Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ingeniería Eléctrica
IEE2123 - Circuitos Eléctricos

Tarea 13

Redes de dos puertos
1º semestre 2023 - Profesor David Watts

Ayudante: Elena Contardo (ele.contardo@uc.cl)

- La tarea debe ser subida en formato .pdf a Canvas al buzón correspondiente.
- Es posible utilizar un comodín para poder entregar la tarea 3 días después del plazo final (contando fin de semana y festivos). Para esto, se debe enviar un correo al ayudante encargado avisando que se usará el comodín antes de que termine el plazo final original.
- No se aceptan tareas con letra ilegible.

Problema 1

Determine los valores de los parámetros Z, Y y H.

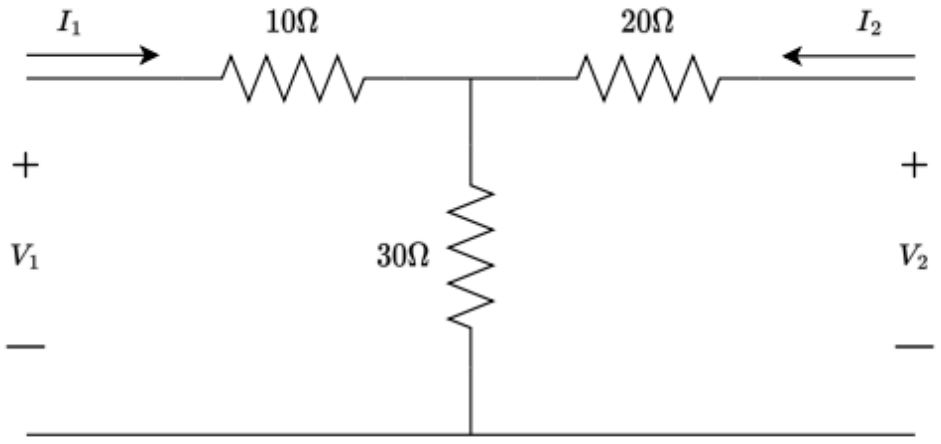


Figura 1: Red T

Solución:

Parámetro Z:
Debido a que el circuito tiene estructura tipo T, se pueden encontrar rápidamente los

parámetros Z.

$$Z_{11} - Z_{12} = 10$$
$$Z_{22} - Z_{21} = 20$$
$$Z_{12} = Z_{21} = 30$$

Resolviendo se obtiene:

$$Z_{11} = 40$$
$$Z_{22} = 50$$

Parámetro Y:
Para encontrar Y se puede considerar que Z e Y son matrices inversas unas de otras, por lo que $Y = Z^{-1}$. Por otro lado, también se puede resolver el circuito considerando:

$$Y_{11} = \frac{I_1}{V_1}|_{V_2=0}$$
$$Y_{12} = \frac{I_1}{V_2}|_{V_1=0}$$
$$Y_{22} = \frac{I_2}{V_2}|_{V_1=0}$$
$$Y_{21} = \frac{I_2}{V_1}|_{V_2=0}$$

Resolviendo para cada caso:

Considerando $V_2 = 0$:
Y_{11}:

$$V_1 = I_1 \cdot (10 + 20||30) = I_1 \cdot 22$$
$$Y_{11} = \frac{I_1}{V_1} = \frac{1}{22}$$

Y_{21}:

$$I_2 = \frac{-3}{5} I_1$$
$$Y_{21} = \frac{I_2}{V_1} = \frac{-3}{5} Y_{11} = \frac{-3}{110}$$

Considerando $V_1 = 0$:
Y_{22}:

$$V_2 = I_2 \cdot (20 + 30||10) = I_1 \cdot \frac{55}{2}$$
$$Y_{22} = \frac{I_1}{V_2} = \frac{2}{55}$$

Y_{12}:

$$I_1 = \frac{-3}{4} I_2$$

$$Y_{12} = \frac{I_1}{V_2} = \frac{-3}{4} Y_{22} = \frac{-3}{110}$$

Tiene sentido que $Y_{12} = Y_{21}$, ya que no se cuenta con fuentes dependientes o amplificadores operacionales.

