Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ingeniería Eléctrica
IEE2123 - Circuitos Eléctricos

Tarea 10

Función de Transferencia, Bode y Filtros

1º semestre 2023 - Profesor David Watts

Ayudante: Elena Contardo (ele.contardo@uc.cl)

- La tarea debe ser subida en formato .pdf a Canvas al buzón correspondiente.
- Es posible utilizar un comodín para poder entregar la tarea 3 días después del plazo final (contando fin de semana y festivos). Para esto, se debe enviar un correo al ayudante encargado avisando que se usará el comodín antes de que termine el plazo final original.
- No se aceptan tareas con letra ilegible.

Problema 1

Determine la función de transferencia para cada uno de los gráficos de magnitud de Bode presentados en la Figura 1.

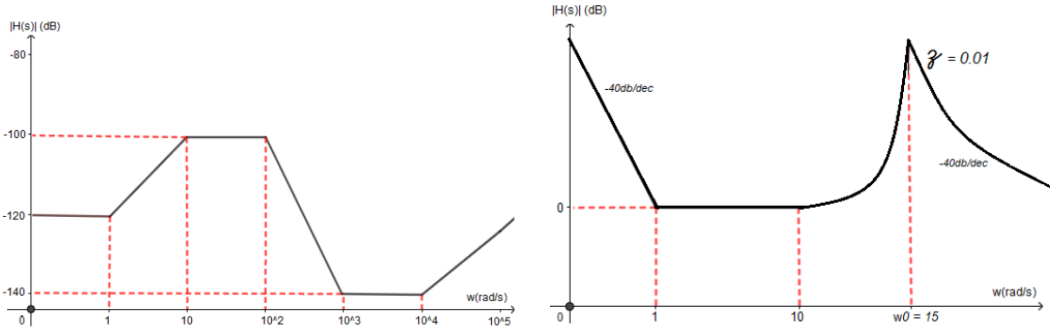


Figura 1: Gráficos de bode

Solución:

Figura 1: La función comienza en -120dB, por lo que existe una ganancia de 10^{-6}. Luego, hay una subida de 20dB/dec correspondiente a un cero en w=1. En w=10 la curva es constante por una caída de 20dB/dec ocasionada por un polo. En w=100 la curva cae en 40dB/dec,

que significa que se tienen dos polos en esa frecuencia. En w=1000 la curva es constante, por lo que hay una subida de 40dB/dec por 2 ceros en esa frecuencia. Por último, en w=10000 se tiene una subida de 20dB/dec por un cero en esa frecuencia. De esta forma la función es:

$$H(s) = \frac{10^{-6}(s+1)(\frac{s}{1000}+1)^2(\frac{s}{10^4}+1)}{(\frac{s}{10}+1)(\frac{s}{100}+1)^2}$$

También es posible representar la función de transferencia de la siguiente forma:

$$\frac{10^{-11}(s+1)(s+1000)^2(s+10^4)}{(s+10)(s+100)^2}$$

Donde los valores de los polos y ceros son los mismos, lo único que cambia es el valor de la constante k.

Figura 2: La gráfica comienza decayendo 40dB/dec, lo que significa que hay dos polos en w=0. Luego, en w=1 se tiene que la curva es constante, por lo que en w=1 deben haber 2 ceros que levantan la curva en 40dB/dec, anulando el efecto de caída de los polos anteriores. Por último, se tiene un peak y posterior una caída de 40dB/dec, esto debido a un par de polos conjugados que poseen una frecuencia natural de $w_o = 15rad/s$ y un coeficiente de amortiguamiento de 0.01, de esta forma se tiene que la función es:

$$H(s) = \frac{225(s+1)^2}{s^2(s^2 + 2 \cdot 0{,}01 \cdot 15s + 15^2)}$$

El 225 que se incluye en el numerador corresponde al aporte del polo conjugado (donde en el numerador de debe amplificar por la frecuencia natural al cuadrado) Esto solo se debe hacer en el caso que la función cuadrática se exprese considerando que el factor s^2 va multiplicado por 1 (es decir, $s^2 + as + b$).

