Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ingeniería Eléctrica
IEE2123 - Circuitos Eléctricos

Tarea 3

Teoremas de Superposición, Thévenin, Norton, y Máxima transferencia de potencia.

2º semestre 2022 - Profesor Samuel Cordova

Ayudante Vicente Corvalán - vcorvalh@uc.cl

- La tarea debe ser subida en formato .pdf a Canvas, junto a los archivos adjuntos necesarios en un formato .rar o .zip en caso de que aplique.
- No se aceptan fotografías de tareas escritas a mano. Solo serán revisadas tareas escritas en editor de texto (imágenes, diagramas, esquemáticos, etc, podrán ser hechos a mano).
- Existirá un bono de +0.5 pts. para las tareas escritas en LaTeX.

Problema 1

A partir del circuito que se muestra en la Figura 1 realice lo siguiente, teniendo en cuenta que $R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6, R_7 > 0$, y que $g_m > 0$:

- Usando el Teorema de Superposición, determine el equivalente de Thévenin visto desde los terminales **A** y **B**. Luego, basado en lo anterior, determine el equivalente de Norton resultante.
- Ahora, usted desea conectar una carga R_L entre los terminales **A** y **B**. Determine que valor debe tener R_L para que se transfiera la máxima potencia posible.

NOTA: $V_{gs} = V_g - V_s$

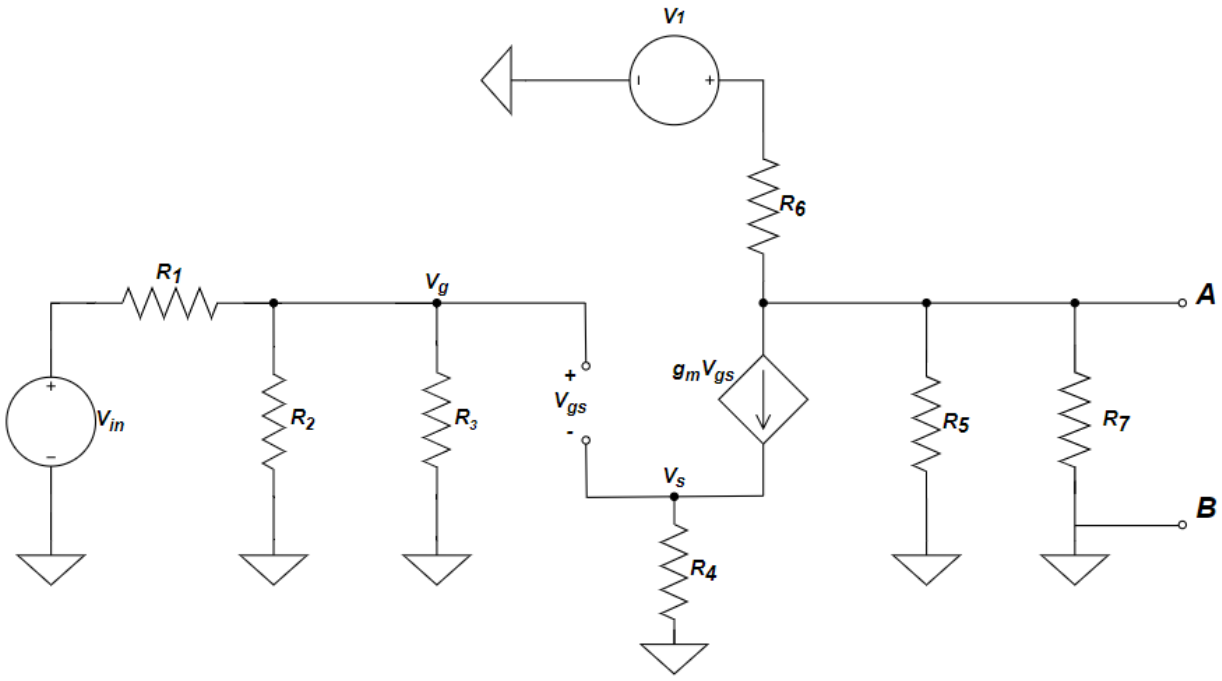


Figura 1: Circuito del Problema 1.

Solución:

a) Usamos teorema de superposición para encontrar el voltaje de Thévenin $V_{th} = V_A - V_B$. Primero, apagamos V_{in} y calculamos V_{th} debido a V_1.

