IEE2123 Circuitos Eléctricos
Profesor: David Watts

Tarea 8

Circuitos de Primer Orden

Problema 1

En el siguiente circuito ambos interruptores llevan abiertos mucho tiempo, hasta que en $t_1 = 1$ se cierra S_1 y en $t_2 = 2{,}5$ se cierra S_2.

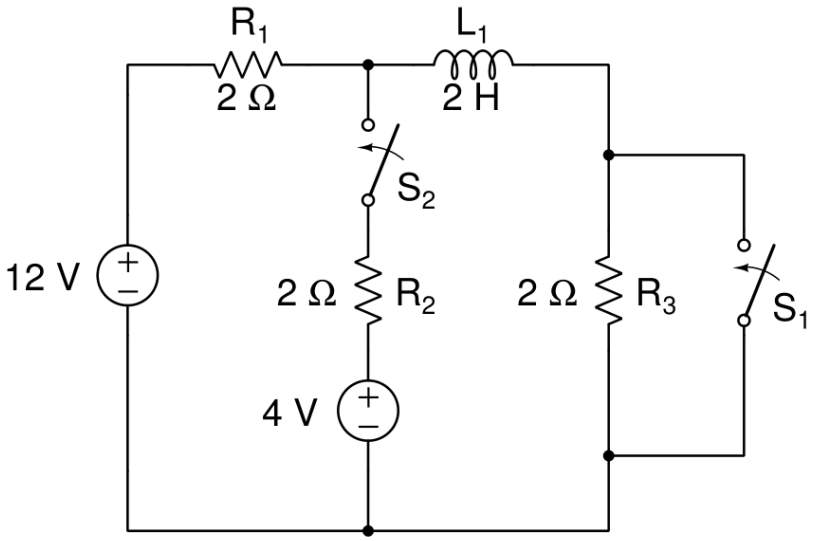
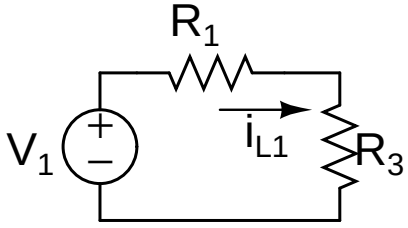


Figura 1: Circuito RL

1. Encuentre el voltaje y la corriente en el inductor L_1 y en el resistor R_1 para todo t. Sea claro y consistente al definir los intervalos de tiempo, las polaridades de voltajes y las direcciones de corrientes.
2. Grafique el voltaje y la corriente en el inductor L_1 y en el resistor R_1 para $0 < t < 5$ en un programa de computación científica.

Solución:

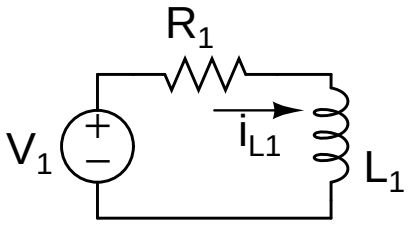
1. Separamos la resolución del problema en 3 tiempos, definiendo $t_1 = 1\,\text{s}$ y $t_2 = 2\,\text{s}$.
   - Para $t < t_1$ Como ha pasado mucho tiempo, el inductor se reemplaza por un cortocircuito con lo que el circuito se reduce a



Que deja las ecuaciones:

$$i_l(t_1^-) = \frac{V_1}{R_1 + R_3} = 3\,\text{A}\ ;\ v_l(t_1^-) = 0\,\text{V}$$

- Para $t_1 < t < t_2$
  En esta etapa se cierra S_1 y el circuito queda de la siguiente manera:



Podemos obtener la ecuación de este circuito como:

$$\frac{d}{dt}i_l(t) + \frac{1}{L_1/R_1}i_l(t) = \frac{V_1}{L_1}$$

y sabemos que la solución de esta ecuación será:

$$i_l(t) = (i_l(t_1^+) - I)e^{-\frac{1}{L_1/R_1}(t-t_1)} + I$$

Y reemplazando:

$$i_l(t) = -\frac{V_1 R_3}{R_1(R_1+R_3)}e^{-\frac{1}{L_1/R_1}(t-t_1)} + \frac{V_1}{R_1}$$