La respuesta anterior es equivalente a lo siguiente:

$$H(s) = \frac{(s+1)^2}{s^2(\frac{s^2}{225} + \frac{2 \cdot 0{,}01 \cdot 15s}{225} + 1)}$$

De esta forma, cuando el polinomio cuadrático se expresa de la forma $as^2 + bs + 1$, no se debe incluir en el numerador ningún factor.

Criterios de corrección:

- **3 ptos.** Por ecuación de figura 1 correcta.
- **3 ptos.** Por ecuación de figura 2 correcta.

Problema 2

a) Bosqueje el diagrama de bode de magnitud de:

$$\mathbf{G}(j\omega) = \frac{j\omega(j\omega + 100)}{(j\omega + 1)\left(-\omega^2 + 6j\omega + 400\right)}$$

b) Bosqueje el diagrama de bode de fase de:

$$\mathbf{H}(j\omega) = \frac{100}{(j\omega)^2(j\omega 2 + 1)}$$

Solución:

a) Comenzamos buscando los ceros de la función de transferencia dada:

$$\begin{aligned} &jw(j\omega + 100) = 0 \\ &jw = 0 \rightarrow w = 0 \\ &jw + 100 = 0 \rightarrow w = 100j \end{aligned}$$

De este modo los cerros corresponden a:

$$\begin{aligned} c_1 &= |0| = 0rad/s \\ c_2 &= |100j| = 100rad/s \end{aligned}$$

Ahora recordando que $s = jw$ podemos resolver para s los polos de la función:

$$\begin{aligned} &(1 + s)\left(s^2 + 6s + 400\right) \\ &1 + s = 0 \rightarrow s = -1 \\ &s^2 + 6s + 400 = 0 \rightarrow s_{1,2} = 3 \pm i\sqrt{391} \end{aligned}$$

Asi los polos se encontraran en:

$$\begin{aligned} p_1 &= |1| = 1rad/s \\ p_2 &= |3 + i\sqrt{391}| = 20rad/s \\ p_3 &= |3 - i\sqrt{391}| = 20rad/s \end{aligned}$$

Ahora calcularemos el módulo de la función de transferencia y obtendremos los valores de esta evaluada en los diferentes ceros y polos.

$$|G(j\omega)| = \frac{|j\omega||jw + 100|}{|1 + jw|\,|-w^2 + jw + 400|}$$

Recordar que la magnitud de un número complejo $a + bj$ se obtiene de la siguiente forma:

$$|a + bj| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$|G(j\omega)|_{w=0,1} \approx \frac{|0{,}1j||0{,}1j+100|}{|1+j0{,}1||-0{,}1^2+j0{,}1+400|} \approx 0{,}025 \rightarrow 20\log(0{,}025) \approx -32dB$$

$$|G(jw)|_{w=1} \approx \frac{|j1||j1+100|}{|1+j1||-1^2+j1+400|} = 0{,}177 \quad \rightarrow 20\log(0{,}25) \approx -15dB$$

$$|G(j\omega)|_{w=20} \approx \frac{|20j||20j+100|}{|1+20j||-20^2+j20+400|} \approx 0{,}849 \rightarrow 20\log(0{,}849) \approx -1{,}41dB$$

$$|G(j\omega)|_{w=100} \approx \frac{|100j||100j+100|}{|1+100j||-100^2+j100+400|} \approx 0{,}014 \rightarrow 20\log(0{,}014) \approx -36dB$$

Repasando la secuencia de ceros y polos el orden es el siguiente: $c_1 = 0$, $p_1 = 1$, $p_2 = p_3 = 20$, $C_2 = 100$ (rad/s). Recordando que los ceros producen una subida en amplitud de 20 dB/dec y los polos provocan una reducción de 20 dB/dec, entre w=0 y w=1 el diagrama crece a 20 deb/dec, debido al primer cero. Luego, se encuentra con un polo en w=1, de modo que se anula el crecimiento y lo hace constante. Luego, aparecen 2 polos complejos en w=20, los cuales provocan un overshoot seguido de una caída de 40 dB/dec, donde finalmente aparece el último cero en w=100 que aumenta la amplitud en 20 deb/dec, dando por resultado final una caída de 20 deb/dec.