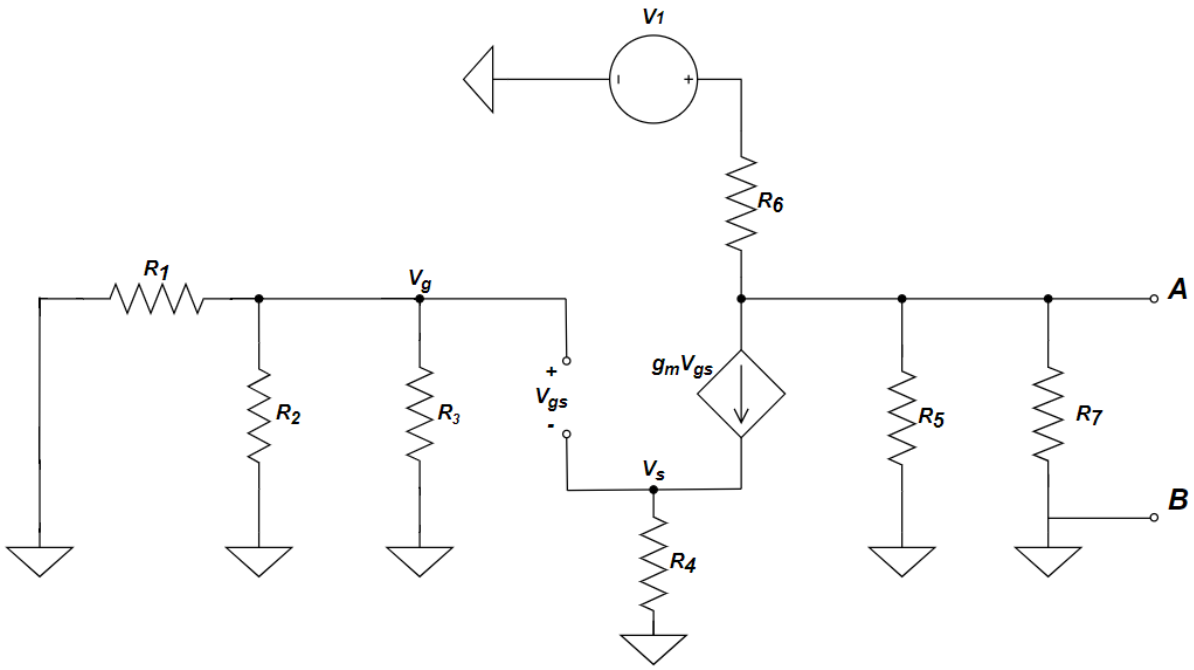


Figura 2: Circuito con V_{in} apagado

Podemos notar que evidentemente $V_g = 0$, ya que no hay alimentación que permita crear un voltaje en la parte izquierda del circuito. Luego, podemos calcular el voltaje V_s como:

$$V_s = g_m(V_g - V_s)R_4$$
$$V_s(1 + g_m R_4) = 0$$

Como $1 + g_m \neq 0$, tenemos que $V_s = 0$ y por lo tanto la fuente de corriente dependiente se convierte en un circuito abierto.

Así, dado el divisor de voltaje que se genera, tenemos $V_{th}\Big|_{V_{in}=0} = V_1 \dfrac{R_5||R_7}{(R_5||R_7) + R_6}$.

Ahora, calculamos el voltaje V_{th} debido a V_{in} con V_1 apagado.

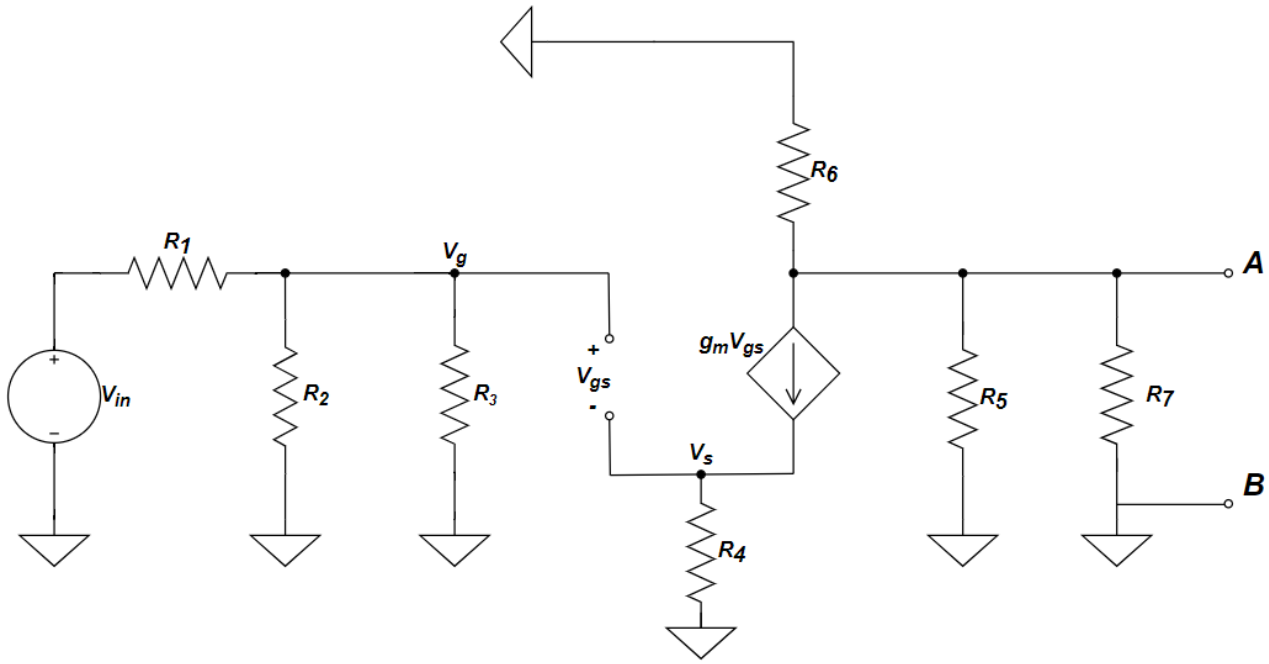


Figura 3: Circuito con V_1 apagado

Primero, notamos que se forma un divisor de voltaje entre R_1 y $R_2||R_3$, de forma que $V_g = V_{in}\dfrac{R_2||R_3}{R_1 + (R_2||R_3)}$. Luego, podemos calcular V_s de la misma forma que antes:

$$\begin{aligned} V_s &= g_m(V_g - V_s)R_4 \\ V_s(1 + g_m R_4) &= V_g g_m R_4 \\ V_s &= V_g \frac{g_m R_4}{1 + g_m R_4} \end{aligned}$$