Y el voltaje lo obtenemos con $v_l(t) = L_1\frac{d}{dt}i_l(t)$

$$\implies v_l(t) = \frac{V_1 R_3}{R_1+R_3}e^{-\frac{1}{L_1/R_1}(t-t_1)}$$

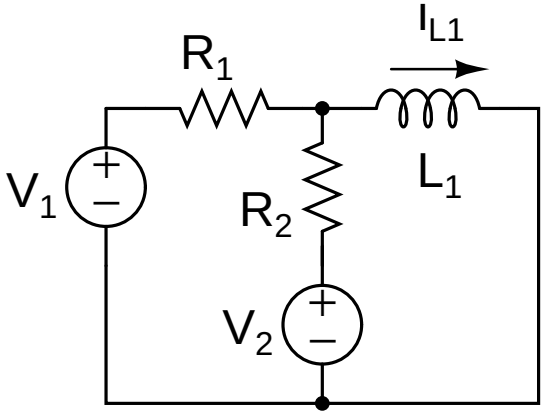
Que reemplazando valores queda:

$$i_l(t) = -3e^{-(t-1)} \text{ y } v_l(t) = 6e^{-(t-1)}$$

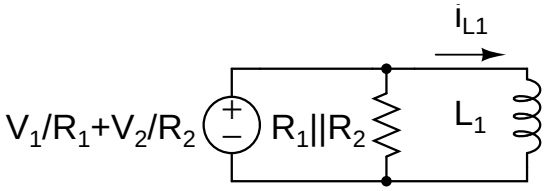
- Para $t > t_2$ Primero obtenemos las condiciones iniciales del inductor:

$$i_l(t_2^*) = i_l(t_2^-) = -\frac{V_1 R_3}{R_1(R_1+R_3)}e^{-\frac{1}{L_1/R_1}(t_2^- - t_1)} + \frac{V_1}{R_1} \approx 5.33\,\text{A}$$

El esquemático queda:



Utilizando equivalentes de Thevenin-Norton podemos llegar a un circuito más amigable:



Del cual podemos sacar la ecuación como:

$$i_l(t) = (i_l(t_2^+) - I)e^{-\frac{1}{L/R}(t-t_2)} + I$$

$$i_l(t) = \left(i_l(t_2^+) - \frac{V_1}{R_1} - \frac{V_2}{R_2}\right) e^{-\frac{R_1||R_2}{L_1}(t-t_2)} + \left(\frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2}\right)$$

Y el voltaje será:

$$v_l(t) = R_1||R_2 \left(\frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} - i_l(t_2^+)\right) e^{-\frac{R_1||R_2}{L_1}(t-t_2)}$$

Reemplazando valores:

$$i_l(t) = -2{,}66e^{-\frac{t-2{,}5}{2}} + 8 \text{ y } v_l(t) = 2{,}66e^{-\frac{t-2{,}5}{2}}$$

