Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ingeniería Eléctrica
IEE2123 - Circuitos Eléctricos

Tarea 8

Fasores y potencia

1º semestre 2023 - Profesor David Watts

Ayudante: Elena Contardo (ele.contardo@uc.cl)

- La tarea debe ser subida en formato .pdf a Canvas al buzón correspondiente.
- Es posible utilizar un comodín para poder entregar la tarea 3 días después del plazo final (contando fin de semana y festivos). Para esto, se debe enviar un correo al ayudante encargado avisando que se usará el comodín antes de que termine el plazo final original.
- No se aceptan tareas con letra ilegible.

Problema 1

Considere el circuito de la Figura 1 en régimen permanente:

a) Calcule la impedancia vista desde la fuente.

b) Calcule la frecuencia a la cual la impedancia es resistiva pura y reactiva pura. Además, determine la condición (dependiente de L y C) para que la impedancia sea inductiva.

c) Calcule la frecuencia a la cual la magnitud de la impedancia es máxima.

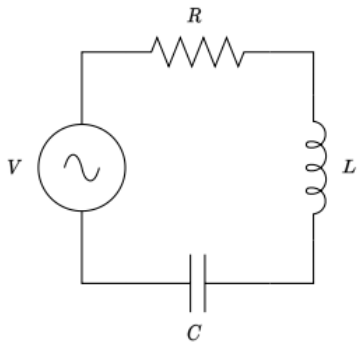


Figura 1: Circuito

Recordatorio:

Resistencia Reactancia

$$Z = R + jX$$

$$Y = \frac{1}{Z} = G + jB$$

Conductancia Susceptancia

- X>0: Z es inductiva.
- X<0: Z es capacitiva.
- R=0: Z es reactiva pura (capacitiva o inductiva).
- X=0: Z es resistiva pura.

Solución:

a) La impedancia es:

$$Z = R + jwL + \frac{1}{jwC} = R + jwL - \frac{j}{wC} = R + j(wL - \frac{1}{wC})$$

b) Para que sea resistiva pura $wL - \frac{1}{wC} = 0$, de esta forma:

$$wL - \frac{1}{wC} = 0 \rightarrow w = \frac{1}{\sqrt{LC}} \rightarrow f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

La única forma de que la impedancia sea reactiva pura es que $R = 0\Omega$, lo cual no depende de la frecuencia, de esta forma, no hay frecuencia que haga a la impedancia reactiva pura.

Que la impedancia sea inductiva significa que la reactancia es mayor a cero, de esta forma:

$$wL - \frac{1}{wC} > 0$$

$$w^2L - \frac{1}{C} > 0$$

$$w > \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

c) Para obtener la frecuencia a la cual la magnitud de la impedancia es máxima primero se debe encontrar el valor de la magnitud de la impedancia:

$$|Z(f)| = R^2 + (2\pi fL - \frac{1}{2\pi fC})^2$$

Luego, se deriva respecto a f y se iguala a cero:

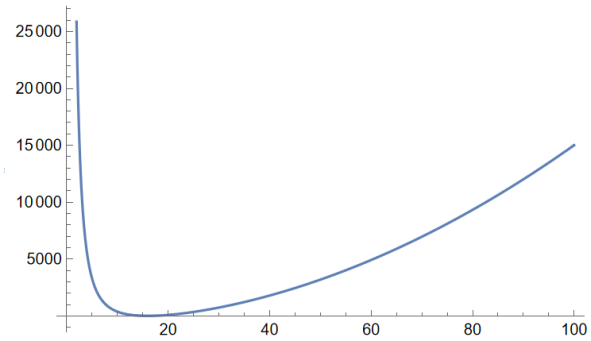
```
In[4]:= D[Sqrt[R^2 + (2*Pi*f*L - 1/(2*Pi*f*C))^2], f] // FullSimplify
Out[4]= (-1 + 16 C^2 f^4 L^2 π^4) / (2 C^2 f^3 π √((1-4 C f^2 L π^2)^2 / (C^2 f^2) + 4 π^2 R^2))

In[5]:= Solve[(-1 + 16 C^2 f^4 L^2 π^4) / (2 C^2 f^3 π √((1-4 C f^2 L π^2)^2 / (C^2 f^2) + 4 π^2 R^2)) == 0, f]
Out[5]= {{f → -1/(2 √C √L π)}, {f → -i/(2 √C √L π)}, {f → i/(2 √C √L π)}, {f → 1/(2 √C √L π)}}
```