Parámetros H:
Se considera lo siguiente:

$$h_{11} = \frac{V_1}{I_1}|_{V_2=0}$$

$$h_{12} = \frac{V_1}{V_2}|_{I_1=0}$$

$$h_{22} = \frac{I_2}{V_2}|_{I_1=0}$$

$$h_{21} = \frac{I_2}{I_1}|_{V_2=0}$$

Resolviendo para cada caso:

Considerando $V_2 = 0$:
h_{11}:

$$h_{11} = \frac{V_1}{I_1} = 10 + 20||30 = 22 = Z_{in}$$

h_{21}:

$$I_2 = \frac{-3}{5} I_1$$

$$h_{21} = \frac{I_2}{I_1} = \frac{-3}{5}$$

Considerando $I_1 = 0$:
h_{12}:

$$V_1 = \frac{3}{5} V_2$$

$$h_{12} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{3}{5}$$

h_{22}:

$$h_{22} = \frac{I_2}{V_2} = \frac{1}{20 + 30} = \frac{1}{50}$$

Criterios de corrección:

- **2 ptos.** Determina correctamente los valores de los parámetros Z.
- **2 ptos.** Determina correctamente los valores de los parámetros Y.
- **2 ptos.** Determina correctamente los valores de los parámetros H.
  Existe posibilidad de puntaje parcial

Problema 2

Obtenga los valores del parámetro T.

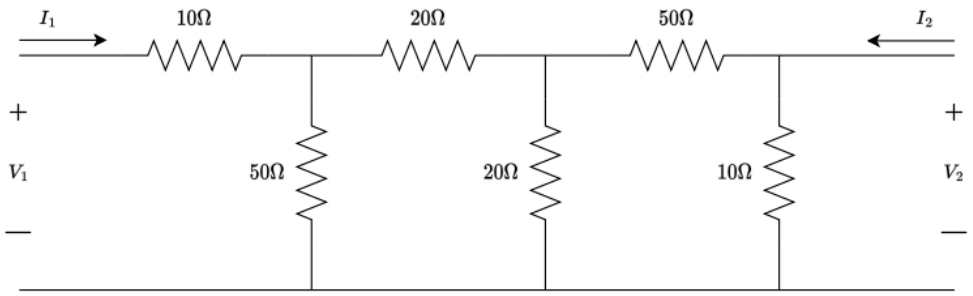


Figura 2: Redes en cascada

Solución: Se observa que el circuito corresponde a la cascada de dos redes, una en formato T y otra en formato Π. De esta forma, es posible calcular los parámetros T de cada una de las redes y luego multiplicar ambas matrices.

Se sabe que los parámetros T vienen dado por las siguientes expresiones:

$$A = \frac{V_1}{V_2}|_{I_2=0}$$

$$B = -\frac{V_1}{I_2}|_{V_2=0}$$

$$C = \frac{I_1}{V_2}|_{I_2=0}$$

$$D = -\frac{I_1}{I_2}|_{V_2=0}$$

Ahora se obtienen para cada una de las configuraciones:

Configuración T:

Considerando $I_2 = 0$:
A_1:

$$V_2 = \frac{50}{60} V_1$$

$$A_1 = \frac{V_1}{V_2} = \frac{6}{5}$$

C_1:

$$V_2 = 50 I_1$$

$$C_1 = \frac{I_1}{V_2} = \frac{1}{50}$$

Considerando $V_2 = 0$:
B_1:

$$I_1 = \frac{V_1}{20||50 + 10}$$

$$I_2 = -I_1 \frac{50}{70} = -V_1 \frac{50}{70 \cdot (20||50 + 10)}$$

$$B_1 = \frac{-V_1}{I_2} = 34$$

D_1:

$$I_2 = -I_1 \frac{50}{70}$$

$$D_1 = \frac{-I_1}{I_2} = \frac{7}{5}$$

Configuración Π:

Considerando $I_2 = 0$:
A_2:

$$V_2 = \frac{10}{60} V_1$$

$$A_2 = \frac{V_1}{V_2} = 6$$

C_2:

$$I_1 = \frac{V_1}{15}$$

$$I_1 = \frac{6 V_2}{15}$$

$$C_2 = \frac{I_1}{V_2} = \frac{2}{5}$$

Considerando $V_2 = 0$:
B_2:

$$I_2 = \frac{-V_1}{50}$$
$$B_2 = \frac{-V_1}{I_2} = 50$$

D_2:

$$I_1 = \frac{V_1}{20||50}$$
$$I_1 = \frac{-50I_2 \cdot 70}{20 \cdot 50}$$
$$D_2 = \frac{-I_1}{I_2} = \frac{7}{2}$$

Por lo tanto:

$$T_1 = \begin{pmatrix} 6/5 & 34 \\ 1/50 & 7/5 \end{pmatrix} \quad T_2 = \begin{pmatrix} 6 & 50 \\ 2/5 & 7/2 \end{pmatrix}$$
$$T = T_1 \cdot T_2 = \begin{pmatrix} 208/10 & 179 \\ 17/25 & 59/10 \end{pmatrix}$$

Criterios de corrección:

- **4 ptos.** Si plantea bien el problema, pero el resultado final es incorrecto.
- **6 ptos.** Si resultado es correcto.

