

Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Eléctrica

Transformadores

Profesor Álvaro Lorca

IEE2123 – Circuitos Eléctricos
Segundo Semestre 2018

Agradecimientos material: Ángel Abusleme, Enrique Álvarez, Daniel Olivares

Introducción

- A la fecha hemos estudiado varias cosas, pero en cuanto a componentes circuitales pasivos sólo hemos estudiado el resistor, el capacitor y el inductor. En este capítulo introduciremos otro elemento circuital muy importante: el transformador.

- El transformador surge del acoplamiento de dos inductores, lo que finalmente se traduce en un bloque de cuatro terminales con propiedades circuitales muy interesantes.

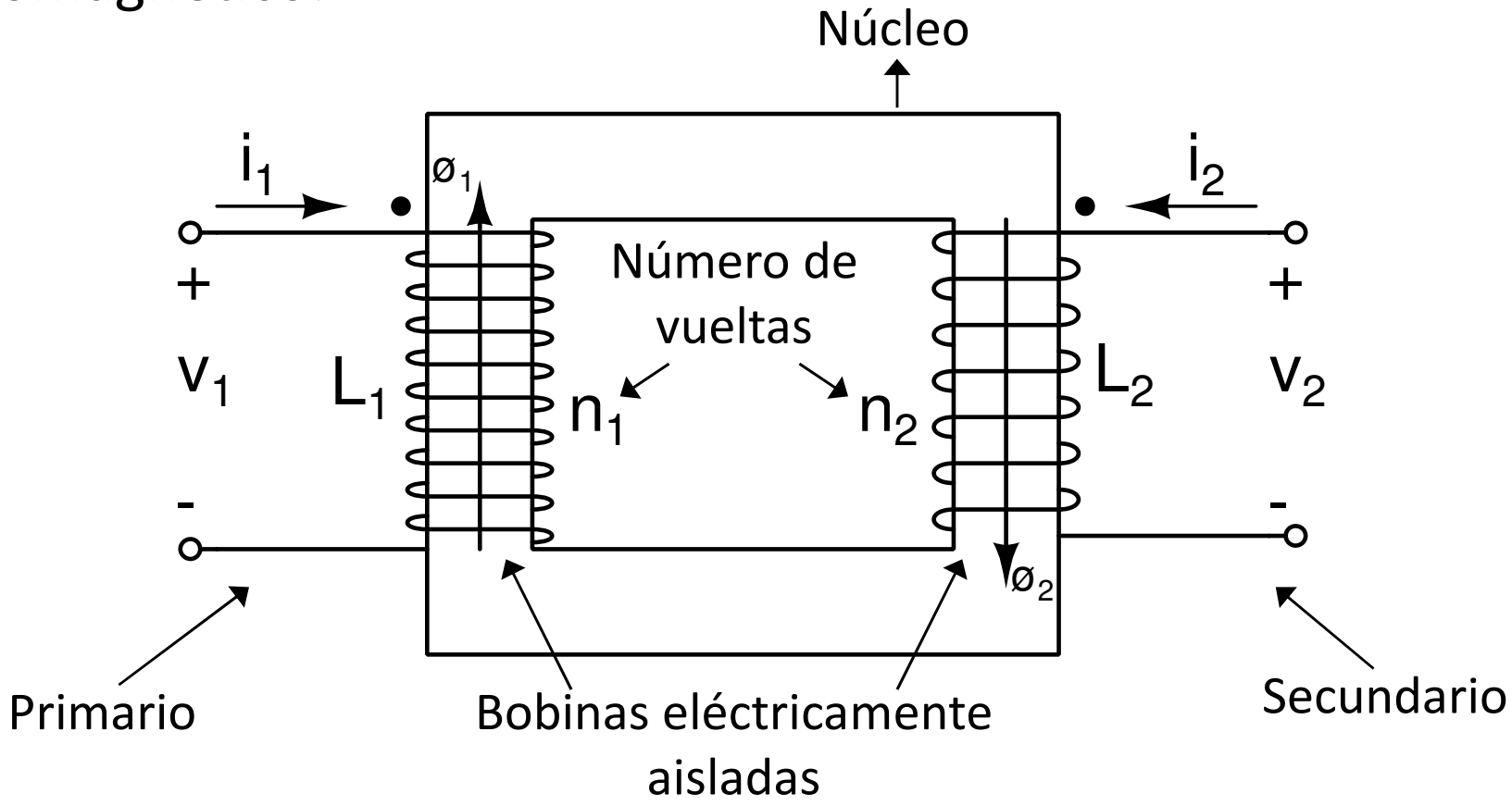
Acoplamiento magnético

- Para entender bien lo que es un transformador, primero es necesario entender un poco la física subyacente de los fenómenos electromagnéticos que gobiernan su comportamiento.

- Si bien en el contexto de teoría de circuitos esto no hace una diferencia (en este contexto un transformador ideal es simplemente un bloque que establece cierta relación lineal entre voltajes y corrientes), es importante estudiar estos contenidos en relación con su implementación práctica, la cual muchas veces introduce efectos que deben ser considerados y modelados circuitalmente.

Acoplamiento magnético

- Un transformador es el resultado del acoplamiento magnético entre dos bobinas a través de un núcleo de material ferromagnético.



