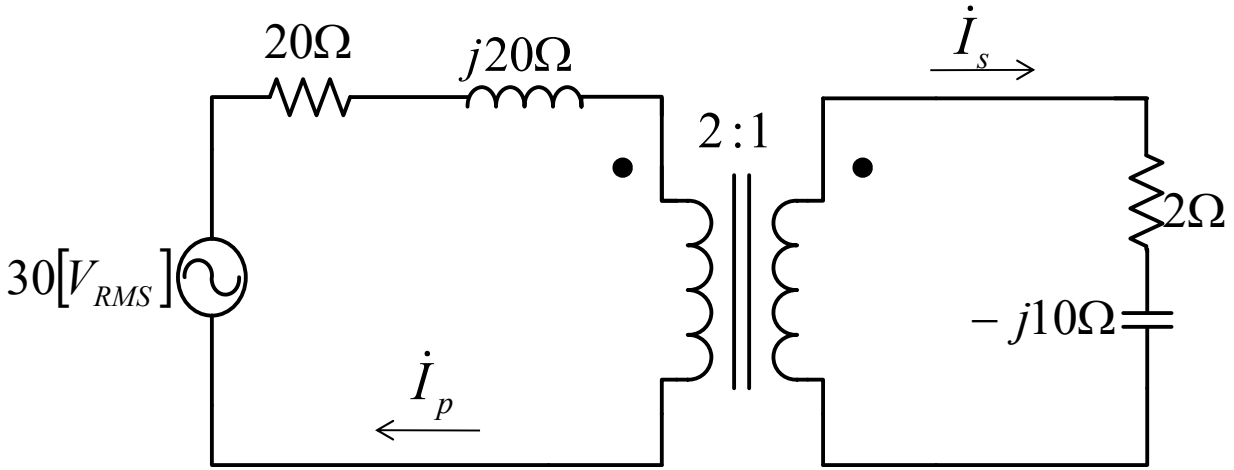
$$V_0 = \frac{2}{20 - 5j}\left(-40\angle -53{,}13^\circ\right)$$

$$\boxed{V_0 = 3{,}88\ \angle 140{,}9^\circ\ [V]}$$

Y si lo rotaba?

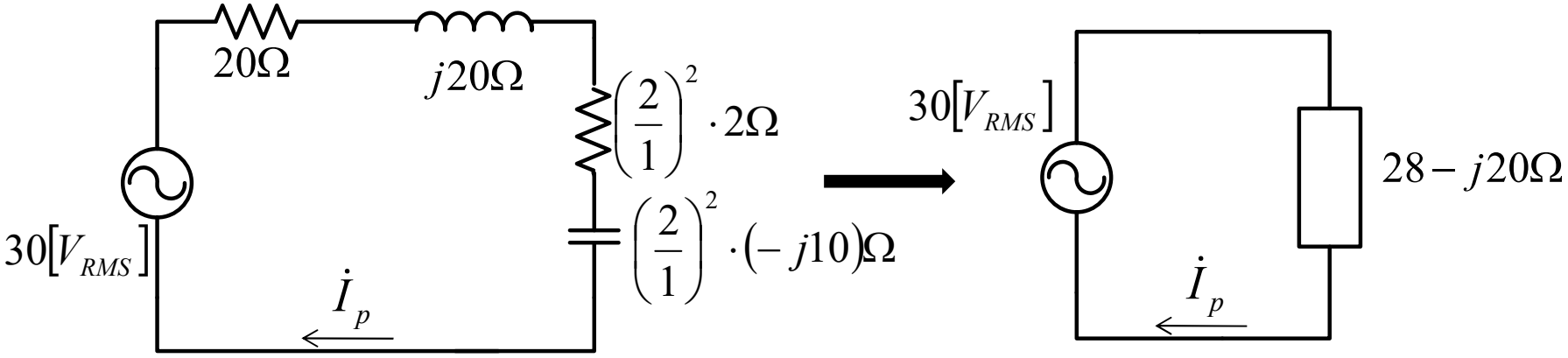
2.1. Régimen sinusoidal permanente:
Ejemplos.