Se calcula la magnitud del overshoot, notando que $w_o = 20rad/s$ y $\zeta = \frac{6}{2 \cdot 20} = 0{,}15$. De esta forma el factor de calidad es:

$$Q = \frac{1}{2\zeta} = 3{,}33 \rightarrow 20log3{,}33 = 10{,}45dB$$

Esto significa que el overshoot tiene una magnitud de 10.45dB. Recordar que la caída de 40dB por los polos conjugados se hace desde la base del overshoot, no desde la punta. Luego, el diagrama de bode final es el siguiente:



Solución a): Diagrama de Bode Amplitud

b) Comenzamos buscando los ceros y los polos de la función, es fácil darse cuenta que no posee ceros y que posee dos polos en $s = 0rad/s$ y un polo en $s = 0{,}5rad/s$. Luego, la fase de la función de transferencia se puede obtener como:

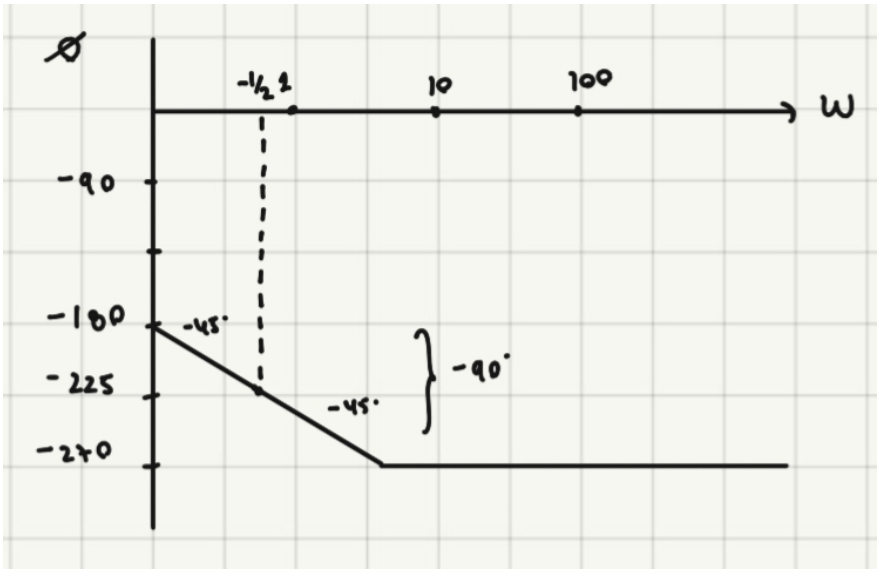
$$\angle H(jw) = \frac{\angle 100}{\angle(j\omega)\angle(j\omega)\angle(1+2j\omega)} = tan^{-1}(0/100) - tan^{-1}(jw/0) - tan^{-1}(jw/0) - tan^{-1}(2w)$$

$$\angle H(jw) = \frac{\angle 100}{\angle(j\omega)\angle(j\omega)\angle(1+2j\omega)} = 0 - \pi/2 - \pi/2 - tan^{-1}(2w)$$

De este modo podemos notar que el factor 100 de la función de transferencia no aporta a la fase. Para saber desde qué punto parte el gráfico se evalúa $w \to 0$, de esta forma:

$$\angle H(jw) = \frac{\angle 100}{\angle(j\omega)\angle(j\omega)\angle(1+2j\omega)} = 0 - \pi/2 - \pi/2 - 0 = -\pi$$

Así, el diagrama de fase comienza en -180° (debido a los dos polos en cero) y luego el polo en 1/2 provoca una caída en 90°, donde se caen 45° la década antes del polo y los 45° restantes la década después. De esta forma el diagrama de fase queda de la siguiente manera:



Criterios de corrección:

- **3 ptos.** Por bosquejo de magnitud correcto.
- **3 ptos.** Por bosquejo de fase correcto.