Acoplamiento magnético

- De acuerdo a la ley de Faraday:

$$v(t) = n\frac{\mathrm{d}\phi(t)}{\mathrm{d}t}$$

- Y en este caso tenemos:

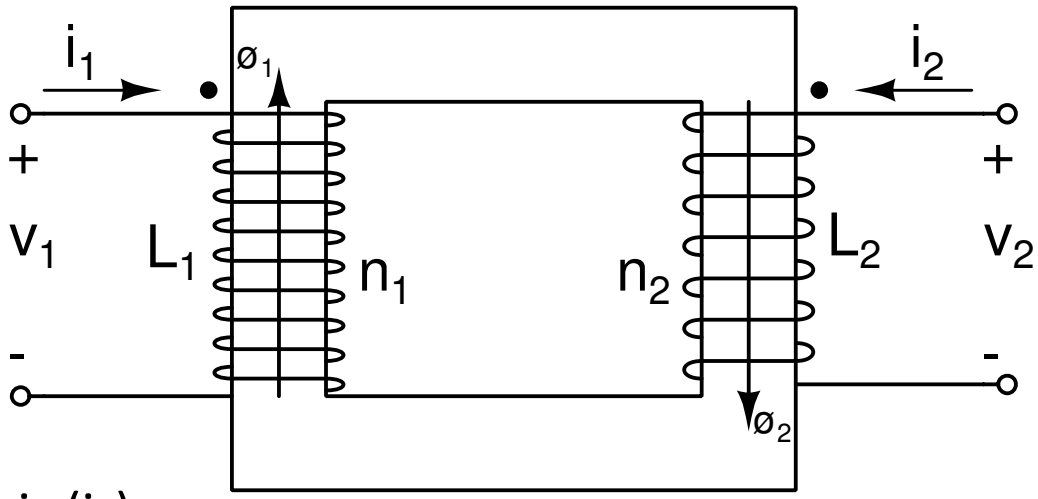
Originado por i_1 en la bobina 1

$$\phi_1 = \phi_{11} + \phi_{12}$$

$$\phi_2 = \phi_{22} + \phi_{21}$$

Originado por i_2 en la bobina 2

Originado por i_2 (i_1) en la bobina 1 (2)

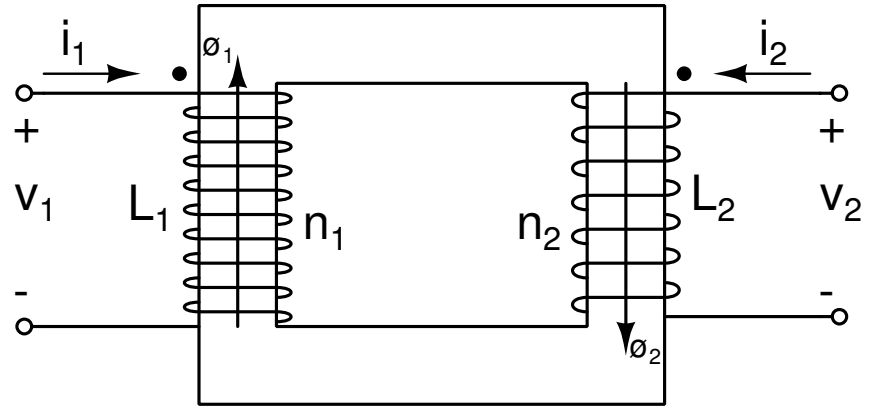


Acoplamiento magnético

- Así:

$$v_1 = n_1 \frac{\mathrm{d}\phi_{11}}{\mathrm{d}t} + n_1 \frac{\mathrm{d}\phi_{12}}{\mathrm{d}t}$$

$$v_2 = n_2 \frac{\mathrm{d}\phi_{22}}{\mathrm{d}t} + n_2 \frac{\mathrm{d}\phi_{21}}{\mathrm{d}t}$$



- De acuerdo a la ley de Hopkinson (análoga a la ley de Ohm en circuitos magnéticos):

$$ni = \phi\mathcal{R}$$

Ampère-vuelta ("V")

Flujo magnético ("I")

Reluctancia ("R")

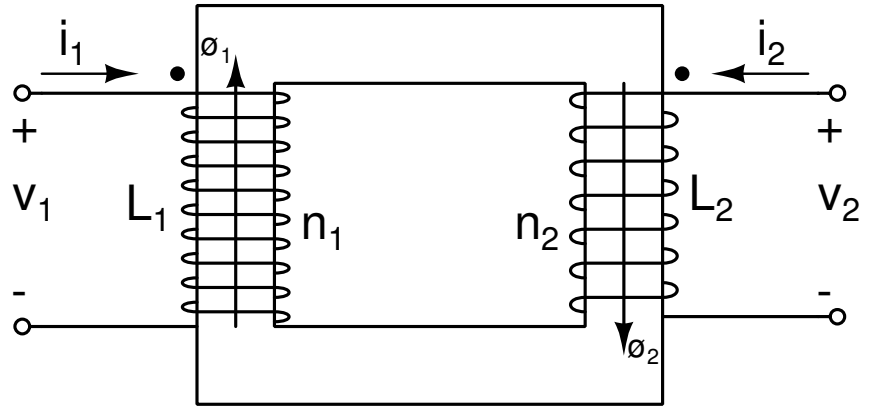
Acoplamiento magnético

- Por lo tanto:

$$\phi_{11} = \frac{n_1 i_1}{\mathcal{R}} \qquad \phi_{22} = \frac{n_2 i_2}{\mathcal{R}}$$

$$\phi_{12} = \frac{n_2 i_2}{\mathcal{R}_*} \qquad \phi_{21} = \frac{n_1 i_1}{\mathcal{R}_*}$$

$$\mathcal{R}_* \geq \mathcal{R}$$



- Finalmente:

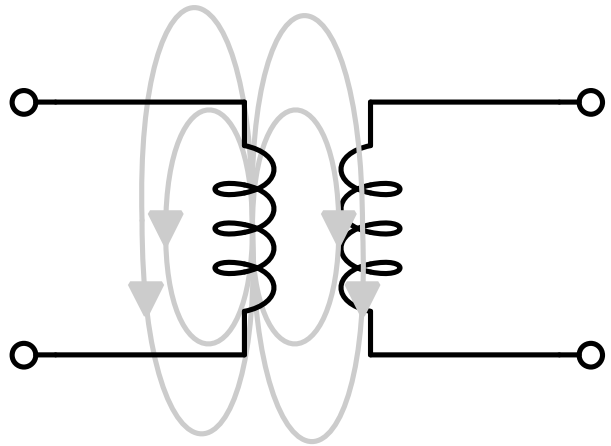
$$v_1 = \frac{n_1^2}{\mathcal{R}} \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + \frac{n_1 n_2}{\mathcal{R}_*} \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \quad \rightarrow v_1 = L_1 \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + M \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$

$$v_2 = \frac{n_1 n_2}{\mathcal{R}_*} \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + \frac{n_2^2}{\mathcal{R}} \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \quad \rightarrow v_2 = M \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + L_2 \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$

Inductancia mutua

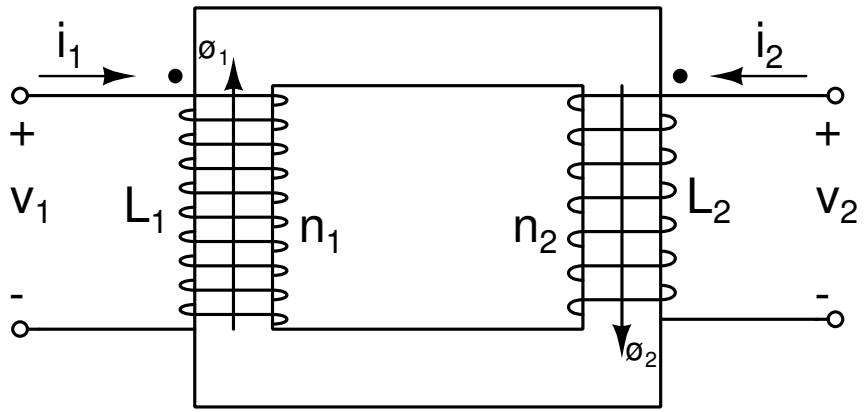
Acoplamiento magnético

- La inductancia mutua es producto del acoplamiento magnético entre ambos inductores.
  - Parte del flujo magnético de cada inductor se enlaza a través del otro inductor. Este flujo externo puede ir en la misma dirección del flujo del inductor (M>0) o en dirección opuesta (M<0).



Acoplamiento magnético

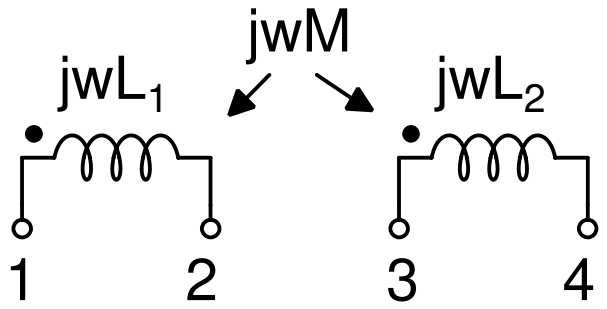
- Para determinar el signo de M en la práctica:
  - Ley de la mano derecha: los dedos de la mano derecha abrazan la bobina en el sentido de la corriente, y el pulgar indica la dirección del flujo magnético que produce esa corriente; si las direcciones de los flujos coinciden, M > 0. Para aplicar este método tendríamos que tener acceso al sentido de los devanados, información que los diagramas circuitales no contienen.
  - Convención del punto: si las corrientes entran (o salen) en ambos terminales con punto de los inductores, entonces los flujos se suman y M > 0.



Acoplamiento magnético

- **Ejemplo**: determinar la inductancia equivalente para los casos (i) serie 1-2-3-4, (ii) serie 1-2-4-3 y (iii) paralelo 1-2 con 3-4.

- En el caso (i):

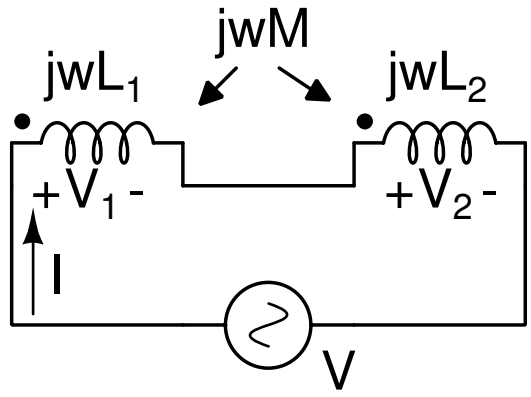


$$Z_{eq} = \frac{V}{I}$$

$$V = V_1 + V_2$$

$$V = j\omega L_1 I + j\omega M I + j\omega L_2 I + j\omega M I$$

$$\rightarrow Z_{eq} = j\omega \underbrace{(L_1 + L_2 + 2M)}_{L_{eq}}$$



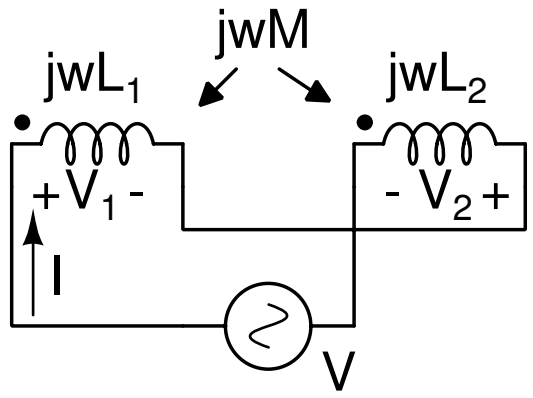
Acoplamiento magnético

- En el caso (ii):