De esta forma:

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

Evaluando el resultado anterior se observa que el punto encontrado corresponde al mínimo de la magnitud de la impedancia y no al máximo. De hecho, gráficando la función de magnitud (inventando valores para los componentes), se llega a lo siguiente:



Donde se observa que la magnitud no tiene un máximo definido, sino que tiende a infinito cuando la frecuencia tiende a infinito.

```
In[]:= Limit[2^2 + (2*Pi*f*0.2 - 1/(2*Pi*f*0.0005))^2, f → Infinity]
Out[]= ∞
```

Criterios de corrección:

- **1 pto.** Encuentra correctamente Z_L.
- **1.5 ptos.** Encuentra frecuencias a las que la carga es puramente resistiva y puramente reactiva.
- **1.5 ptos.** Determina la condición necesaria para que la carga sea puramente inductiva.
- **2 ptos.** Calcula correctamente la frecuencia a la cual la magnitud de la impedancia se maximiza.

Problema 2

Utilice fasores para determinar la corriente $i(t)$ del circuito en régimen permanente considerando que las fuentes tienen una frecuencia de 150Hz.

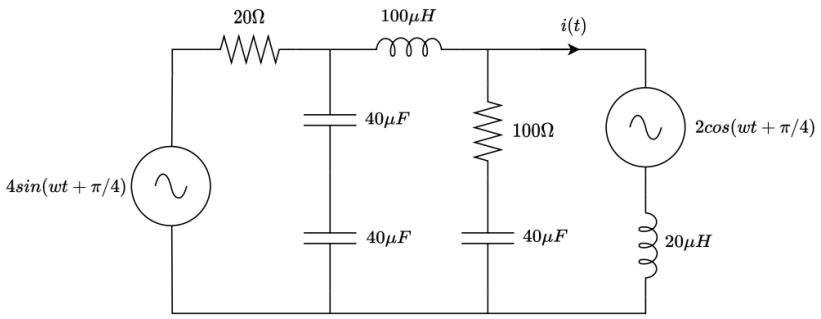


Figura 2: Circuito

Solución:

En primer lugar, se deben expresar las fuentes como fasor.

$$4sin(wt + \pi/4) = \frac{4}{\sqrt{2}}\angle 45 - 90^o = 2{,}82\angle -45^o = 1{,}99 - j1{,}99$$

$$2cos(wt + \pi/4) = \frac{2}{\sqrt{2}}\angle 45^o = 1 + j1$$

Luego, se trabaja todo como impedancias, calculando la corriente a partir del método de mallas, donde se fijó la siguiente polaridad:

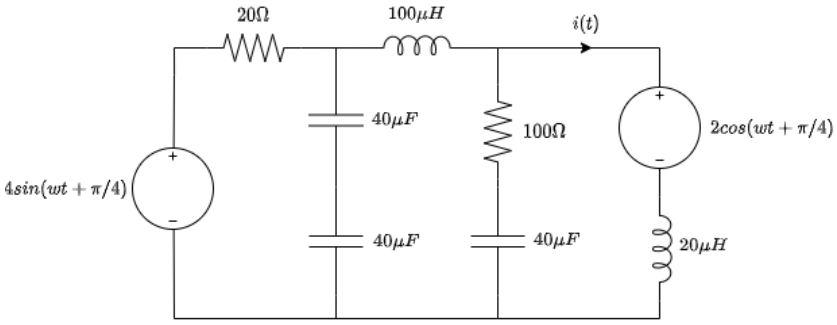


Figura 3: Circuito

Considerando $w = 2\pi f$:

Malla 1:

$$-2{,}82\angle -45^o + 20 \cdot I_1 + \frac{1}{20\mu w j} \cdot (I_1 - I_2) = 0$$

Malla 2:

$$\frac{1}{20\mu wj} \cdot (I_2 - I_1) + 100\mu wj \cdot I_2 + 100 \cdot (I_2 - I_3) + \frac{1}{40\mu wj} \cdot (I_2 - I_3) = 0$$

Malla 3:

$$100 \cdot (I_3 - I_2) + \frac{1}{40\mu wj} \cdot (I_3 - I_2) + 1{,}41\angle 45^o + 20\mu wj = 0$$