Problema 3

Obtenga los parámetros G y Z de la siguiente red.

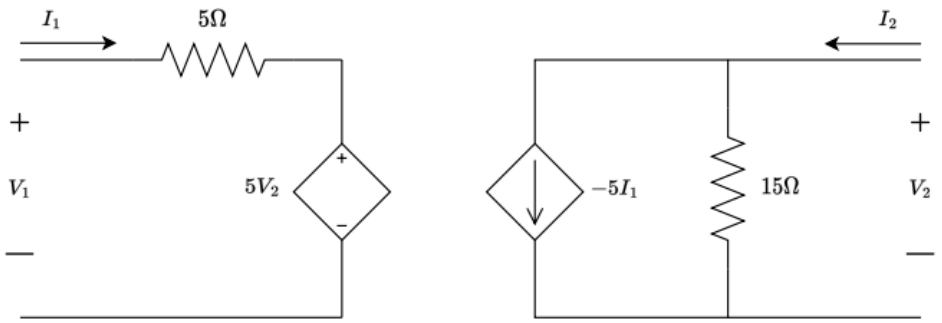


Figura 3: Red H

Solución: Se observa que los parámetros H están dados por los componentes del circuito.

$$h_{11} = 5$$

$$h_{21} = -5$$
$$h_{22} = 1/15$$
$$h_{12} = 5$$

h_{22} es el único que corresponde a $\frac{1}{R\Omega}$. Un ejemplo:

The *h* parameters of a two-port device are given by

$\mathbf{h}_{11} = 600\Omega$, $\mathbf{h}_{12} = 10^{-3}$, $\mathbf{h}_{21} = 120$, $\mathbf{h}_{22} = 2\times10^{-6}$ S

Draw a circuit model of the device including the value of each element.

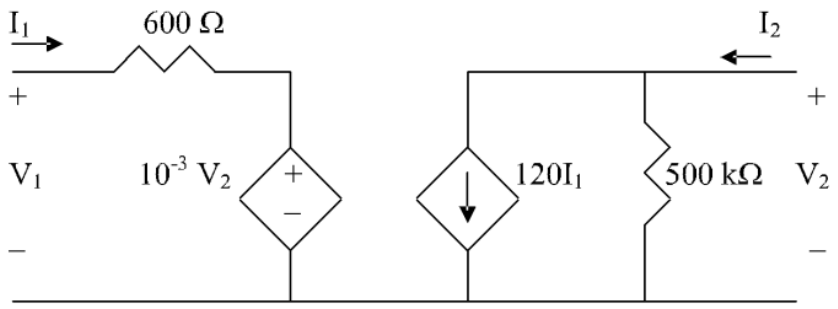


Figura 4: Red H

Si se observa, el valor de h_{22} es el inverso de la resistencia, lo que se debe a que este valor corresponde a la admitancia.

Para obtener G, se sabe que es la inversa de la matriz H, es decir, $G = H^{-1}$. De esta forma se obtiene:

$$\text{G}=\begin{pmatrix} 3/20 & -1/20 \\ 1/20 & 1/20 \end{pmatrix}$$

Luego, para los parámetros Z se pueden obtener a partir de las ecuaciones formadas con los parámetros H (también se puede hacer con G).

$$V_1 = 5I_1 + 5V_2$$
$$I_2 = -5I_1 + 15V_2$$

Sabiendo que los parámetros Z se obtienen de la siguiente forma:

$$z_{11} = \frac{V_1}{I_1}|_{I_2=0}$$

$$z_{12} = \frac{V_1}{I_2}|_{I_1=0}$$

$$z_{22} = \frac{V_2}{I_2}|_{I_1=0}$$

$$z_{21} = \frac{V_2}{I_1}|_{I_2=0}$$

Para $I_1 = 0$:

$$V_1 = 0 + 5V_2$$

$$I_2 = 0 + \frac{1}{15}V_2$$

De esta forma:

$$z_{12} = \frac{V_1}{I_2} = 75$$

$$z_{22} = \frac{V_2}{I_2} = 15$$

Para $I_2 = 0$:

$$V_1 = 5I_1 + 5V_2$$

$$0 = -5I_1 + \frac{1}{15}V_2$$

De esta forma:

$$z_{11} = \frac{V_1}{I_1} = 380$$

$$z_{21} = \frac{V_2}{I_1} = 75$$

Criterios de corrección:

- **4 ptos.** Si plantea bien el problema, pero el resultado final es incorrecto.
- **6 ptos.** Si resultado es correcto.