$$V = V_1 + V_2$$

$$V = j\omega L_1 I - j\omega M I + j\omega L_2 I - j\omega M I$$

$$\rightarrow Z_{eq} = j\omega \underbrace{(L_1 + L_2 - 2M)}_{L_{eq}}$$

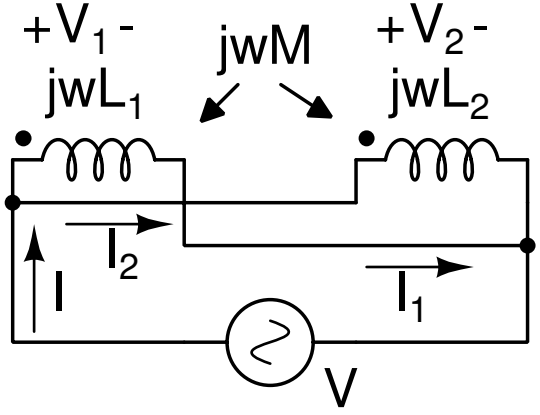


- En el caso (iii):

$$V = V_1 = j\omega L_1 I_1 + j\omega M I_2$$

$$V = V_2 = j\omega L_2 I_2 + j\omega M I_1$$

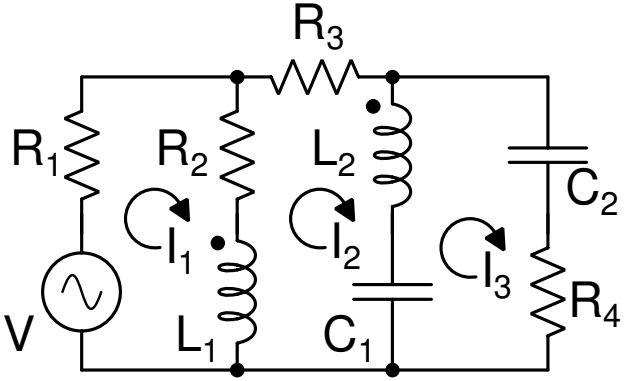
$$\rightarrow I = I_1 + I_2 = \frac{V}{j\omega} \underbrace{\frac{L_1 + L_2 - 2M}{L_1 L_2 - M^2}}_{1/L_{eq}}$$



Fin ej.

Acoplamiento magnético

- **Ejemplo**: encontrar las ecuaciones de malla del circuito en régimen sinusoidal permanente.



- De la malla 1 a la 3:

$$R_1 I_1 + R_2(I_1 - I_2) + j\omega L_1(I_1 - I_2) + j\omega M(I_2 - I_3) = V$$

$$R_2(I_2 - I_1) + R_3 I_2 + j\omega L_2(I_2 - I_3) + j\omega M(I_1 - I_2) + \frac{1}{j\omega C_1}(I_2 - I_3)$$
$$+ j\omega L_1(I_2 - I_1) - j\omega M(I_2 - I_3) = 0$$

$$j\omega L_2(I_3 - I_2) + j\omega M(I_2 - I_1) + \frac{1}{j\omega C_2} I_3 + R_4 I_3 + \frac{1}{j\omega C_1}(I_3 - I_2) = 0$$

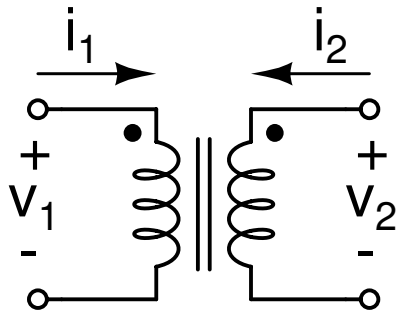
Fin ej.

Transformador ideal

- Como ya sabemos, dos bobinas acopladas están descritas por las siguientes ecuaciones:

$$v_1 = L_1 \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + M \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$

$$v_2 = M \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + L_2 \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$



- En el caso ideal, todo el flujo magnético circula por el núcleo y no hay pérdidas de ningún tipo:

$$M \to \sqrt{L_1 L_2}$$

- Luego, en régimen sinusoidal permanente:

$$\frac{V_1}{V_2} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} \qquad \frac{I_1}{I_2} = -\sqrt{\frac{L_2}{L_1}}$$

Transformador ideal

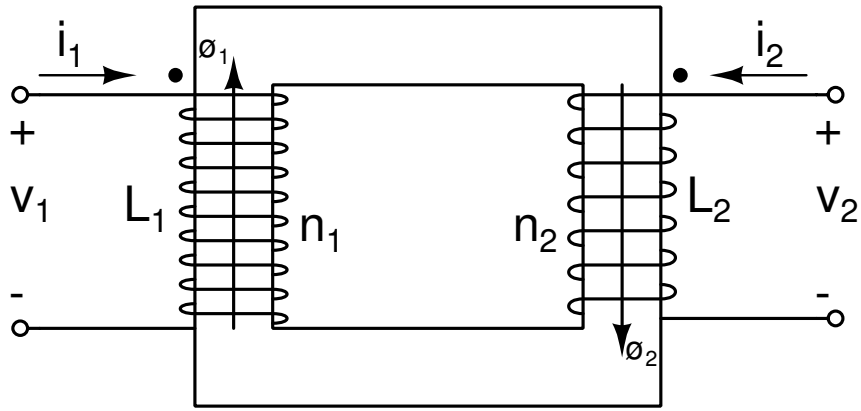
- Reemplazando las expresiones de L_1 y L_2:

$$L_i = \frac{n_i^2}{\mathcal{R}}$$

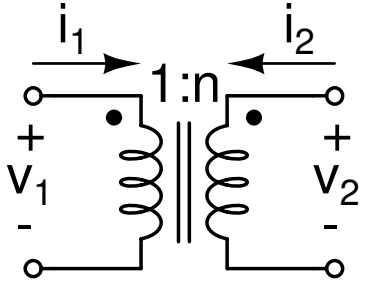
$$\rightarrow V_2 = nV_1$$

$$\rightarrow I_2 = -\frac{1}{n} I_1$$

Razón de vueltas = n_2/n_1



  - Un transformador ideal permite amplificar/atenuar o atenuar/amplificar un/una voltaje/corriente en un factor dado por la razón de vueltas de las bobinas que lo componen!