Calcular I_p e I_s:



- **Solución:**

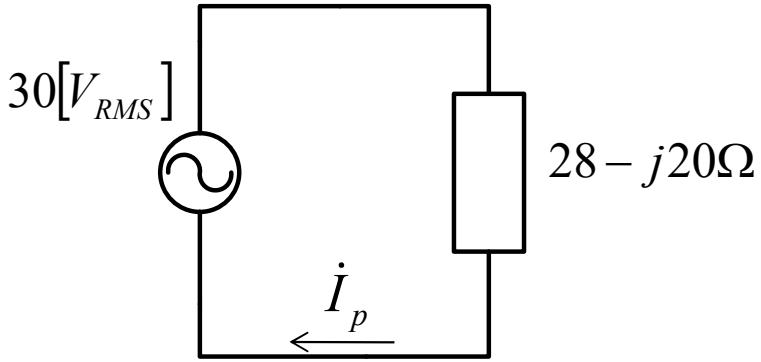
Referimos el secundario al primario, quedándonos:



2.1. Régimen sinusoidal permanente:
Ejemplos.

Luego:

$$\dot{I}_p = \frac{30\angle 0°}{28 - 20j} = 0{,}872\angle 35{,}5°[A]$$



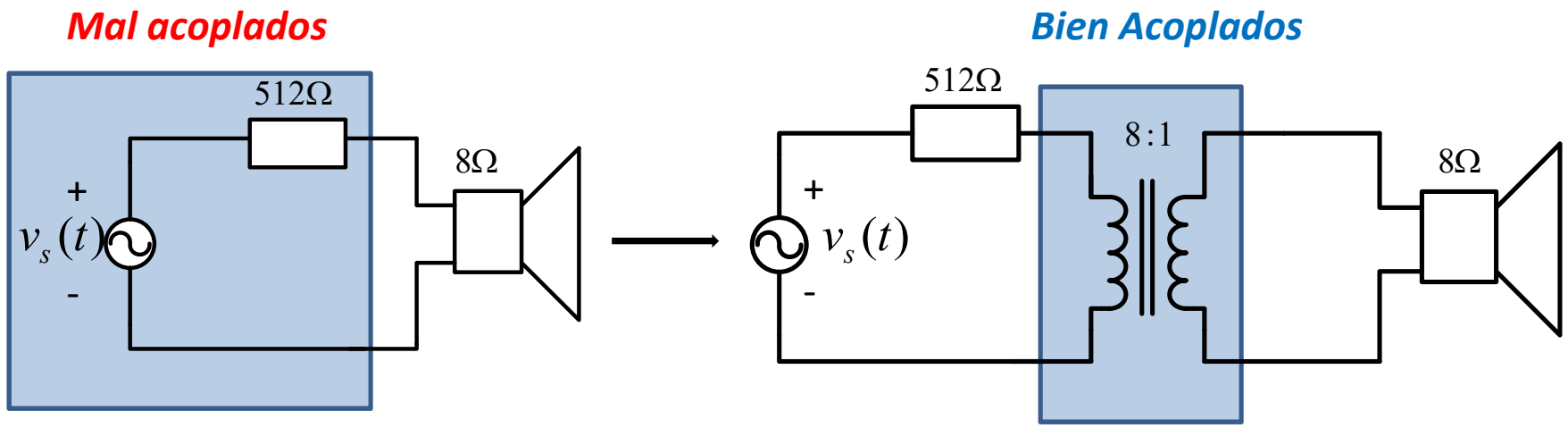
Por lo tanto:

$$\boxed{\dot{I}_s = \left(\frac{2}{1}\right)\dot{I}_p = 1{,}74\angle 35{,}5°[A]}$$