Problema 3

Para el siguiente circuito:

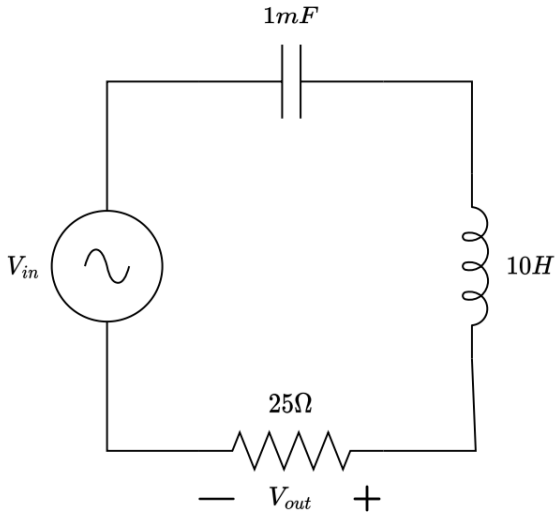


Figura 2: Circuito

a) Determine la ganancia de voltaje ($\frac{V_{out}}{V_{in}}$).

b) Realice los diagrama de Bode de magnitud y fase para la ganancia de voltaje.

c) Calcule los valores exactos de amplitud y fase para $w = 20$ rad/s.

Solución:

a) Utilizando divisor de voltaje obtenemos:

$$V_{out} = V_{\text{in}} \frac{R}{R + \frac{1}{sC} + sL} = V_{\text{in}} \cdot \frac{sCR}{s^2LC + sCR + 1}$$

De este modo la función de transferencia pedida es:

$$\frac{V_{\text{o}}}{V_{in}} = \frac{sCR}{s^2LC + sCR + 1} = \frac{0{,}025s}{0{,}01s^2 + 0{,}025s + 1} = \frac{2{,}5s}{s^2 + 2{,}5s + 100}$$

b) El circuito tiene un cero en $s = 0$ rad/s, mientras que los polos se obtiene resolviendo el polinomio:

$$s_{1,2} = -1{,}25 \pm 9{,}93i$$

Con esto se tiene que:

$$|p_{1,2}| = 10rad/s$$

Luego, el módulo de la función de transferencia es:

$$|H(j\omega)| = \frac{|2{,}5j\omega|}{|(j\omega)^2 + 2{,}5jw + 100|}$$

Evaluando en un valor cercano a cero en la función anterior:

$$|H(j\omega)|_{w=0,1} = 2{,}5 \times 10^{-3}$$

Así su magnitud en w=0rad/s en dB es:

$$20\log\left(2,5\times10^{-3}\right)\approx-52dB$$

Haciendo lo mismo para el caso de los polos conjugados:

$$|H(jw)|_{w=10}=\frac{|25j|}{|25j|}=1$$

Lo que equivale a una magnitud de:

$$20\log(0{,}1)\approx0dB$$

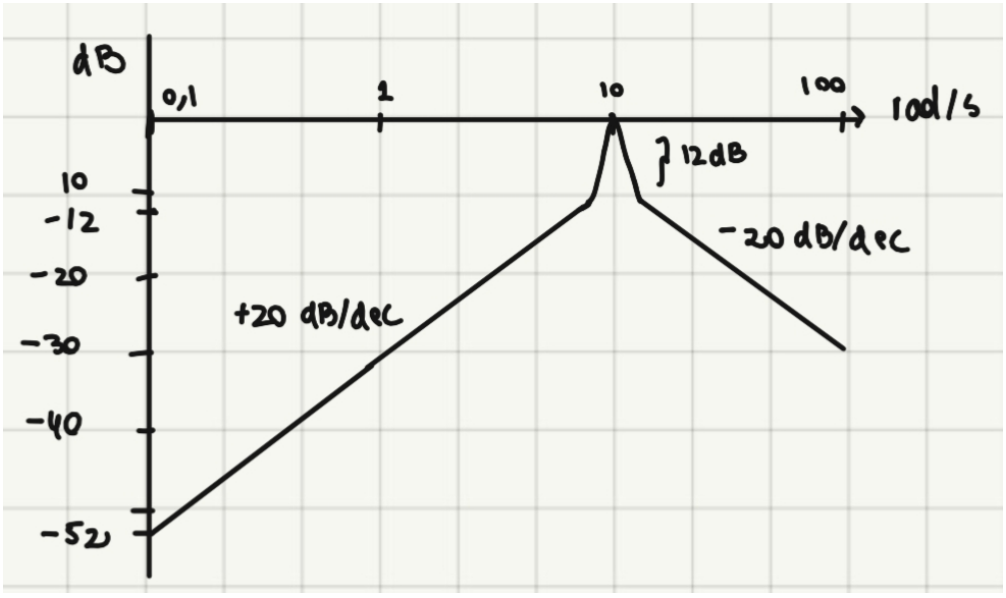
Se sabe que los polos conjugados provocan un overshoot antes de la caída en 40dB/dec, el cual se calcula de la siguiente manera:

$$w_o=\sqrt{100}=10rad/s$$

$$2\zeta w_o=2{,}5\rightarrow\zeta=0{,}125$$

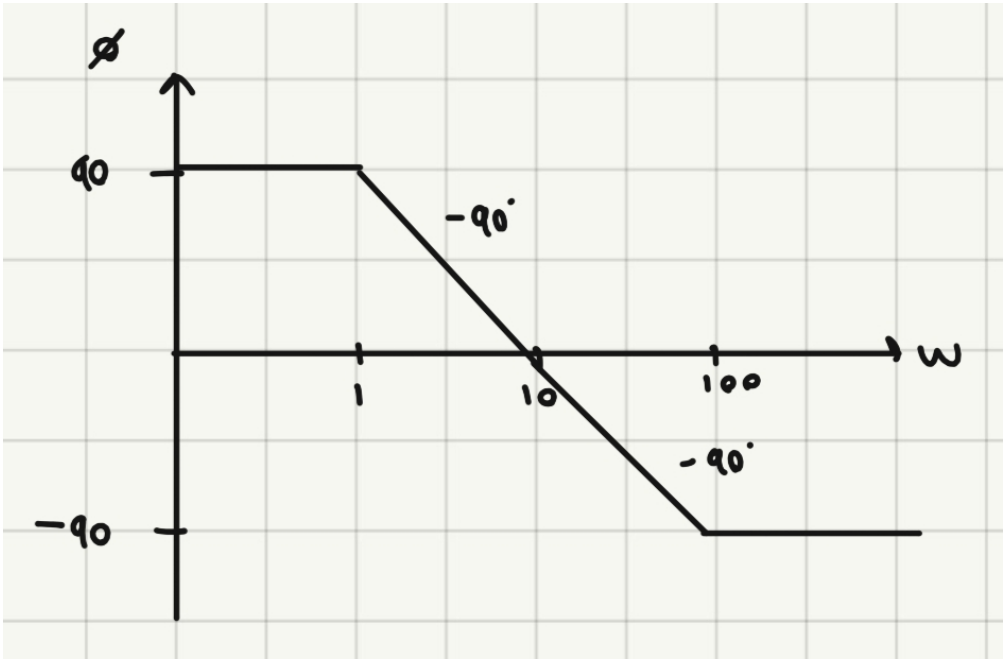
$$Q=\frac{1}{2\zeta}=4\rightarrow20log4=12dB$$

Es decir, el overshoot tendrá una magnitud de 12dB. De este modo el diagrama de bode de magnitud corresponde a:



Como la curva se encontraba subiendo a 20dB/dec, al llegar a los polos conjugados se tiene el overshoot de magnitud 12dB, y luego los dos polos añaden una caída de 40dB/dec, por lo que el neto será una caída de 20dB/dec, empezando desde la base del overshoot.