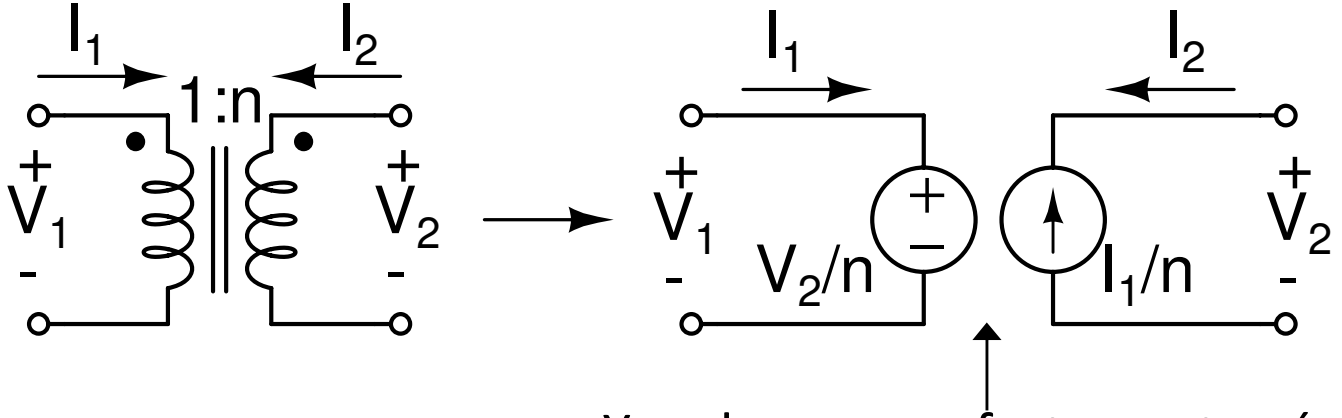


Transformador ideal

- En términos de potencia, un transformador ideal no entrega ni consume energía:

$$V_1 I_1 + V_2 I_2 = V_1 I_1 - n V_1 \frac{I_1}{n} = 0$$

- Circuitalmente podemos modelar el transformador ideal como (este no es el único modelo):



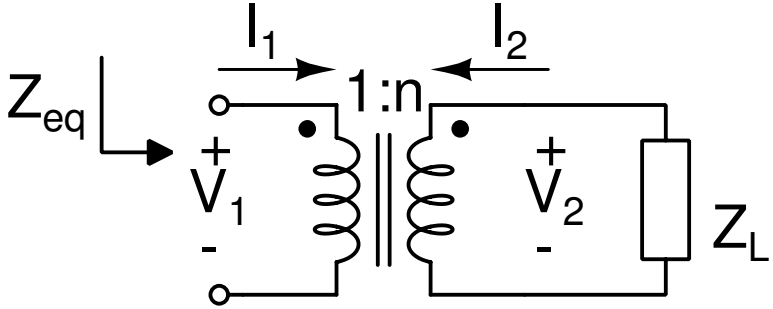
Ya sabemos perfectamente cómo trabajar con esto en un circuito!

Transformador ideal

- Veamos ahora cómo se ve una impedancia conectada en el secundario visto desde el primario:

$$I_2 = -\frac{1}{n} I_1 = -\frac{V_2}{Z_L} = -\frac{nV_1}{Z_L}$$

$$\rightarrow Z_{eq} = \frac{V_1}{I_1} = \frac{Z_L}{n^2}$$

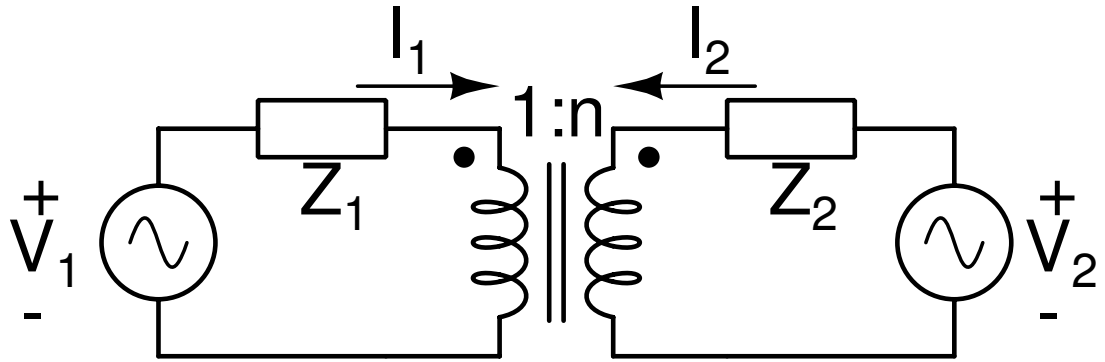


- En cambio, una impedancia en el primario vista desde el secundario se vería de la siguiente forma:

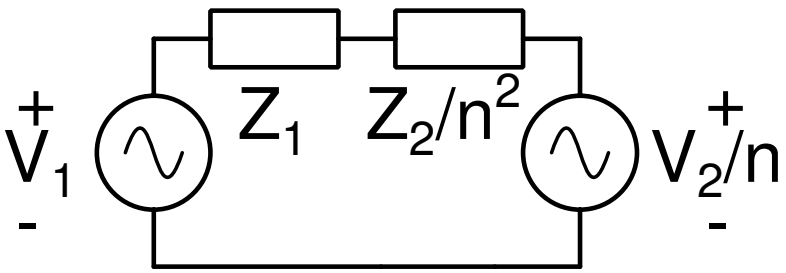
$$Z_{eq} = \frac{V_2}{I_2} = n^2 Z_L$$

Transformador ideal

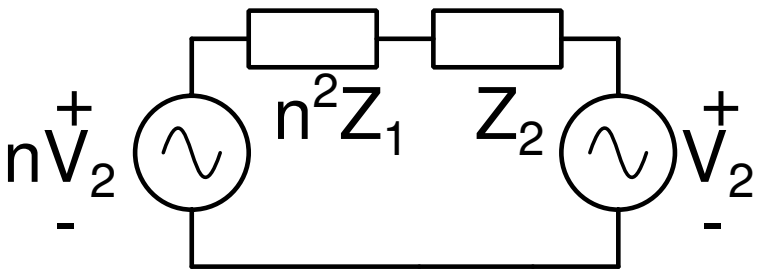
- En resumen:



Si uno de los puntos se revierte, se cambia n por –n



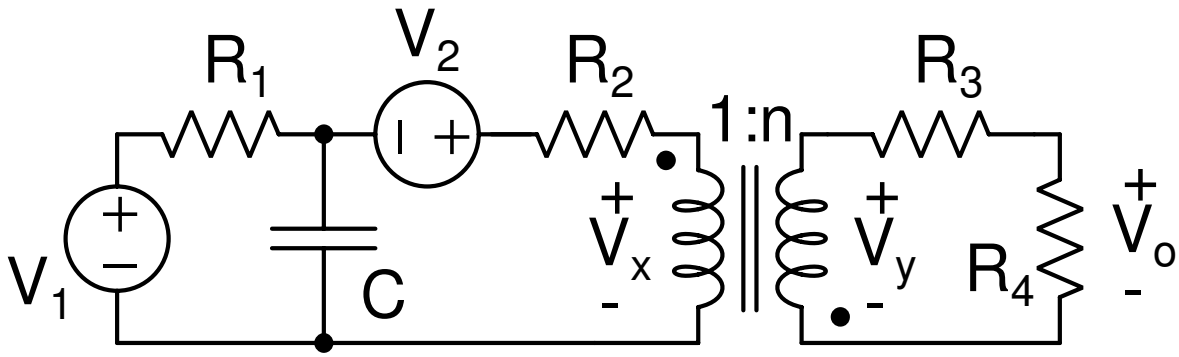
Visto desde el primario



Visto desde el secundario

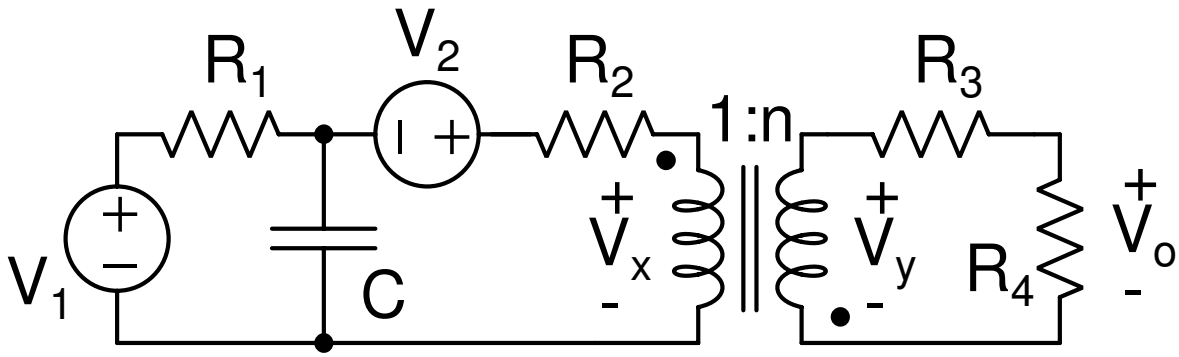
Transformador ideal

- **Ejemplo**: calcular V_o.

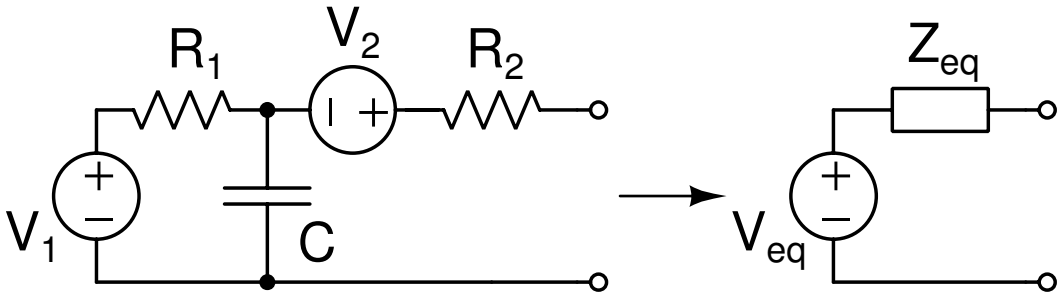


Transformador ideal

- **Ejemplo**: calcular V_o.