2.2. Aplicaciones

Acoplamiento de impedancias

- Se transfiere la máxima potencia a una carga cuando su impedancia está acoplada con la resistencia interna de la fuente (impedancias equivalentes).
- Si la carga del parlante no está bien acoplada:

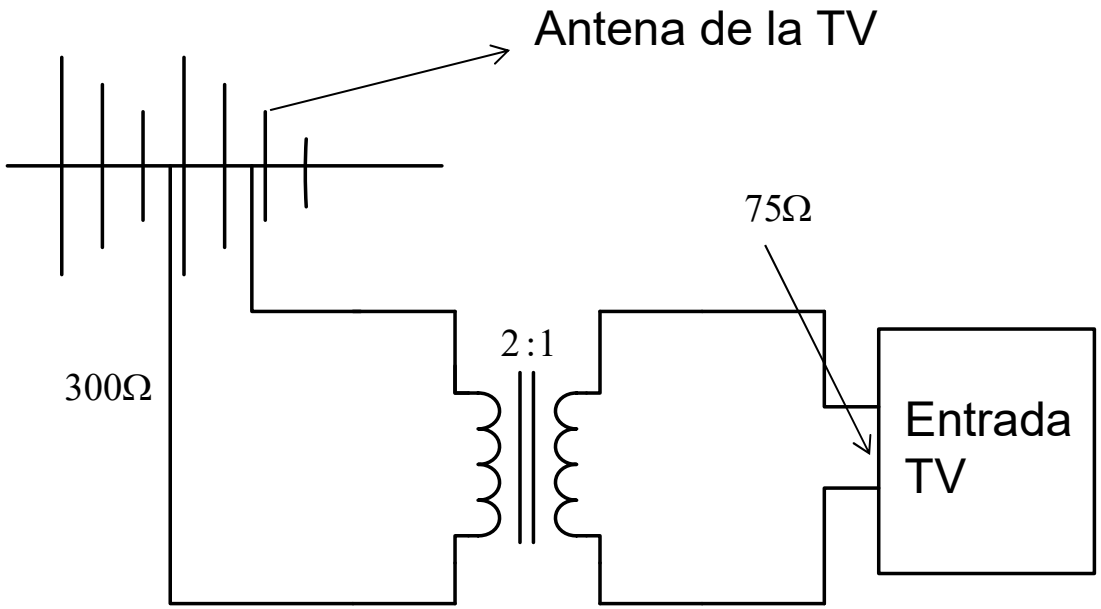


Equivalente de Thevenin de un Amplificador de Audio

También denominado "Matching Transformer"

2.2. Aplicaciones

- **Acoplamiento de líneas de transmisión:** como lo es la línea de transmisión de 300 Ω desde una antena de televisión hasta la impedancia de entrada del televisor (que puede ser, por ejemplo, de 75 Ω):



Autotransformadores
2.0

3. Autotransformadores:
Introducción.

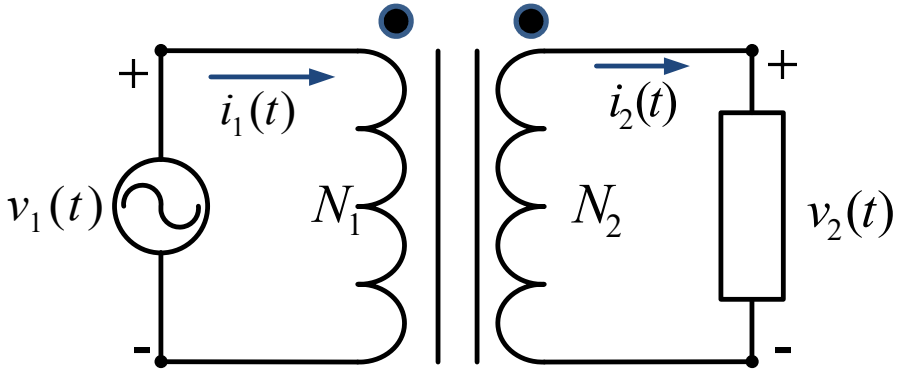
Supuestos del Transformador ideal

- Devanados del primario y del secundario **eléctricamente aislados** y el acoplamiento entre ambas bobinas **puramente magnético**.