Resolviendo el sistema anterior:

$$I_1 = 0{,}04 - 0{,}15j$$

$$I_2 = 0{,}06 - 0{,}16j$$

$$I_3 = 0{,}06 - 0{,}18j = 0{,}19\angle -71{,}56^o$$

De esta forma:

$$i(t) = I_3 = 0{,}19\angle -71{,}56^o = 0{,}19\sqrt{2} \cdot cos(wt + -71{,}56^o)$$

A continuación se obtiene la respuesta para la otra combinación de polarización de las fuentes:

- Cambiando la polaridad de la fuente de la izquierda y manteniendo fija la polaridad de la fuente de la derecha:

$$i(t) = -0{,}13 + 0{,}018jA$$

- Cambiando la polaridad de ambas fuentes:

$$i(t) = -0{,}06 + 0{,}17jA$$

- Cambiando la polaridad de la fuente de la derecha y manteniendo fija la polaridad de la fuente de la izquierda:

$$i(t) = 0{,}13 - 0{,}02jA$$

Criterios de corrección:

- **1 pto.** Se obtiene correctamente el fasor de las fuentes de voltaje.
- **2 ptos.** Se plantean correctamente las ecuaciones que definen las magnitudes representativas del circuito (según el método utilizado).
- **2 ptos.** Resuelve correctamente el sistema de ecuaciones planteado y se obtiene la corriente $i(t)$ como fasor (dominio de la frecuencia).
- **1 ptos.** Se realiza la transformación fasorial inversa correctamente, es decir, se obtiene $i(t)$ en el dominio del tiempo.

Problema 3

Para el circuito de la Figura 3 en régimen permanente:

a) Determine la impedancia Z_{in} vista por la fuente de entrada. Hint: Se recomienda considerar una fuente de prueba de valor $V(w)$ con una corriente $I(w)$ que circula por esta misma en la posición que se encuentra la fuente de entrada, de esta forma, $Z_{in}(w) = V(w)/I(w)$.

b) ¿Qué ocurre con Z_{in} si $w \to 0$ o $w \to \infty$? Analice ambos casos.

c) Encuentre el equivalente de Thevenin visto por los terminales de la carga.

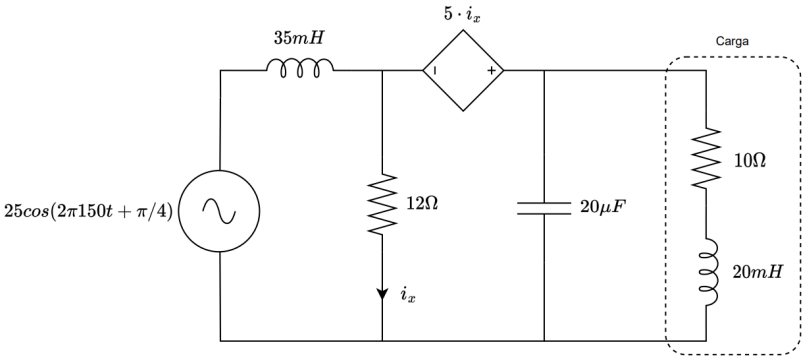


Figura 4: Circuito

Solución:

a) Colocando una fuente de prueba de valor V, con una corriente I, se definen dos ecuaciones, en primer lugar, la corriente que pasa por la inductancia de $35mH$, y luego, la corriente en el supernodo.

$$\frac{V - V_x}{jw \cdot 35m} = I$$

$$I = \frac{V_x - 0}{12} + \frac{(V_x + 5 \cdot V_x/12) - 0}{\frac{1}{wj \cdot 20\mu} || (10 + jw \cdot 20m)}$$

A partir de la segunda ecuación es posible despejar V_x para luego reemplazarlo en la primera ecuación.

Despejando V_x:

$$I = V_x \left(\frac{1}{12} + \frac{(1 + 5/12)}{\frac{1}{wj \cdot 20\mu} || (10 + jw \cdot 20m)} \right) \to I = V_x \cdot A(w)$$

$$V_x = \frac{I}{A(w)}$$

Se reemplaza en la primera ecuación y se despeja V:

$$V - \frac{I}{A(w)} = I \cdot jw \cdot 35m$$

$$V = I \cdot (jw \cdot 35m + \frac{1}{A(w)})$$

Se calcula la impedancia de entrada:

$$Z_{in} = \frac{V}{I} = jw \cdot 35m + \frac{1}{\frac{1}{12} + \frac{(1+5/12)}{\frac{1}{wj \cdot 20\mu}||(10+jw \cdot 20m)}}$$

b) Se analiza qué pasa con Z_{in} cuando la frecuencia angular tiende a cero e infinito.