- Primero calculamos el equivalente de H-T de la parte izquierda del circuito para luego referirla a la parte derecha:

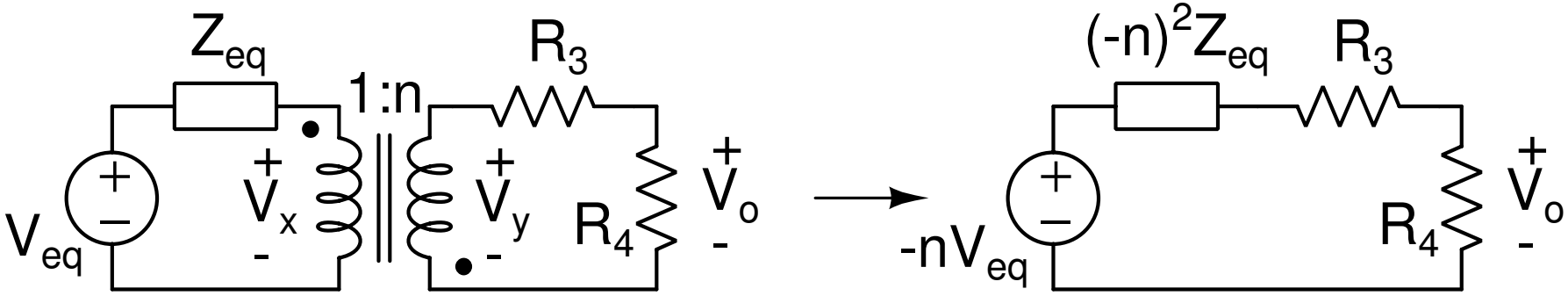


$$V_{eq} = \frac{1}{1+j\omega R_1 C} V_1 + V_2$$

$$Z_{eq} = \frac{R_1}{1+j\omega R_1 C} + R_2$$

Transformador ideal

- Referimos todo al circuito de la derecha:



- Así:

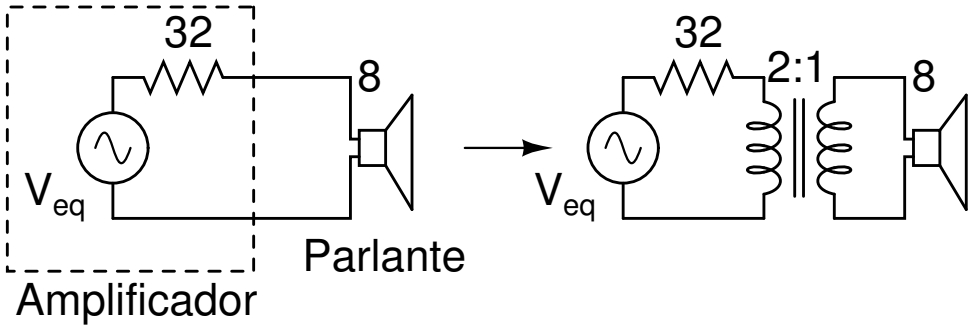
$$V_o = \frac{R_4}{R_4+R_3+n^2 Z_{eq}} \cdot (-nV_{eq})$$

$$V_o = -n\frac{R_4}{R_4+R_3+n^2\left(\frac{R_1}{1+j\omega R_1 C}+R_2\right)}\left(\frac{1}{1+j\omega R_1 C}V_1 + V_2\right)$$

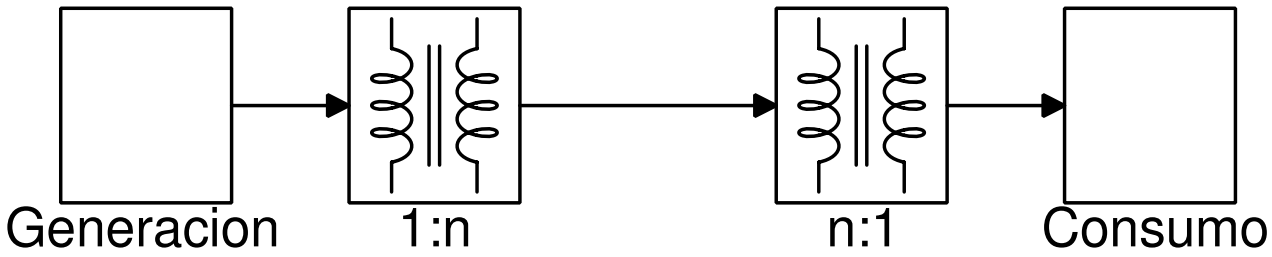
Fin ej.

Transformador

- Algunas aplicaciones:
  - Acoplamiento de impedancias para optimizar la transferencia de potencia a la carga.



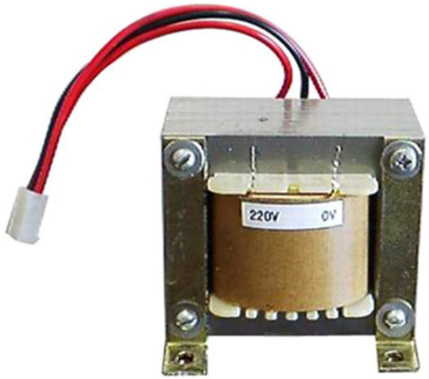
  - Modificar voltajes para distribuir energía.



Transformador

- Algunos tipos de transformadores:

Típico



[pa-international.com.au/index.php?option=com_content&view=article&id=122&itemid..]