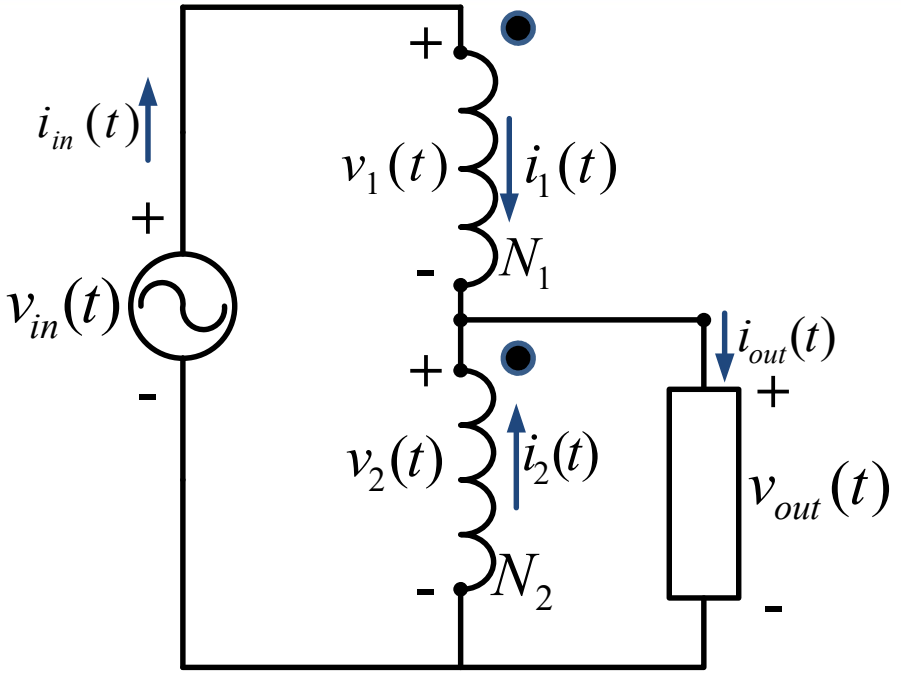
- Las **componentes continuas** de un lado no son inducidas en el otro, permitiendo que ambos lados tengan **niveles de referencia diferentes(tierras distintas)** .

Hay casos donde no es necesario que primario y secundario estén eléctricamente aislados. → **Autotransformadores**.

3. Autotransformadores



Transformador de 2 enrolladlos



Autotransformador Correspondiente

Autotransformadores

- **Usos:**
  - Suministro de voltaje variable.
  - Voltaje constante en situaciones de carga variable.

3. Autotransformadores

- **Relación de Tensión**

Los voltajes inducidos se relacionan de igual modo que en un transformador convencional:

$$\frac{v_1(t)}{v_2(t)} = \frac{N_1}{N_2}$$

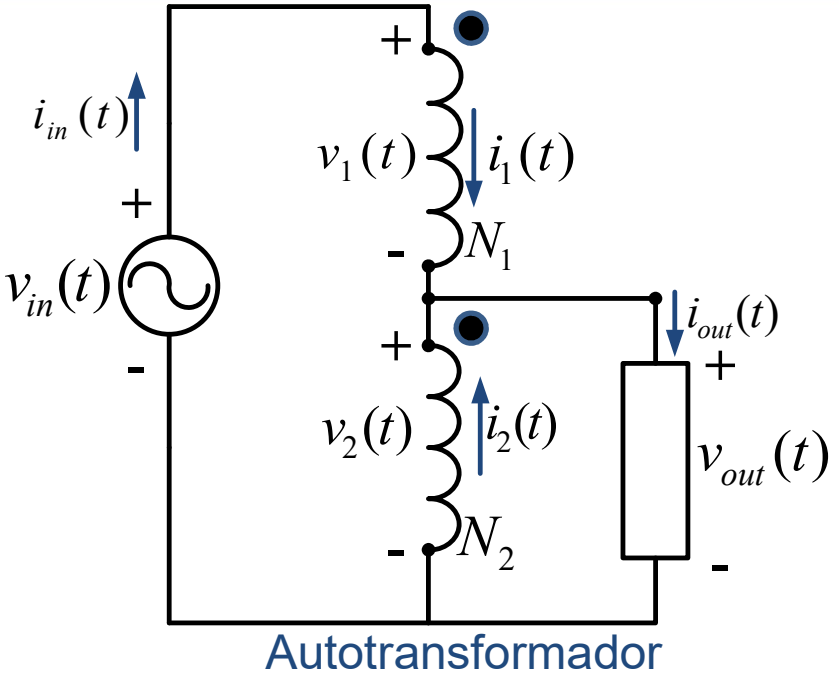
Además

$$v_1(t) + v_2(t) = v_{in}(t)$$

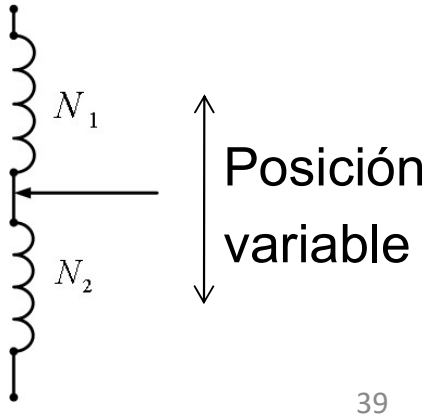
$$v_2(t) = v_{out}(t)$$

Luego,

$$\frac{v_{out}(t)}{v_{in}(t)} = \frac{N_2}{N_1 + N_2}$$



Autotransformador



3. Autotransformadores

- **Relación de Corrientes**

Los corrientes se relacionan de igual modo que en un transformador convencional:

$$\frac{i_1(t)}{i_2(t)} = \frac{N_2}{N_1}$$

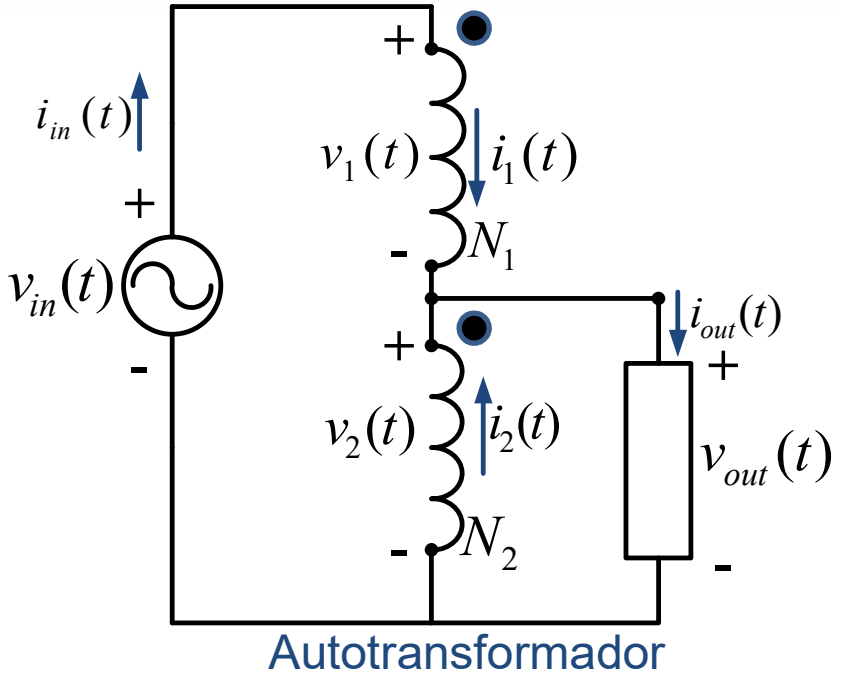
Además

$$i_1(t) = i_{in}(t)$$

$$i_1(t) + i_2(t) = i_{out}(t)$$

Luego,

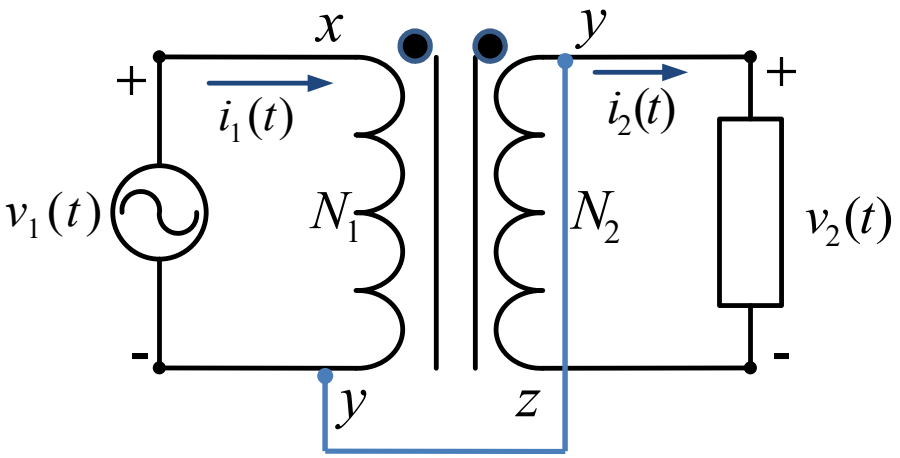
$$\frac{i_{out}(t)}{i_{in}(t)} = \frac{N_1 + N_2}{N_2}$$