Con toda esta información, conocemos la corriente que produce la fuente dependiente, y podemos calcular el voltaje entre "A" y "B" utilizando ley de Ohm. Para esto, notamos que la caída de tensión entre R_5, R_6, y R_7 es la misma, luego la podemos reducir a una resistencia equivalente para facilitar los cálculos:

$$\begin{aligned} V_{th}\Big|_{V_1=0} &= -g_m V_{gs} \cdot (R_5||R_6||R_7) \\ &= -g_m(R_5||R_6||R_7)(V_g - V_s) \\ &= -g_m(R_5||R_6||R_7)\left(V_{in}\frac{R_2||R_3}{R_1 + (R_2||R_3)} - V_{in}\frac{R_2||R_3}{R_1 + (R_2||R_3)}\frac{g_m R_4}{1 + g_m R_4}\right) \\ &= -g_m V_{in}(R_5||R_6||R_7)\frac{R_2||R_3}{R_1 + (R_2||R_3)}\left(1 - \frac{g_m R_4}{1 + g_m R_4}\right) \end{aligned}$$

Así, tenemos que el voltaje de Thévenin es:

$$V_{th} = V_{th}\Big|_{V_{in}=0} + V_{th}\Big|_{V_1=0}$$

$$V_{th} = V_1 \frac{R_5||R_7}{(R_5||R_7)+R_6} - g_m V_{in}(R_5||R_6||R_7)\frac{R_2||R_3}{R_1+(R_2||R_3)}\left(1-\frac{g_m R_4}{1+g_m R_4}\right)$$

Lo siguiente es encontrar la resistencia de Thévenin, la cual se obtiene de apagar fuentes independientes y midiendo la resistencia equivalente entre los terminales con una fuente de prueba:

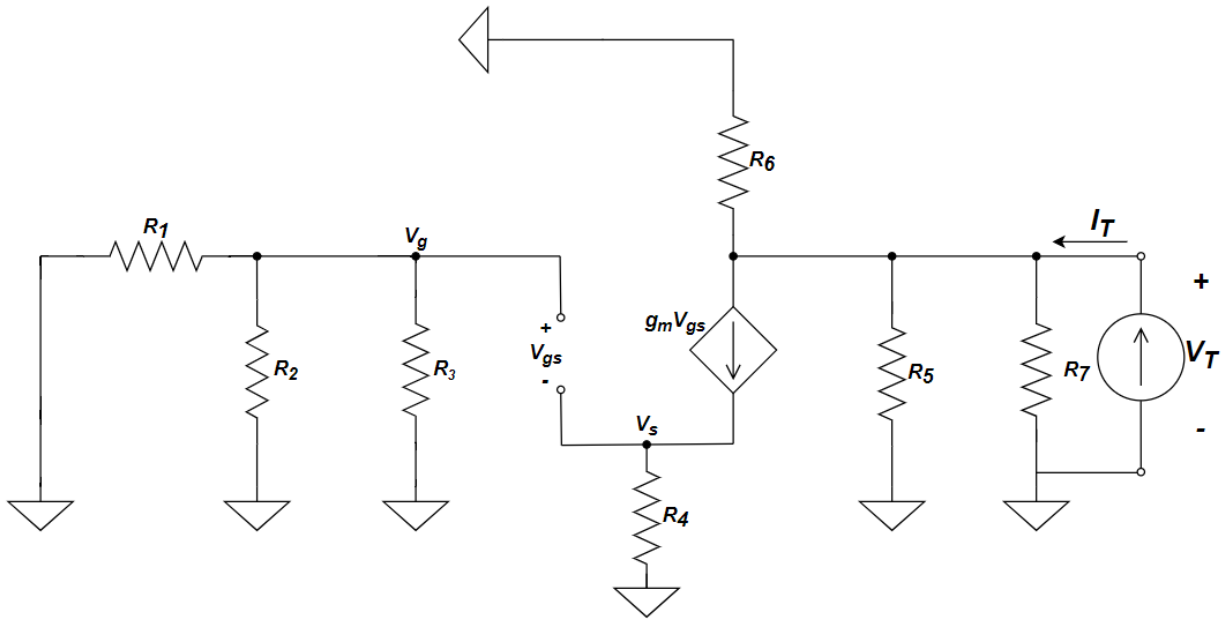


Figura 4: Circuito con fuentes independientes apagadas, y una fuente de prueba

Como vimos antes, al apagar V_{in}, $V_g = V_s = 0$ y por lo tanto la fuente dependiente es un circuito abierto. Así, nos queda que $R_{th} = R_5||R_6||R_7$

Luego, sabemos que el equivalente de Norton es el dual del equivalente de Thévenin. Así, podemos encontrar el equivalente de Norton realizando la siguiente transformación:

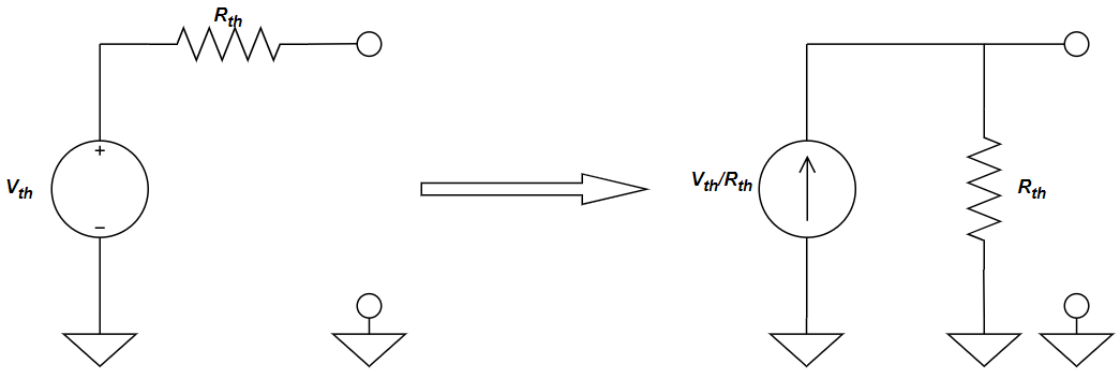


Figura 5: Transformación entre Equivalente de Thévenin y Norton

Por lo tanto la corriente de Norton es $I_{nt} = \dfrac{V_{th}}{R_{th}}$, y la resistencia de Norton es $R_{nt} = R_{th}$

b) Recordamos que la carga que maximiza la transferencia de potencia, es aquella que iguala la resistencia de Thévenin. Por lo tanto, el valor de R_L que maximiza la transferencia de potencia es $R_L = R_{th} = R_5||R_6||R_7$