2. Los gráficos quedan:

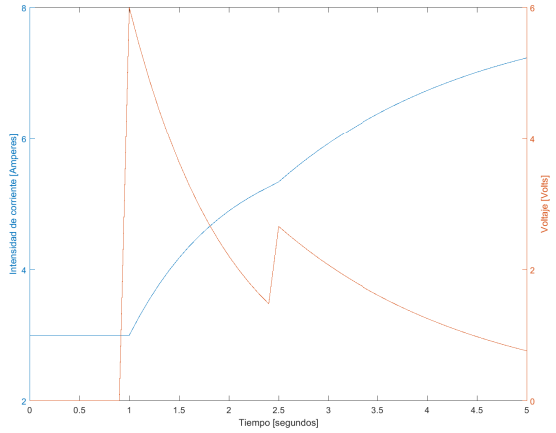


Figura 2: Voltaje y corriente en L_1

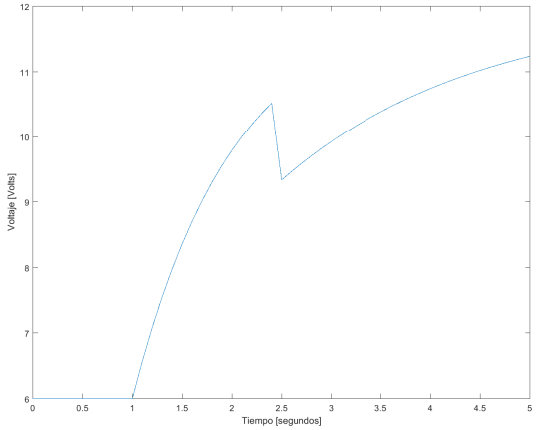


Figura 3: Voltage en R_1

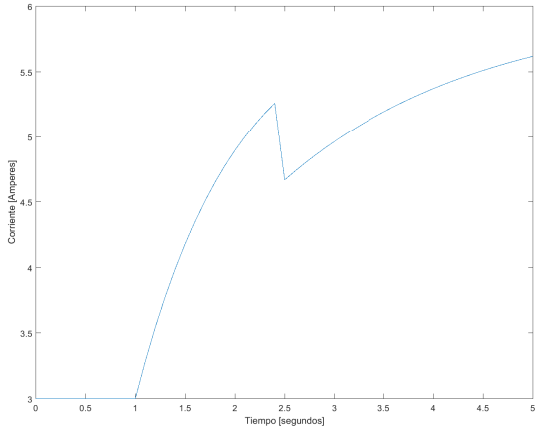


Figura 4: Corriente en R_1

Problema 2

Considere $V_1 = 5e^{-0{,}01t}u(t)$ e $I_1 = 0{,}02u(t-5)$ con $u(t)$ la función escalón unitario. Además considere que en $t = 0$ el capacitor se encuentra descargado.

1. Encuentre el voltaje y la corriente en el capacitor.

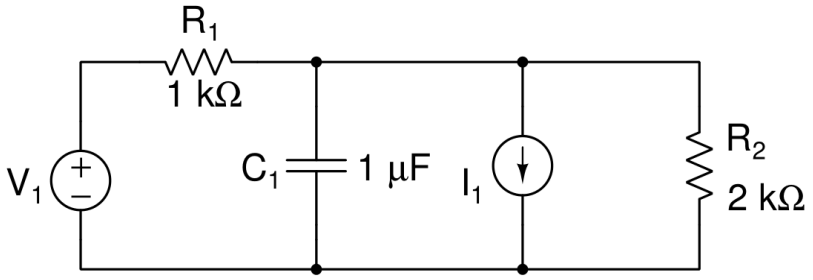
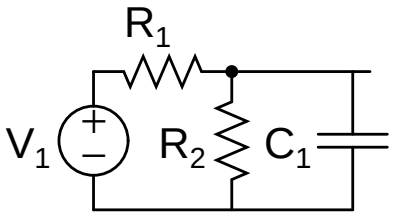


Figura 5: Circuito de segundo orden

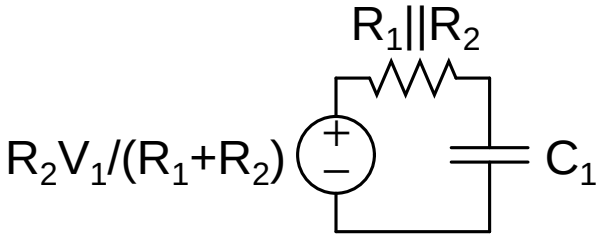
Solución:

1. Se definen 3 tiempos para la resolución de este ejercicio, definiendo $t_1 = 0\,\text{s}$ y $t_2 = 5\,\text{s}$.

   - Para $t < t_1$ Asumiendo que ha pasado mucho tiempo hasta este instante, el capacitor se comporta como un circuito abierto, además como el voltaje y la corriente son nulos antes de t_1 se deduce que
   $$v_c(t_1^+) = v_c(t_1^-) = 0\,\text{V}$$
   - Para $t_1 < t < t_2$ El circuito queda:

   Haciendo transformaciones Thevenin-Norton se puede transformar a

   Con esto podemos llegar a la ecuación diferencial:

   $$\frac{d}{dt}v_c(t) + \frac{1}{R_1||R_2 \cdot C_1}v_c(t) = \frac{1}{R_1||R_2 \cdot C_1}\frac{R_2}{R_1+R_2}V_1 = \frac{1}{R_1||R_2 \cdot C_1}\frac{R_2}{R_1+R_2}5e^{-\frac{t}{100}}$$

   LLegando a la solución:

   $$v_c(t) = v_{c,h}(t) + v_{c,p}(t) = ke^{-\frac{3}{2}10^3 t} + \frac{10}{3}e^{-\frac{t}{100}}$$

Que con la condición inicial se obtiene $k = -\frac{10}{3}$.

Y la corriente:

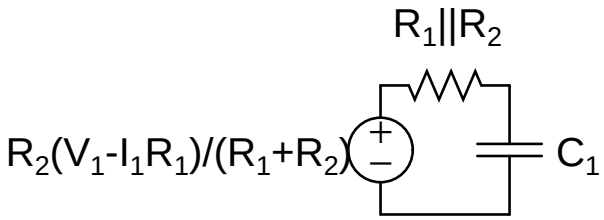
$$i_c(t) = C_1 \frac{d}{dt} v_c(t) = 5 \cdot 10^{-3} e^{-1500t} - \frac{1}{3} 10^{-7} e^{-\frac{t}{100}}$$

- Para $t > t_2$

  Obtenemos la condición inicial como:

$$v_c(t_2^+) = v_c(t_2^-) = \frac{10}{3} \left(e^{-\frac{3}{2} 10^3 t_2^-} + e^{-\frac{t_2^-}{100}} \right) \approx 3.267\,\text{V}$$

  Ahora encendemos la fuente de corriente y tranformamos el circuito a uno RC básico como el siguiente:



  Se llega a la ecuación:

$$\frac{d}{dt} v_c(t) + \frac{1}{R_1 || R_2 \cdot C_1} v_c(t) = \frac{1}{R_1 || R_2 \cdot C_1} \frac{R_2}{R_1 + R_2} \left(5e^{-\frac{t}{100}} - 20 \right)$$

  Que tiene como solución:

$$v_c(t) = 3277e^{-1500t} + 3,3e^{-\frac{t}{100}} - 13,3 \text{ y } i_c(t) = -4{,}9e^{-1500t} - 3{,}3 \cdot 10^{-8} e^{-\frac{t}{100}}$$

Problema 3

Considere el circuito de la figura:

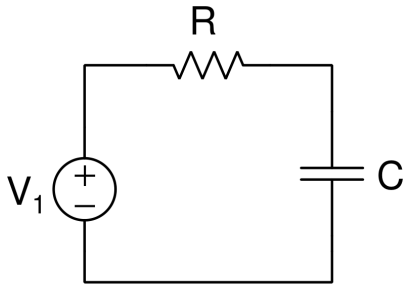


Figura 6: Circuito RC

1. Plantee la ecuación diferencial que permite encontrar el voltaje en el capacitor para $V_1 = v(t)$ arbitrario.
2. Encuentre la solución homogenea para esa ecuación diferencial.

3. Encuentre la solución particular del circuito para el caso $v(t) = A\sin(\omega t)$

4. Considere $\omega = \frac{1}{RC}$. Grafique la solución homogenea y particular para el voltaje y la corriente en el capacitor, utilice graficos normalizados. Considere las condiciones iniciales $v_c(0) = 0$ y $v_c(0) = A$.