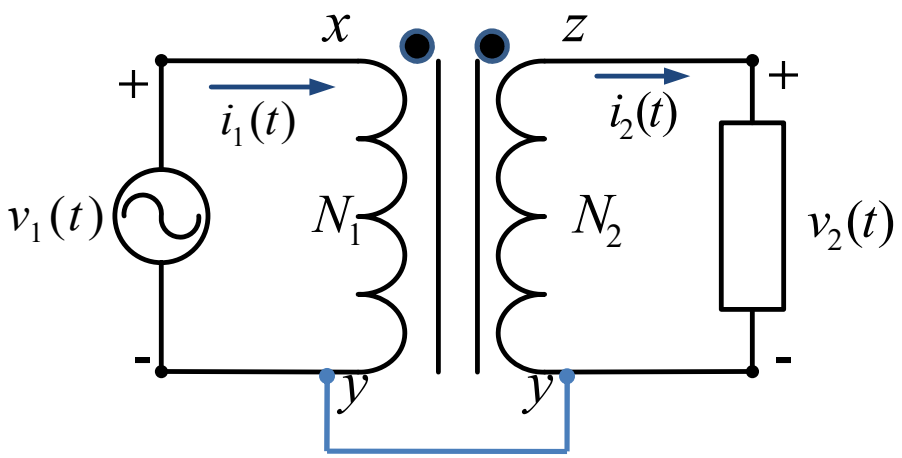


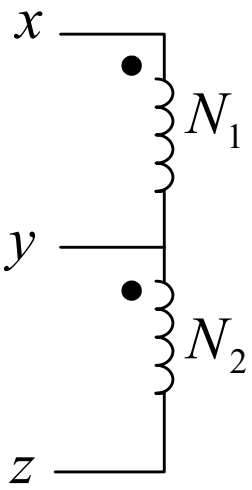
Autotransformador

3. Autotransformadores

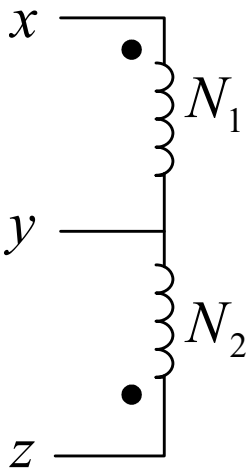
- **Conexiones :**







Conexión aditiva



Conexión sustractiva

Autotransformadores

3. Autotransformadores

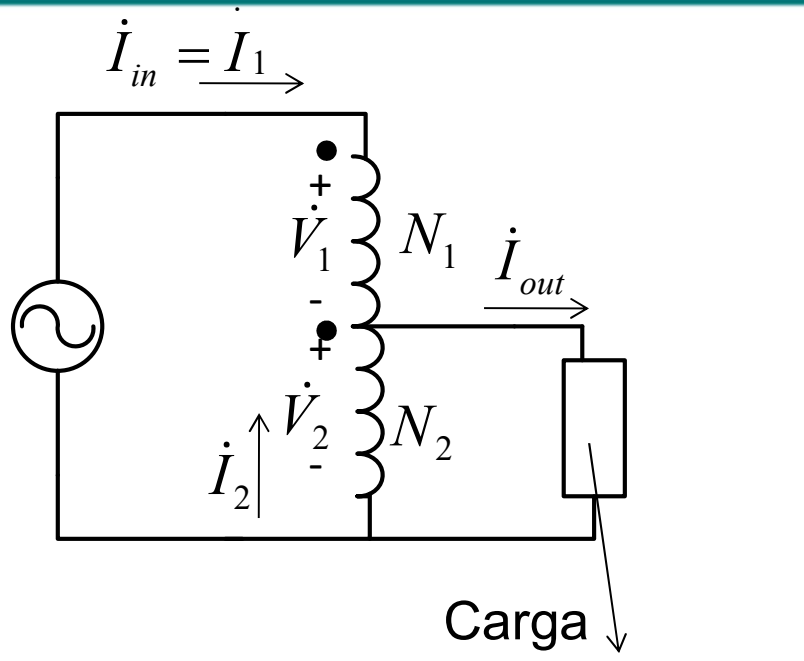
- **Potencia (RSP) :**

$$\dot{S}_1 = \dot{V}_1 \dot{I}_1^*$$

Potencia transferida por conexión eléctrica

$$\dot{S}_{out} = \dot{V}_{out}(\dot{I}_1 + \dot{I}_2)^*$$

Luego:



$$\frac{\dot{S}_1}{\dot{S}_{out}} = \frac{\dot{V}_1 \dot{I}_1^*}{\dot{V}_{out}(\dot{I}_1 + \dot{I}_2)^*} = \frac{N_1}{N_2} \frac{\dot{I}_1^*}{\left(\dot{I}_1 + N_1 \frac{\dot{I}_1}{N_2}\right)^*} = \frac{N_1}{N_2} \frac{1}{(1 + \frac{N_1}{N_2})} = \frac{N_1}{N_1 + N_2}$$

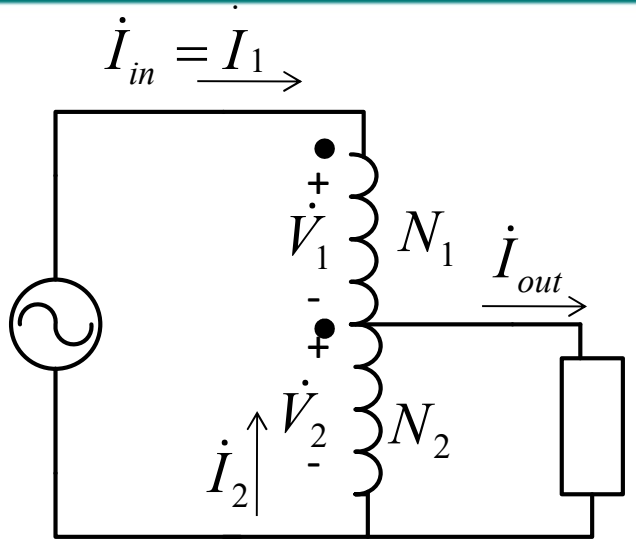
3. Autotransformadores

Entonces:

$$\dot{S}_2 = \dot{V}_2 \dot{I}_2^{\,*}$$

Potencia transferida por inducción magnética

$$\frac{\dot{S}_2}{\dot{S}_{out}} = \frac{N_1}{N_1 + N_2}$$



- Los enrollados deben estar diseñados para **resistir sólo una fracción de la potencia demandada** por la carga.

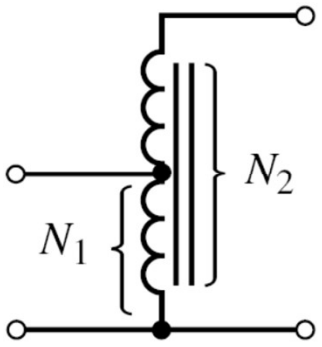
- No sólo se transfiere potencia por medio del acoplamiento magnético sino también **se transfiere potencia través de la conexión eléctrica**.

3. Autotransformadores

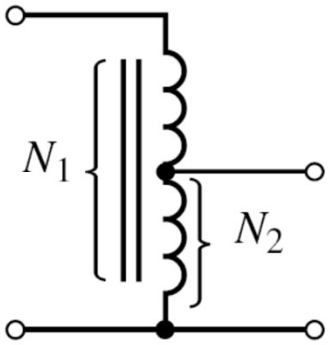
- **Ventajas:**
  - Menor tamaño con respecto a un transformador de igual potencia (kVA), puesto que se transmite energía eléctrica y magnéticamente.
  - Más económicos.

Sin embargo no permiten aislar tierras de distintos circuitos.

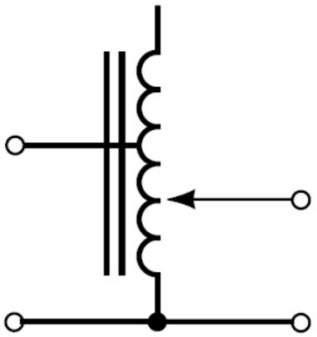
- **Tipos**



Elevador de Tensión



Reducción de Tensión


Variable (Variac)

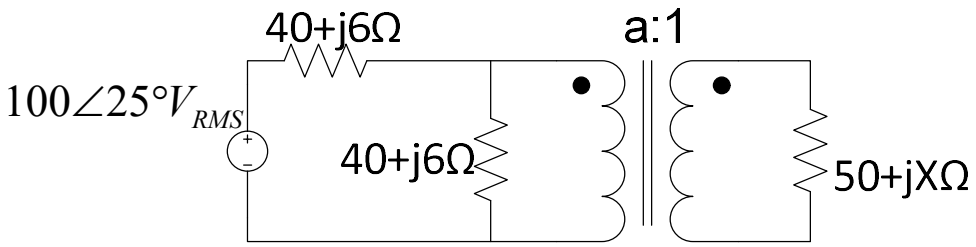
3. Ejercicios

Mas Ejemplos!

2.Transformadores

Problema 4: Parte A (50%)

Para el circuito de la figura, encuentre el valor de la razón de transformación “a” y la reactancia “X”; de tal manera, que estos valores permitan la máxima trasferencia de potencia media desde la fuente de voltaje, hacia la resistencia de 50Ω.



2.Transformadores

Problema 4:Parte B (50%)

Para el siguiente circuito, encuentre el valor de la magnitud y el ángulo de la corriente I3 y calcule la potencia disipada por la resistencia de 2.5Ω.