Problema 2

En el siguiente circuito se tiene una fuente de voltaje dependiente de voltaje, con ganancia A_v que tiende a infinito ($A_v \to +\infty$). En este, se conecta una carga R_L de valor conocido a la cual desea transferir la máxima potencia posible. Para esto, seguirá los siguientes pasos:

- En función de los parámetros conocidos, encuentre el valor de R_x que permite que se transfiera la máxima potencia a R_L.
- **Sin conectar** la carga R_L, determine el voltaje en circuito abierto observado entre los terminales **A** y **B**, es decir, el voltaje de Thévenin entre **A** y **B**.
  HINT: Primero encuentre el voltaje v_m en función de v_p, y luego determine v_p.
- Encuentre la potencia transferida a la carga R_L, utilizando el valor de R_x encontrado en a).

NOTA: Se sugiere utilizar variables auxiliares en función de los parámetros conocidos para reducir el tamaño de las expresiones encontradas.

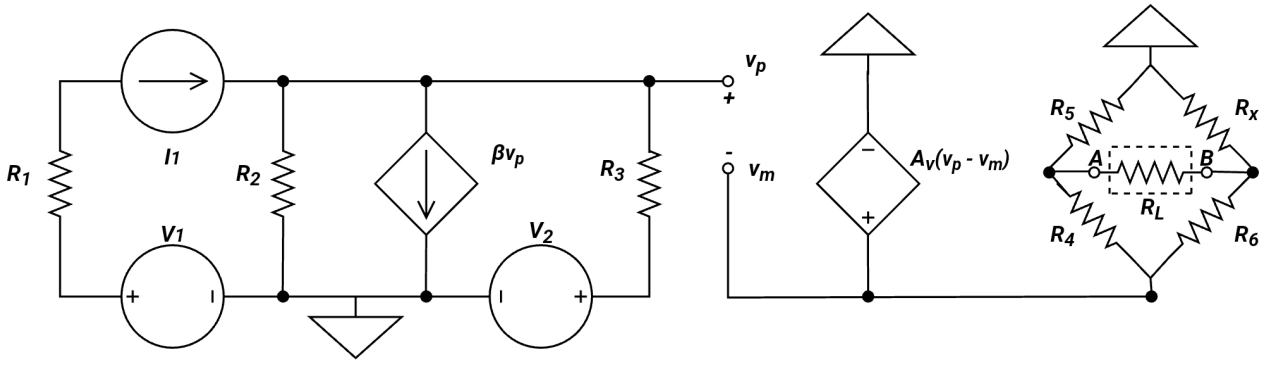


Figura 6: Circuito del Problema 2

Solución:
a) Para transmitir la máxima potencia a la carga, buscamos que le resistencia de Thévenin sea la mínima posible. Para esto, primero calculamos R_{th} apagando fuentes independientes.

Podemos notar, que $v_p = 0$ cuando se apagan fuentes independientes. Luego, podemos buscar el valor de v_m.

$$v_m = A_v(v_p - v_m)$$
$$v_m(1 + A_v) = 0$$

Como sabemos que A_v es muy grande (tiende a infinito), la única manera de que esa expresión sea cero, es que v_m también sea cero. Luego, con $v_p = v_m = 0$, la fuente de voltaje dependiente, se convierte en un cortocircuito.

Así, podemos simplificar el circuito a lo siguiente:

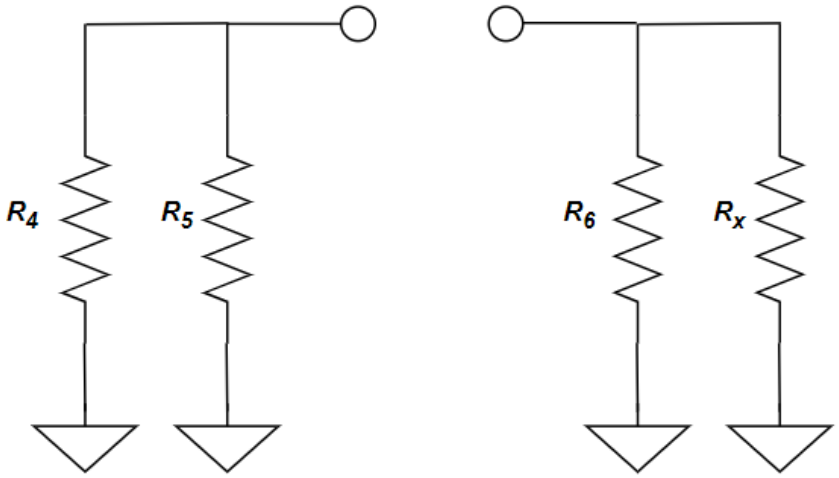


Figura 7: Resistencia equivalente vista entre los terminales de R_L

Luego, R_{th}:

$$R_{th} = (R_4||R_5) + (R_6||R_x)$$

Notamos a partir de esta ecuación que si $R_x = 0$, entonces tendríamos la resistencia de Thévenin mínima, por lo tanto este valor es el que nos permite transferir la máxima potencia, resultando en $R_{th} = R_4||R_5$

b) Como ya tenemos R_{th}, solo faltaría calcular V_{th} para obtener el equivalente de Thevenin. Luego, se procede a calcular el voltaje V_{th} como se muestra a continuación. Buscamos v_m en función de v_p. Para esto, notamos que $v_m = A_v(v_p - v_m)$

$$\begin{aligned} v_m &= A_v(v_p - v_m) \\ v_m + A_v v_m &= A_v v_p \\ v_m(1 + A_v) &= A_v v_p \\ v_m &= v_p \frac{A_v}{1 + A_v} \end{aligned}$$