Planta de distribución de energía

[electrical-powersolutions.com/?page_id=701]

El que aparece cuando uno googlea “transformers”



[taringa.net/post/autos-motos/11550414/Todos-Los-Personajes-De-Transformers-Algunos-De-TF3.html]

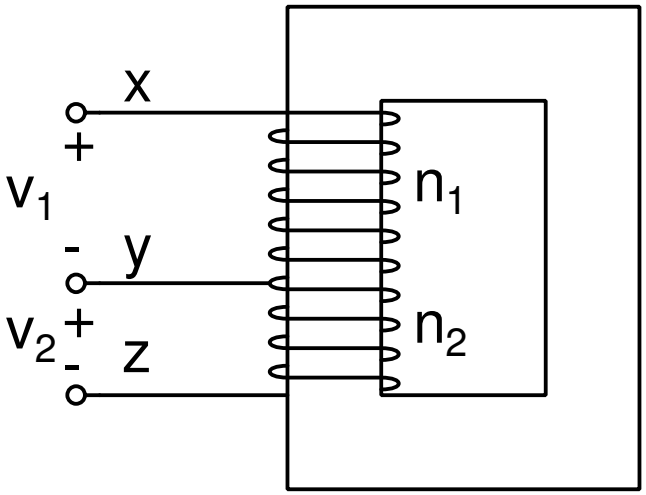
Autotransformador

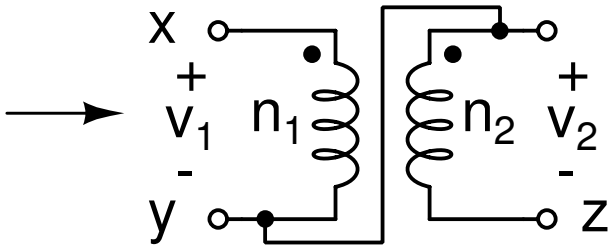
- En un transformador estándar (i.e. dos bobinas acopladas magnéticamente a través de un núcleo de algún material) ocurren dos cosas:
  - Los devanados del primario y del secundario se encuentran aislados eléctricamente (el acoplamiento es puramente magnético).
  - Las componentes de voltaje continua de cada lado no son inducidas en el otro, permitiendo que ambos lados tengan niveles de referencia diferentes (“tierras” diferentes).

- Hay casos donde la aislación eléctrica no es necesaria. En dichos casos se pueden usar *autotransformadores*.

Autotransformador

- La idea es la siguiente:





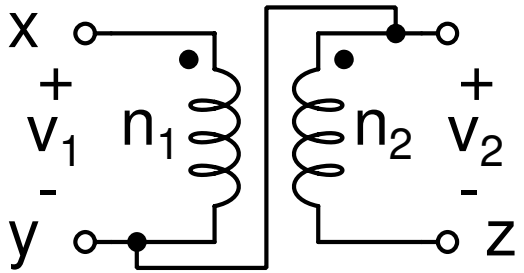
$$\frac{V_{yz}}{V_{xz}} = \frac{n_2}{n_1+n_2}$$

  - Al mover el terminal *y* es posible obtener una razón de transformación variable.
  - La transferencia de potencia de un lado a otro ya no es sólo a través del acoplamiento magnético, sino que también se transfiere potencia a través de la conexión eléctrica.

Autotransformador

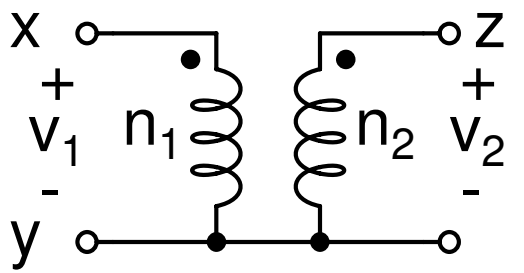
- Se distinguen dos tipos de conexiones:

Aditiva



$$\frac{V_{yz}}{V_{xz}} = \frac{n_2}{n_1+n_2} = \frac{n}{n+1}$$

Sustractiva

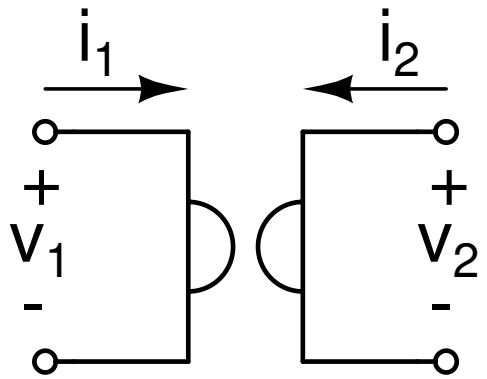


$$\frac{V_{yz}}{V_{xz}} = \frac{n_2}{n_2-n_1} = \frac{n}{n-1}$$

- Al alimentar una carga con un transformador estándar, el secundario debe ser capaz de soportar la corriente de la carga (I_L). Al usar un autotransformador, los devanados pueden aguantar menos que I_L ya que esta corriente está dada por la suma de las corrientes de los devanados.

Girator

- Existe otro dispositivo hasta ahora ficticio similar al transformador, el *girator* (Tellegen, 1948). Este dispositivo no recíproco se define como sigue:



$$v_1 = -ai_2$$
$$v_2 = ai_1$$

- Si bien este elemento circuital no existe como tal, sí se pueden hacer circuitos que se comportan como tal (y se usan, no es relevante sólo en términos teóricos).

Girator

- Una de las ventajas de este componente es que permite, por ejemplo, hacer que un capacitor se vea como un inductor y viceversa.
  - Se puede probar esto simplemente conectando una impedancia en un lado y viendo cómo se ve desde el otro lado.

- Así como resistores, capacitores, inductores y transformadores forman lo que se llama un conjunto completo de elementos circuitales, uno podría sustituir el transformador por dos giratores en cascada y el inductor/capacitor por un capacitor/inductor más un girator, de forma que el resistor, el girator y el capacitor/inductor también forman un conjunto completo.