5. Suponga que el circuito se encuentra en régimen sinusoidal permanente. Calcule la magnitud y la fase del voltaje en el capacitor en función de ω. Considere que A, R y C son parámetros conocidos.

6. Grafique la magnitud del voltaje en el capacitor en función de ω. Utilice escala logarítmica en ambos ejes.

7. Grafique la fase del voltaje en el capacitor en función de ω. Utilice escala logarítmica para la frecuencia.

8. Analice el efecto del circuito sobre un voltaje de entrada sinusoidal (es decir, la relación entre $v_c(t)$ y $v(t)$). Utilice sus ecuaciones y gráficos para apoyar su respuesta.

Solución:

1. La ecuación es:
$$\frac{d}{dt}v_c(t) + \frac{1}{RC}v_c(t) = \frac{1}{RC}v(t)$$

2. Por variables separables podemos llegar a:
$$v_{c,h}(t) = Ke^{-\frac{1}{RC}t}$$

3. Resolviendo se llega a:
$$v_{c,p}(t) = \frac{A}{1+(\omega RC)^2}\sin(\omega t) - \frac{A\omega RC}{1+(\omega RC)^2}\cos(\omega t)$$

4. Tenemos que
$$v_c(t) = v_{c,h}(t) + v_{c,p}(t) = Ke^{-\frac{1}{RC}t} + \frac{A}{1+(\omega RC)^2}\sin(\omega t) - \frac{A\omega RC}{1+(\omega RC)^2}\cos(\omega t)$$
Luego
$$v_c(0) = K - \frac{A\omega RC}{1+(\omega RC)^2} \implies K = v_c(0) + \frac{A\omega RC}{1+(\omega RC)^2}$$
Luego la solución completa es:
$$v_c(t) = \left(v_c(0) + \frac{A\omega RC}{1+(\omega RC)^2}\right)e^{-\frac{1}{RC}t} + \frac{A}{1+(\omega RC)^2}\sin(\omega t) - \frac{A\omega RC}{1+(\omega RC)^2}\cos(\omega t)$$
Que podemos expresar mediante transformaciones trigonométricas a:
$$v_c(t) = \left(v_c(0) + \frac{A\omega RC}{1+(\omega RC)^2}\right)e^{-\frac{1}{RC}t} + \frac{A}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}\sin\left(\omega t - \tan^{-1}(\omega RC)\right)$$
Reemplazando $\omega = \frac{1}{RC}$
$$v_c(t) = \left(v_c(0) + \frac{A}{2}\right)e^{-\frac{t}{RC}} + \frac{A}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{t}{RC} - \frac{\pi}{4}\right)$$

Podemos notar que la solución particular no depende de la condición inicial por lo tanto el gráfico es igual para ambos casos.

Las soluciones solo dependen de A y $\tau = RC$ como parámetros extra, luego se elige graficar normalizando los ejes en $\frac{v_c(t)}{A}$ vs $\frac{t}{\tau}$ respectivamente. Considerando esto los gráficos quedan:

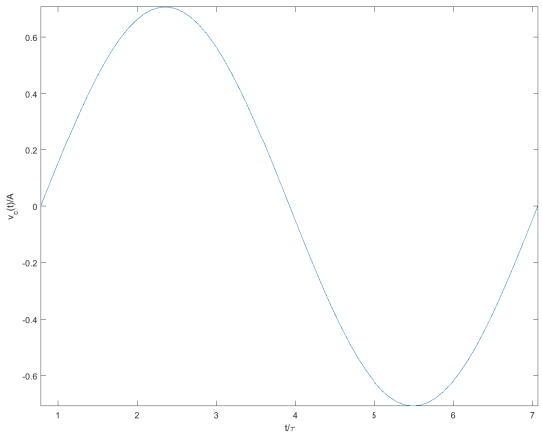


Figura 7: Solución particular en ambos casos

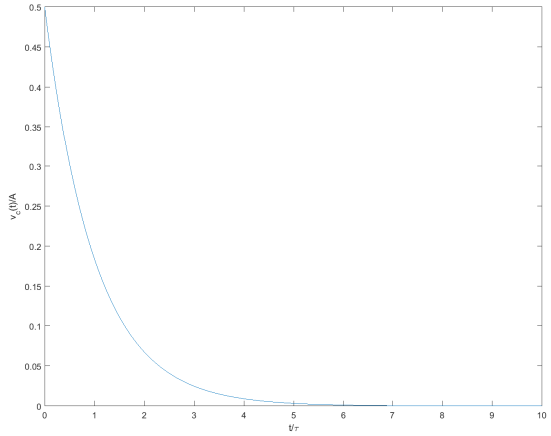


Figura 8: Solución homogénea para condición inicial nula

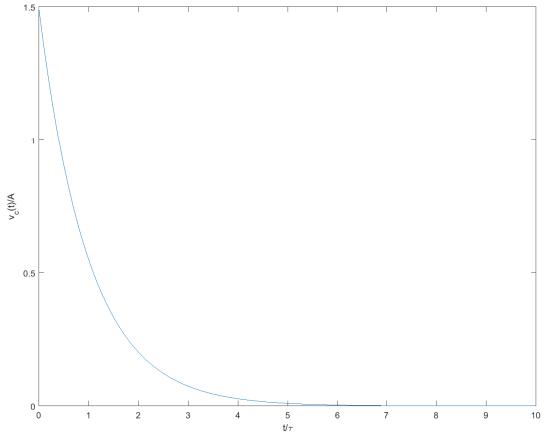


Figura 9: Solución homogénea para condición inicial no nula

5. Utilizando identidades trigonométricas se puede llegar al resultado

$$v_c(t) = \frac{A}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}\cos(\omega t + \tan^{-1}(\frac{1}{\omega RC}))$$

6. Para $A = 1$ el gráfico queda:

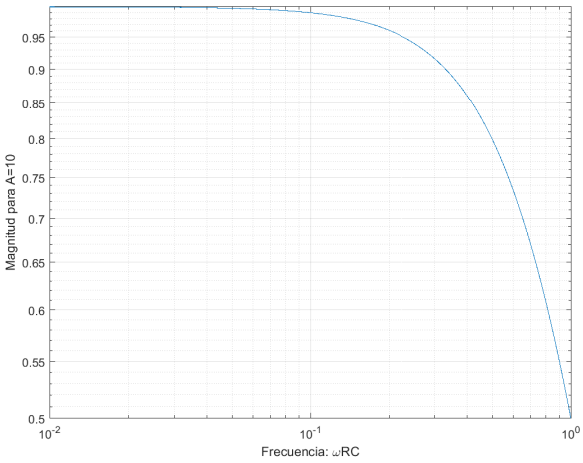


Figura 10: $|v_c(\omega)|$

7. El gráfico queda

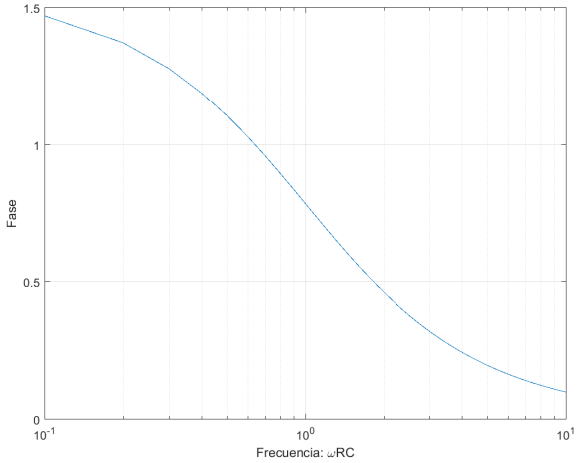


Figura 11: $|v_c(\omega)|$