Sin embargo, $A_v \longrightarrow \infty$, con lo cual:

$$\begin{aligned} v_m &= \lim_{A_v \longrightarrow \infty} v_p \frac{A_v}{1 + A_v} \quad \Big/ \frac{1/A_v}{1/A_v} \\ v_m &= \lim_{A_v \longrightarrow \infty} v_p \frac{1}{\frac{1}{A_v} + 1} \\ v_m &= v_p \end{aligned}$$

A continuación, podemos notar que la fuente de corriente dependiente tiene como ecuación:

$$I = \beta v_p$$

Como, el voltaje entre sus terminales es v_p, podemos transformar esta fuente dependiente en un resistor con resistencia β^{-1}.

Luego, utilizando superposición, buscamos el voltaje v_p. Primero, buscamos v_p dado V_1 con el resto de fuentes independientes apagadas:

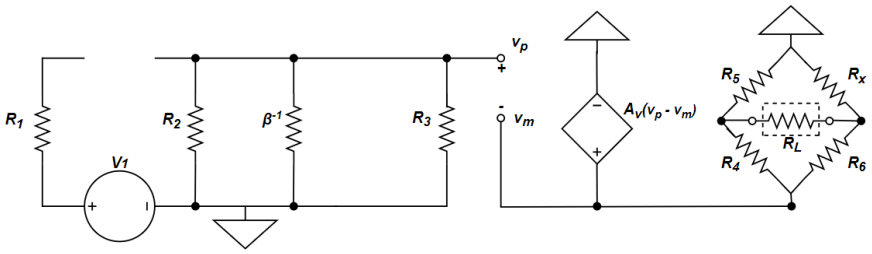


Figura 8: Circuito con fuente V_1 encendida, y el resto de fuentes independientes apagadas

Podemos notar, que v_p no se ve afectado por la excitación V_1, por lo tanto $v_p\Big|_{(V_2=0)\ (I_1=0)} = 0$

Luego, buscamos v_p dado V_2 con el resto de fuentes independientes apagadas:

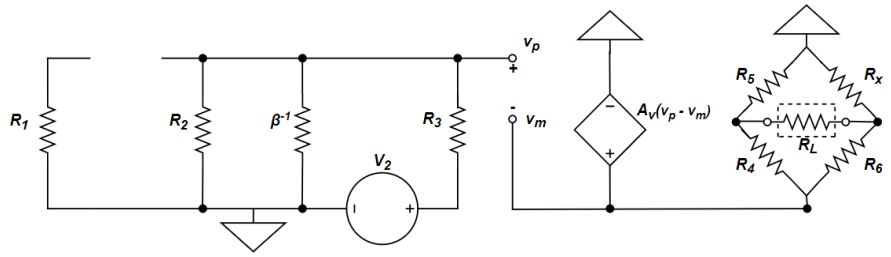


Figura 9: Circuito con fuente V_2 encendida, y el resto de fuentes independientes apagadas

Podemos notar, que v_p corresponde al voltaje que se produce por el divisor de voltaje entre $R_2||\beta^{-1}$ y R_3.

$$v_p\Big|_{(V_1=0)\ \wedge\ (I_1=0)} = V_2 \frac{R_2||\beta^{-1}}{R_3 + (R_2||\beta^{-1})}$$

Finalmente, buscamos el voltaje v_p dado I_1 con el resto de fuentes independientes apagadas.

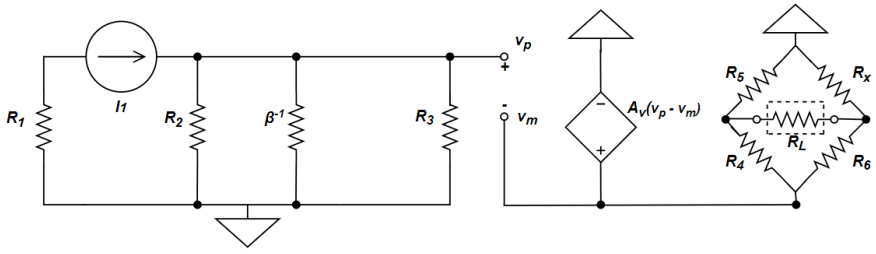


Figura 10: Circuito con fuente I_1 encendida, y el resto de fuentes independientes apagadas

Notamos que la caída de tensión en R_2, R_3, y β^{-1} es la misma, y es igual a v_p, por lo tanto, podemos reducir estos elementos a un único resistor con resistencia equivalente $R_2||R_3||\beta^{-1}$. Luego, v_p es:

$$v_p\Big|_{(V_1=0)\,\wedge\,(V_2=0)} = I_1(R_2||R_3||\beta^{-1})$$

Así,

$$v_p = v_p\Big|_{(V_2=0)\,\wedge\,(I_1=0)} + v_p\Big|_{(V_1=0)\,\wedge\,(I_1=0)} + v_p\Big|_{(V_1=0)\,\wedge\,(V_2=0)}$$
$$v_p = 0 + V_2\frac{R_2||\beta^{-1}}{R_3 + (R_2||\beta^{-1})} + I_1(R_2||R_3||\beta^{-1})$$

Y de acuerdo a la ecuación encontrada previamente, $v_m = V_2\dfrac{R_2||\beta^{-1}}{R_3 + (R_2||\beta^{-1})} + I_1(R_2||R_3||\beta^{-1})$. Así, el voltaje en cada terminal lo podemos obtener a partir de cada divisor de voltaje. Calculamos el voltaje de Thévenin, como la diferencia entre los voltajes de los nodos "A" y "B", definidos arbitrariamente. (Podría ser $V_{th} = V_B - V_A$, el voltaje es arbitrario, y no cambia la potencia transferida).