$w \to 0$: Este análisis es equivalente a calcular la impedancia de entrada considerando los inductores como un cortocircuito y los capacitores como un circuito abierto.

$$Z_{in} = \frac{1}{\frac{1}{12} + \frac{(1+5/12)}{10}} = 4{,}44\Omega$$

$w \to \infty$: Este análisis es equivalente a calcular la impedancia de entrada considerando los inductores como un circuito abierto y los capacitores como un cortocircuito.

$$Z_{in} = \infty\Omega$$

c) Se debe calcular el voltaje de Thevenin y la resistencia de Thevenin:

Voltaje de thevenin: Se considera la carga como un circuito abierto, calculando el voltaje entre los terminales (que es equivalente al voltaje en el capacitor) considerando al inductor y capacitor como inductancias.

$$25cos(2\pi 150t + \pi/4) = 25\angle 45^o V = 17{,}67 + 17{,}67jV$$

A partir del método de nodos, planteando la ecuación del supernodo:

$$\frac{-25\angle 45^o - V_x}{wj \cdot 35m} + \frac{0 - V_x}{12} = \frac{(V_x + 5 \cdot V_x/12) - 0}{\frac{1}{jw \cdot 20\mu}}$$

Despejando V_x:

$$V_x = -6{,}69406 + 6{,}13792jV$$

De esta forma, el voltaje en el capacitor, que corresponde al voltaje de thevenin, es:

$$V_x + 5 \cdot i_x = V_x + \frac{5 \cdot V_x}{12} = -9{,}48325 + 8{,}69538j = 12{,}86\angle$$

Luego, se calcula la impedancia vista por la carga con una fuente de prueba, tal como se hizo en el primer inciso.

$$V = V_x + \frac{5 \cdot V_x}{12} = V_x \cdot \frac{17}{12}$$
$$I = \frac{V - 0}{\frac{1}{wj \cdot 20\mu}} + \frac{V_x - 0}{wj \cdot 35m||12}$$

Despejando V_x en la primera ecuación y reemplazándola en la segunda:

$$V_x = V \cdot \frac{12}{17}$$
$$I = \frac{V}{\frac{1}{wj \cdot 20\mu}} + \frac{V \cdot 12/17}{wj \cdot 35m||12}$$
$$I = V \cdot \left(wj \cdot 20\mu + \frac{12/17}{wj \cdot 35m||12} \right)$$
$$Z = \frac{V}{I} = \frac{1}{wj \cdot 20\mu + \frac{12/17}{wj \cdot 35m||12}} = 16{,}9681 + 0{,}735403j\Omega$$

Criterios de corrección:

- **2 ptos.** Calcula correctamente Z_{in}.
- **2 ptos.** Hace análisis correcto para $\omega \to 0$ y $\omega \to \infty$.
- **2 ptos.** Encuentra correctamente el equivalente de Thévenin visto por los terminales de la carga.

Problema 4

Las impedancias $Z_1 = 0{,}8 + 5{,}6j\Omega$, $Z_2 = 8 - 16j\Omega$ y un motor de inducción monofásico están conectados en paralelo con una fuente de voltaje $220\angle 0 V_{fn}$ a 50Hz. El motor consume 5kVA de potencia con un factor de potencia de 0.8 en atraso. Calcule lo siguiente:

a) Potencias aparentes, activas y reactivas de las impedancias Z_1, Z_2 y el motor.

b) Potencia, corriente y factor de potencia de la fuente de voltaje.

c) Si se conecta un capacitor en paralelo a estas impedancias, determine la capacidad necesaria para obtener un factor de potencia unitario.