Problema 4 - Segundo Orden

Determine la respuesta completa de $V_c(t)$ para $t > 0$ en el circuito de la figura 1. Suponga que el circuito está en estado estable, cuando en $t = 0$ el switch S_1 pasa de estar unido al nodo de la fuente de valor V_2 a la fuente de valor V_1. Considere que $V_1(t) = 6 \cdot e^{-3t}$ y $V_2(t) = 10V$.

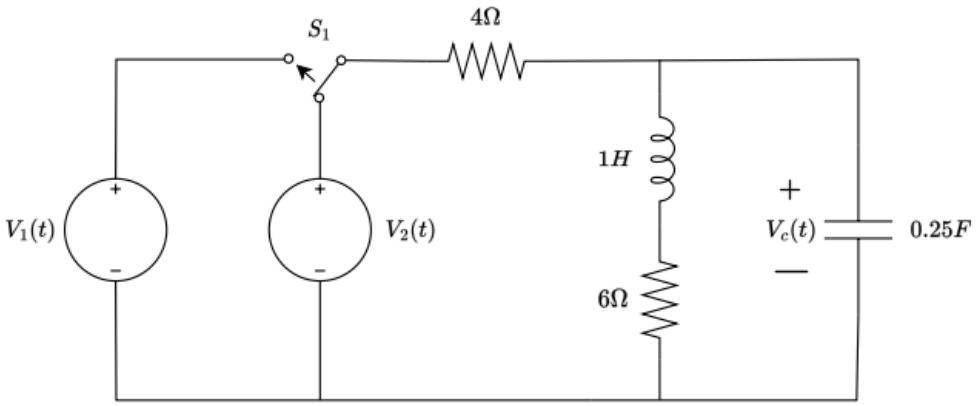


Figura 5: Circuito de segundo orden

Solución:

Se calculan las condiciones iniciales:

$$V_c(0^+) = V_c(0^-) = 6V$$

$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = 1A$$

A continuación, se obtienen ecuaciones que permiten modelar V_c:

Ecuación de malla:

$$-v_c + L \cdot \frac{di_L}{dt} + 6 \cdot i_L = 0$$

Ecuación de nodo:

$$\frac{v_c - V_1}{4} + i_L + C \cdot \frac{dv_c}{dt} = 0$$

Reordenando es posible llegar a lo siguiente:

$$\frac{d^2v_c}{dt^2} + 7\frac{dv_c}{dt} + 10v_c = \frac{dV_1}{dt} + 6V_1$$

La ecuación característica es la siguiente:

$$s^2 + 7s + 10 = 0$$

Donde las raíces son: $s_1 = -2$ y $s_2 = -5$.

Así, la respuesta natural viene dada por:

$$v_c^h = k_1 \cdot e^{-2t} + K_2 \cdot e^{-5t}$$

Luego, la respuesta forzada tiene la forma $v_c^p = K_3 \cdot e^{-3t}$. Se reemplaza en la ecuación diferencial.

$$9K_3 \cdot e^{-3t} - 21K_3 \cdot e^{-3t} + 10K_3 \cdot e^{-3t} = -18 \cdot e^{-3t} + 36 \cdot e^{-3t}$$

A partir de lo cual se obtiene $K_3 = -9$.

$$v_c = k_1 \cdot e^{-2t} + K_2 \cdot e^{-5t} - 9 \cdot e^{-3t}$$

A continuación se encuentran las constantes a partir de las condiciones iniciales.

Con $v_c(0) = 6$:

$$v_c(0) = 6 = K_1 + K_2 - 9$$

Con $i_L(0) = 1$:

$$\frac{dv_c(0)}{dt} = -4i_L(0) - v_c(0) + V_1(0) = -4 - 6 + 6 = -4$$

$$\frac{dv_c(0)}{dt} = -2K_1 - 5K_2 + 27 = -4$$

Resolviendo:

$$K_1 = \frac{44}{3} \qquad K_2 = \frac{1}{3}$$

Finalmente:

$$v_c(t) = 44/3 \cdot e^{-2t} + 1/3 \cdot e^{-5t} - 9 \cdot e^{-3t}$$

Criterios de corrección:

- **1 pto.** Plantea correctamente condiciones iniciales.
- **2 ptos.** Plantea correctamente la ecuación de 2do orden del circuito.
- **2 ptos.** Plantea correctamente la respuesta homogénea y particular del circuito.
- **1 pto.** Resultado final correcto.