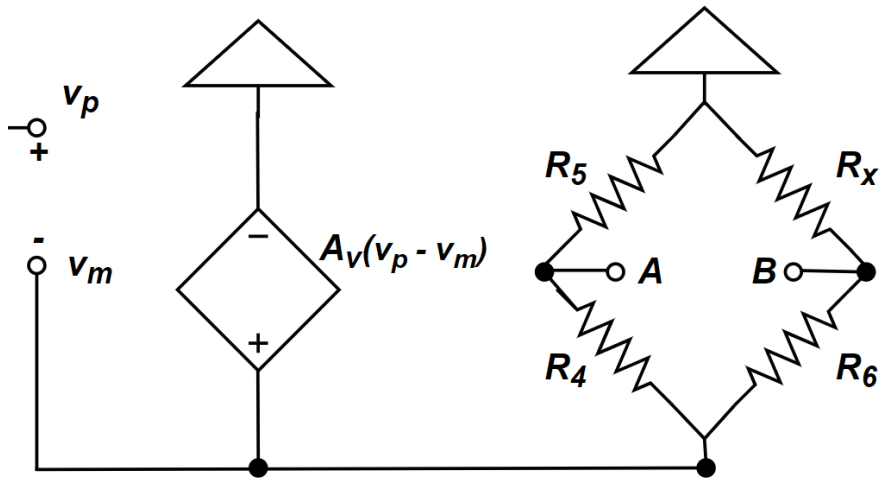


Figura 11: Circuito con los nodos "A" y "B" definido arbitrariamente, con el fin de calcular $V_A - V_B$

Como en este caso $R_x = 0$ como encontramos previamente, el voltaje $V_B = 0$.

Luego, el voltaje de Thévenin es $V_{th} = V_A - V_B = v_m(\frac{R_5}{R_5 + R_4})$

c) La potencia transferida a la carga la podemos obtener como:

$$P_{R_L} = \frac{V_{R_L}^2}{R_L} = \left(V_{th}\frac{R_L}{R_L + R_{th}}\right)^2 \frac{1}{R_L} = V_{th}^2 \frac{R_L}{(R_L + R_{th})^2}$$

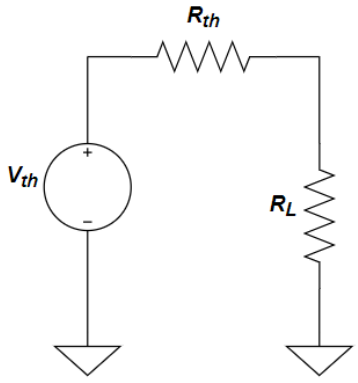


Figura 12: Equivalente de Thévenin visto desde la carga R_L, conectado a la carga R_L

Recordando que:

$$
\begin{aligned}
V_{th} &= v_m(\frac{R_5}{R_5 + R_4}) \\
v_m &= V_2 \frac{R_2||\beta^{-1}}{R_3 + (R_2||\beta^{-1})} + I_1(R_2||R_3||\beta^{-1}) \\
R_{th} &= R_4||R_5
\end{aligned}
$$

Propuesto 1

Calcule el equivalente de Norton del circuito de la figura 10 visto por la resistencia azul utilizando superposición.

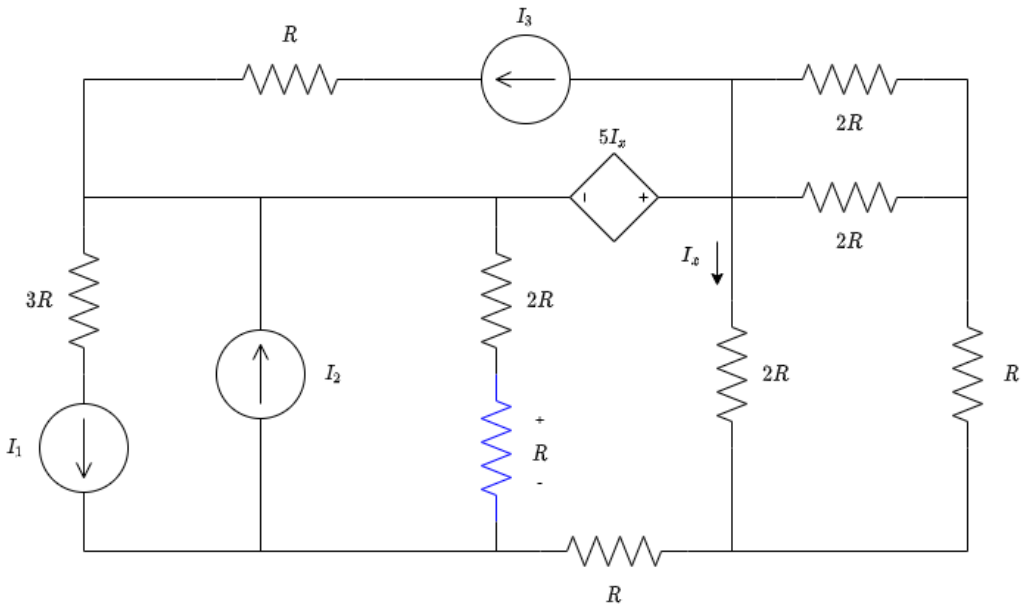


Figura 13: Circuito problema propuesto 1

Solución:
En primer lugar se encuentre la resistencia equivalente, para esto en primer lugar se apagan todas las fuentes independientes del circuito, obteniendo:

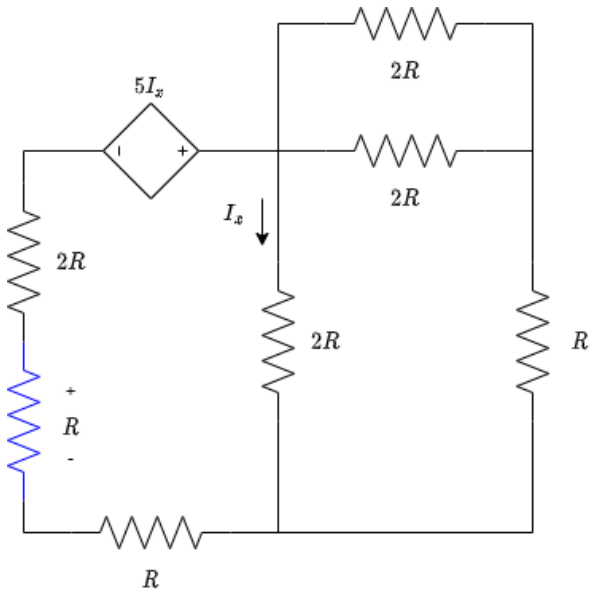


Figura 14: Circuito propuesto 1

Se reducen las resistencias:

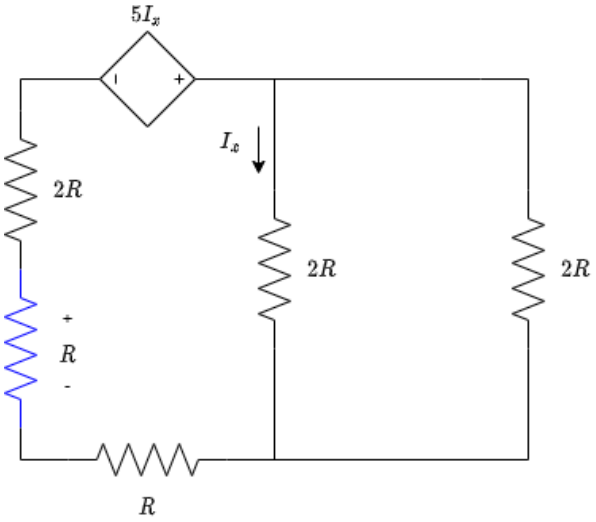


Figura 15: Circuito propuesto 1

Se calcula el paralelo entre las resistencias, reasignando el valor de la corriente:

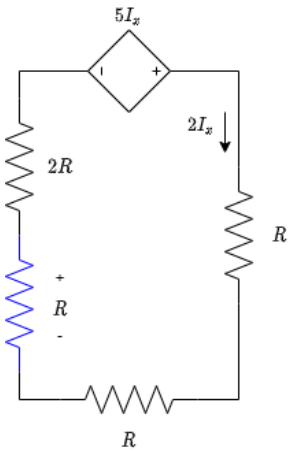


Figura 16: Circuito propuesto 1

Debido a que no se puede ver a simple vista la resistencia equivalente, se coloca una fuente de prueba de voltaje V y corriente I:

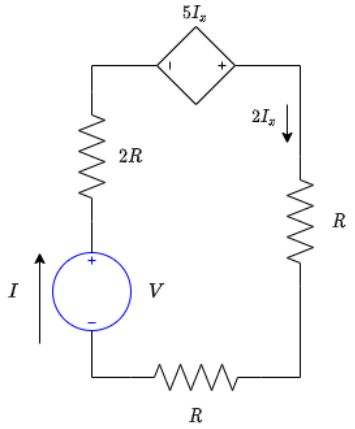


Figura 17: Circuito propuesto 1

Para encontrar la resistencia se debe llegar a V/I, de esta forma, por método de mallas, considerando $I = 2I_x$, se tiene:

$$V - 2RI + 5I_x - RI - RI = 0$$

$$V - 4RI + 5I_x = 0$$

$$V = I \cdot (4R - 5/2)$$

$$R_{eq} = \frac{V}{I} = 4R - 5/2$$

Ahora se debe encontrar la corriente de Norton, que equivale a la corriente de cortocircuito, es decir:

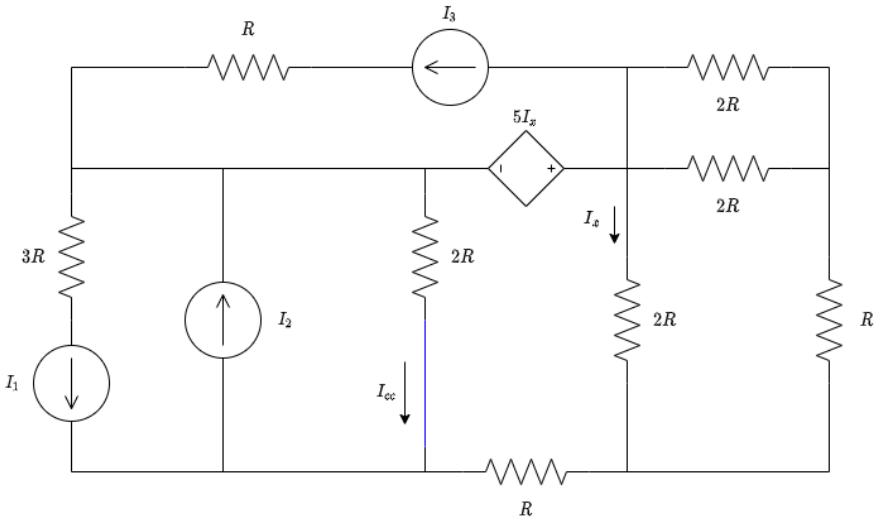


Figura 18: Circuito propuesto 1

- I_1 encendida

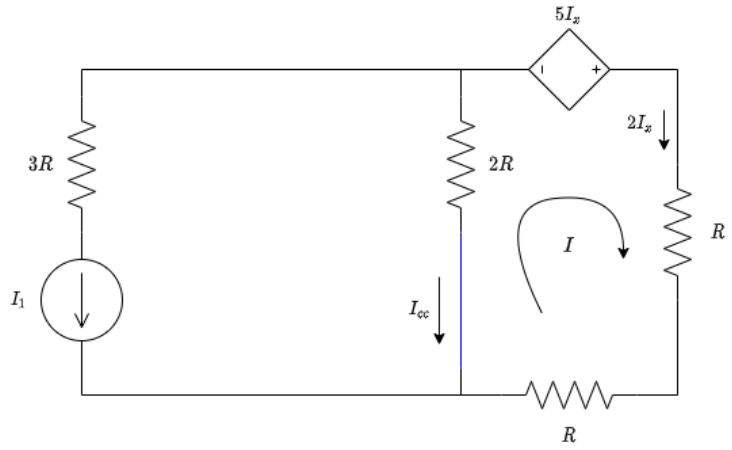


Figura 19: Circuito propuesto 1

En primer lugar se sabe que $I_{cc} = -I_1 - 2I_x$, luego, por mallas:

$$5I_x - I2R - 2R(I - -I_1) = 0$$

Sabiendo que $I = 2I_x$ y despejando I:

$$I = \frac{2RI_1}{5/2 - 4R}$$

Luego I_{cc} es:

$$I_{cc} = -I_1 - I = -I_1 - \frac{2RI_1}{5/2 - 4R}$$

- I_2 encendida

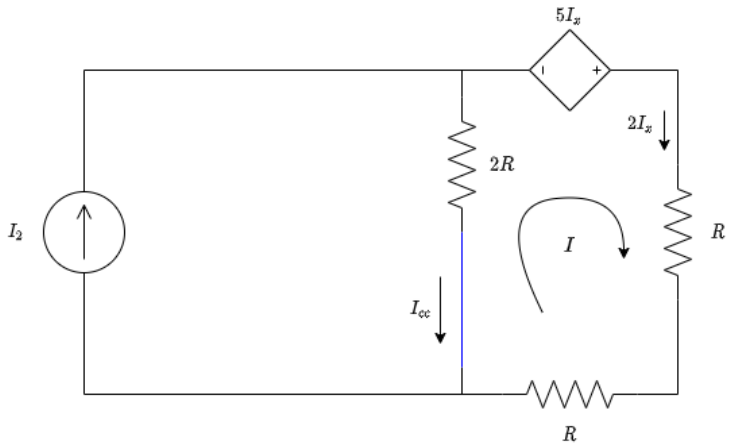


Figura 20: Circuito propuesto 1

En primer lugar se sabe que $I_{cc} = I_2 - 2I_x$, luego, por mallas:

$$5I_x - I2R - 2R(I - I_2) = 0$$

Sabiendo que $I = 2I_x$ y despejando I:

$$I = \frac{-2RI_2}{5/2 - 4R}$$

Luego I_{cc} es:

$$I_{cc} = I_2 - I = I_2 + \frac{2RI_2}{5/2 - 4R}$$

- I_3 encendida

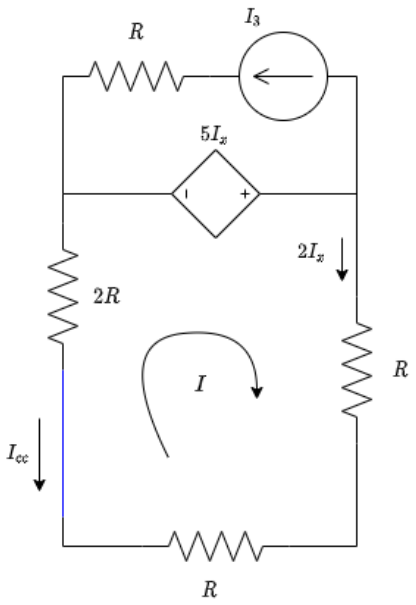


Figura 21: Circuito propuesto 1

En primer lugar se sabe que $I_{cc} = -2I_x$, luego, por mallas:

$$-2RI + 5I_x - I2R = 0$$

Sabiendo que $I = 2I_x$ y despejando I_x: $I_x = 0$ Luego I_{cc} es:

$$I_{cc} = -2I_x = 0$$

Finalmente, por superposición, se obtiene que I_{cc} es:

$$I_{cc} = I_{cc}|_{I1} + I_{cc}|_{I2} + I_{cc}|_{I3}$$

$$I_{cc} = -I_1 - \frac{2RI_1}{5/2 - 4R} + I_2 + \frac{2RI_2}{5/2 - 4R} + 0$$

Luego el equivalente de Norton queda de la forma:

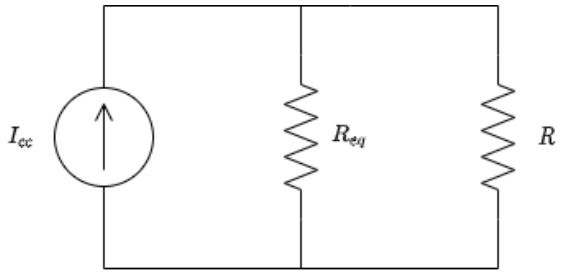


Figura 22: Circuito propuesto 1

Propuesto 2

Investigue los siguiente temas respecto a capacitores, e inductores:

- ¿Por qué para capacitores en paralelo se suman sus capacitancias?¿Y capacitores en serie?
- ¿Por qué para inductores en serie se suman sus inductancias?¿E inductores en paralelo?
- ¿Cómo se comporta un capacitor a **muy alta** frecuencia? ¿Y en **DC**?
- ¿Cómo se comporta un inductor a **muy alta** frecuencia? ¿Y en **DC**?