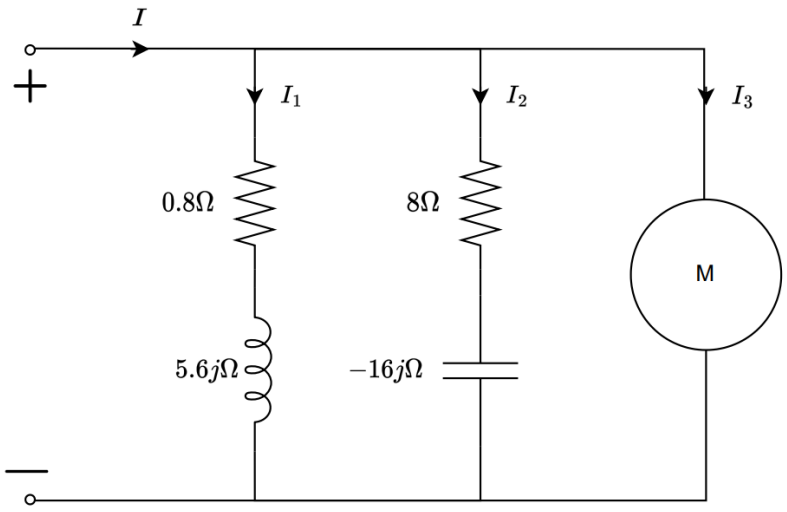


Figura 5: Circuito

Solución:

a) Se calcula S, P y Q para Z_1, Z_2 y el motor:

Z_1:

$$S = VI^* = V \cdot (\frac{V}{Z_1})^* = \frac{||V||^2}{Z_1^*} = 1210 + 8470j \text{ VA}$$
$$P = 1210W$$
$$Q = 8470VAr$$

Z_2:

$$S = VI^* = V \cdot (\frac{V}{Z_1})^* = \frac{||V||^2}{Z_2^*} = 1210 - 2420j \text{ VA}$$
$$P = 1210W$$
$$Q = -2420VAr$$

Motor:

$$P = S \cdot fp = 5k \cdot 0{,}8 = 4kW$$
$$Q = S \cdot sin[cos^{-1}(fp)] = 3kVAr$$
$$S = P + Qj = 4k + 3kjVA$$

b) La potencia compleja de la fuente se calcula de la siguiente forma:

$$S_p = S_{Z_1} + S_{Z_2} + S_M = 6419{,}6 + 9048{,}6jVA = 11{,}09\angle 54{,}64^o kVA$$

A partir de lo anterior es posible obtener la corriente:

$$S = VI^* \rightarrow I = (\frac{S_p}{V})^* = 29{,}18 - 41{,}13jA = 50{,}4\angle -54{,}64^oA$$

Y el factor de potencia:

$$fp = cos(\theta_v - \theta_i) = cos(0 - -54{,}64) = 0{,}578 \text{ en atraso}$$

c) Del inciso anterior se conoce que la potencia reactiva del total de los consumos es de $9048{,}6VAr$. Manteniendo la potencia activa constante, para obtener un factor de potencia unitario la potencia reactiva del capacitor debe ser:

$$Q_c = -9048{,}6VAr$$

Donde la capacitancia necesaria para obtener este valor viene dada por:

$$S_c = jQ_c = \frac{|V|^2}{-1/jwC} = -jwC|V|^2$$

Desarrollando y reemplazando $w = 2\pi f$, con $f = 50Hz$, se obtiene:

$$C = \frac{-Q_c}{2\pi f|V|^2} = 0{,}595mF$$

Criterios de corrección:
2 ptos cada inciso completo. Se describe el detalle de puntaje a continuación:

Inciso a)

- **0.7 ptos.** Cálculo de potencias asociadas a Z_1.
- **0.7 ptos.** Cálculo de potencias asociadas a Z_2.
- **0.6 ptos.** Cálculo de potencias asociadas al motor.

Inciso b)

- **0.7 ptos.** Cálculo de la potencia de la fuente.
- **0.7 ptos.** Cálculo de la corriente.
- **0.6 ptos.** Cálculo del factor de potencia.

Inciso c)

- **1 pto.** Determinación de la potencia reactiva del capacitor.
- **1 pto.** Cálculo de la capacitancia.

Problema 5

Una planta de manufactura monofásica se encuentra ubicada a 3.5km de una subestación por medio de una línea de transmisión con una reactancia serie de $0{,}5\Omega/km$. Se sabe que la planta se encuentra operando a un voltaje de línea de $380\angle 0$ a 60Hz y consume 120kW con un factor de potencia de 0.8 en atraso.

a) Encuentre el voltaje y el factor de potencia en el extremo de envío de la línea de transmisión.

b) El valor del banco de capacitores para que la planta tenga un factor de potencia unitario.