Luego, para el diagrama de fase, ya que la función de transferencia tiene un cero en 0 rad/s, este comenzará en 90°, y luego al existir dos polos en 10 rad/s, se obtendrá una caída de 180° en dos década, es decir, caerá 90^o una década antes y los 90^o restantes una década después, obteniendo así el siguiente resultado:



c) Evaluando para el valor pedido tenemos que:

$$|H(20j)| = \frac{|50j|}{|-400+50j+100|} = 0{,}16 \rightarrow 20\log(0{,}16) = -15{,}68dB$$

Luego, la fase se obtiene como:

$$\angle H(wj) = \frac{\angle 2{,}5wj}{\angle((jw)^2+2{,}5jw+100))} = \tan^{-1}\left(\frac{2{,}5w}{0}\right) - \tan\left(\frac{2{,}5w}{-w^2+100}\right)$$

Evaluando en w=20rad/s se obtiene:

$$\angle H(20j) = 90° - 171° = -81°$$

Criterios de corrección:

- **2 ptos.** Determinar correctamente la expresión de ganancia ($\frac{V_{out}}{V_{in}}$).
- **2 ptos.** Realiza correctamente los diagramas de Bode solicitados (1 punto por cada uno).
- **2 ptos.** Calcula correctamente los valores exactos de amplitud y fase para $w = 20$ rad/s.

Problema 4

Se tiene un filtro representado por la siguiente función de transferencia:

$$F(jw) = \frac{-R_2/R_1}{R_2 \cdot C \cdot jw + 1}$$

Se requiere que el filtro tenga una frecuencia de corte de 80Hz y ganancia en la banda pasante de 20dB. Determine valores para R_1, R_2 y C que cumplan con lo pedido.

Solución:

Se calculan los polos y ceros de la función de transferencia, donde en este caso solo se tiene un polo:

$$R_2 \cdot C \cdot s + 1 = 0 \rightarrow s = \frac{-1}{R_2 \cdot C} \rightarrow p_1 = |\frac{-1}{R_2 \cdot C}| = \frac{1}{R_2 \cdot C} \quad rad/s$$

Se obtiene la frecuencia de corte:

$$p = \frac{1}{R_2 \cdot C} = 2\pi f_c$$

Fijando $R_2 = 10k\Omega$, se obtiene $C = 0{,}198\mu F$.

Luego, como el filtro solo tiene un polo, es evidente que corresponde a un filtro pasa bajos. Para obtener la ganancia en la banda pasante se calcula la magnitud en un valor muy cercano a 0, antes de que se llegue al polo que provoca la caída en la magnitud.

$$|F(wj)| = \frac{|-R_2/R_1|}{|R_2 \cdot C \cdot jw + 1|}$$

$$|F(wj)|_{w=0,1} = \frac{|-R_2/R_1|}{|1|} = \frac{R_2}{R_1} \rightarrow 20log(\frac{R_2}{R_1}) = 20dB$$

De esta forma:

$$10^1 = \frac{R_2}{R_1}$$

Como anteriormente se fijó $R_2 = 10k\Omega$, se obtiene el siguiente valor para R_1:

$$R_1 = 1k\Omega$$

Cabe destacar que otra forma de obtener el polo es buscar la frecuencia donde se tiene una magnitud de -3dB respecto a la magnitud en la banda pasante (es decir, 17dB).

Criterios de corrección:

- **2 ptos.** Define correctamente una expresión para el polo que relaciona C y R_2.
- **2 ptos.** Define y explica correctamente la condición necesaria para obtener una ganancia de $-20dB$ en el pasa bajos.
- **2 ptos.** Otorga valores correctos a R_1, R_2 y C.