Solución:

a) A partir del consumo de la planta se calcula la potencia compleja:

$$S = \frac{P}{fp}\angle cos^{-1}(fp) = \frac{120k}{0{,}8}\angle cos^{-1}(0{,}8) = 150k\angle 36{,}86^o \text{ VA}$$

Luego, $S = VI^*$, a partir de lo cual se calcula la corriente en la línea considerando que se tiene el voltaje al que se encuentra operando la planta.

$$150k\angle 36{,}86^o = 380\angle 0^o \cdot I^*$$

$$I = \left(\frac{150k\angle 36{,}86^o}{380\angle 0^o}\right)^*$$

$$I = 0{,}39k\angle -36{,}86^o A$$

Ya teniendo esta información, es posible obtener el voltaje en el extremo de envío de la línea de transmisión, junto con el factor de potencia:

$$V_s = (3{,}5 \cdot 0{,}5j) \cdot 0{,}39k\angle -36{,}86^o + 380\angle 0^o = 959{,}76\angle 34{,}67^o \text{ V}$$

$$f_p = cos(\theta_v - \theta_i) = cos(34{,}67 - -36{,}86) = 0{,}31 \text{ en atraso}$$

b) A partir de la potencia compleja se obtiene la potencia reactiva anterior de la planta:

$$S_{old} = 150k\angle 36{,}86^o = 120k + 89{,}97kj \text{ VA}$$

$$Q_{old} = 89{,}97kj\text{VAr}$$

Luego, como se quiere un factor de potencia unitario, $Q_{new} = 0$, de esta forma:

$$Q_{cap} + Q_{old} = 0$$

$$Q_{cap} = -89{,}97k\text{VAr}$$

Finalmente,

$$C = \frac{-Q_{cap}}{w \cdot V_{rms}^2} = \frac{- - 89{,}97k}{2\pi 60 \cdot 380^2} = 1{,}65 \cdot 10^{-3} F$$

Criterios de corrección:

- **1 pto.** Obtiene valor de la potencia compleja.
- **1.5 ptos.** Obtiene corriente de línea.
- **1.5 ptos.** Obtiene voltaje en el extremo de envío y el factor de potencia en ese punto.
- **2 ptos.** Calcula el valor del banco de capacitores.

Problema 6

Considere el circuito de la Figura 5 en régimen estacionario, donde la corriente I tiene un valor $1{,}076\angle -8{,}3A$.

a) Determine la potencia compleja alimentada por la fuente de voltaje.

b) Si la potencia compleja recibida por Z_1 es de $6{,}945 + 13{,}89j$VA, determine los valores de R_1 y L_1.

c) Si la potencia activa recibida por Z_3 es de 4.63W y presenta un factor de potencia igual a 0.56 en retardo, determine los valores de R_3 y L_3.

d) Determine los valores de C_2 y R_2 que permiten satisfacer todo lo anterior. Además, señale el factor de potencia de Z_2.

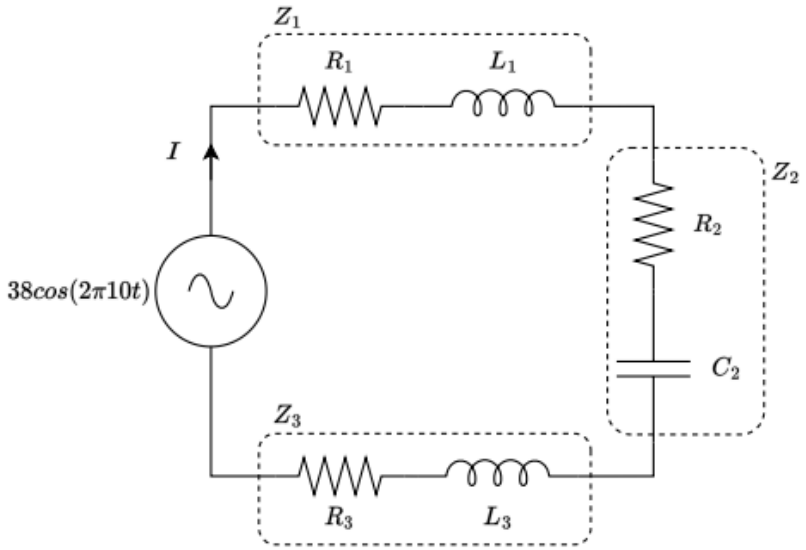


Figura 6: Circuito

Solución:

a) En primer lugar se convierte el voltaje de la fuente a fasor:

$$38cos(2\pi 10t) = \frac{30}{\sqrt{2}}\angle 0^o = 26{,}87\angle 0^o \quad V$$

Luego, se calcula la potencia compleja:

$$S = VI^* = 26{,}87\angle 0^o \cdot (1{,}076\angle -8{,}3)^* = 28{,}91\angle 8{,}3^o VA = 28{,}6 + 4{,}17jVA$$

b) Se relaciona la potencia compleja con la impedancia y corriente:

$$S = VI^* = (I \cdot Z) \cdot I^*$$

Considerando $I = I\angle X^o$:

$$S = (I\angle X^o \cdot Z) \cdot (I\angle X^o)^* = (I\angle X^o \cdot Z) \cdot I\angle -X^o = I^2\angle 0^o \cdot Z = |I|^2 \cdot Z$$

De esta forma,

$$Z_1 = \frac{S_1}{|I|^2} = \frac{6{,}945 + 13{,}89j}{1{,}076^2} = 13{,}41\angle 63{,}43^o$$

A partir de lo anterior:

$$Z_1 = R_1 + 2\pi f L_1 j = R_1 + 2\pi \cdot 10 \cdot L_1 j = 5{,}99 + 11{,}99j$$

Por lo que finalmente:

$$R_1 = 5{,}99\Omega$$
$$L_1 = 0{,}19H$$

c) Se calcula la potencia compleja recibida por Z_3 a partir de la información dada:

$$S_3 = \frac{P}{fp}\angle cos^{-1}(fp) = \frac{4{,}63}{0{,}56}\angle cos^{-1}(0{,}56) = 8{,}26\angle 55{,}94^o VA = 4{,}62 + 6{,}84jVA$$

Luego, se realiza lo mismo que en el inciso anterior:

$$Z_3 = \frac{S_3}{|I|^2} = \frac{8{,}26\angle 55{,}94^o}{1{,}076^2} = 7{,}13\angle 55{,}94^o$$

$$Z_3 = R_3 + 2\pi f L_3 j = R_3 + 2\pi \cdot 10 \cdot L_3 j = 3{,}99 + 5{,}9j$$
$$R_3 = 3{,}99\Omega$$
$$L_3 = 0{,}09H$$

d) Se calcula la potencia compleja recibida por Z_2 a partir de conservación de energía:

$$S_f = S_1 + S_2 + S_3$$

$$S_2 = S_f - S_1 - S_3$$

$$S_2 = 28{,}6 + 4{,}17j - 6{,}945 - 13{,}89j - 4{,}62 - 6{,}84j = 17{,}035 - 16{,}56jVA$$

Luego, se calcula la impedancia:

$$Z_2 = \frac{S_2}{|I|^2} = \frac{17{,}035 - 16{,}56j}{1{,}076^2} = 14{,}71 - 14{,}3j$$

$$Z_2 = R_2 - \frac{j}{2\pi f C_2} = R_2 - \frac{j}{2\pi 10 \cdot C_2} = 14{,}71 - 14{,}3j$$

$$R_2 = 14{,}71\Omega$$

$$C_2 = 1{,}11mF$$

Y el factor de potencia:

$$fp = cos(tan^{-1}(\frac{-16{,}56}{17{,}035})) = cos(-44{,}18) = 0{,}71 \text{ en adelanto}$$

Criterios de corrección:

Inciso a) **1 pto.**

- **0.3 ptos.** Transformar voltaje del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia.
- **0.7 ptos.** Cálculo de la potencia compleja.

Inciso b) **1.5 ptos.**

- **1 ptos.** Cálculo de Z_1 como fasor.
- **0.5 ptos.** Determinación de R_1 y L_1 a partir de Z_1.

Inciso c) **1.5 ptos.**

- **0.5 ptso.** Cálculo de S_3.
- **0.5 ptos.** Cálculo de Z_3.
- **0.5 ptos.** Determinación de R_3 y L_3 a partir de Z_3.

Inciso d) **2 ptos.**

- **0.7 ptos.** Cálculo de S_2.
- **0.8 ptos.** Cálculo de Z_2.
- **0.5 ptos.** Cálculo de $f.p.$