ESCUELA DE INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA ELECTRICA
IEE 2123
Circuitos Eléctricos
Segundo Semestre 2025

Tarea 2

Fecha Entrega: Lunes 25 de Agosto hasta las 18:00 Hrs.

- La tarea debe ser entregada en un archivo `.pdf` y cargada en el cuestionario de Canvas habilitado, antes del plazo. El formato del archivo debe ser `T2_Apellido_Nombre.pdf`
- Debe indicar claramente su desarrollo en cada ejercicio, puesto que problemas sin desarrollos no serán considerados corregidos.
- Tareas con algún problema en blanco no serán consideradas y obtendrán la nota mínima
- Las tareas deben ser entregas en en algún editor de texto como Word o LaTeX. En particular, se recomienda LaTeX(Overleaf) por su facilidad para manejar ecuaciones.
- Libros, papers o cualquier material usado debe ser referenciado apropiadamente. Material no debidamente referenciado será penalizado mediante descuentos en la nota.
- En caso de utilizar herramientas de inteligencia artificial, estas solo deben emplearse como apoyo en la búsqueda de información o en la redacción, sin incluir directamente en las respuestas una reproducción literal del contenido generado. Además, no se debe proporcionar a la IA la pregunta ni una variación de esta como instrucción directa. **En el caso de usar IA sin la debida citación, se asignará nota 1.0 en la tarea.**

Problema 1: Curva de carga celda fotovoltaica (10 pts)

La Figura 1 muestra la curva de carga de una celda fotovoltaica bajo diferentes condiciones de irradiación solar:

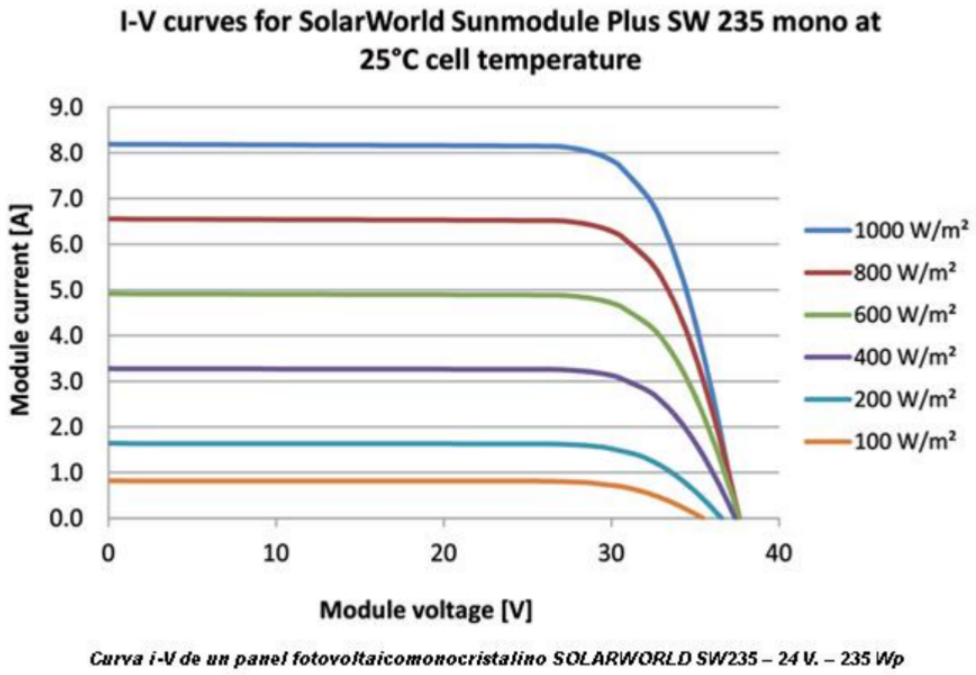


Figura 1: Curvas de carga para distintas celdas fotovoltaicas.

Asuma los siguientes voltajes en los que se maximiza la potencia para cada condición:

- 1000 W/m2: 29 V
- 800 W/m2: 29 V
- 600 W/m2: 28.5 V
- 400 W/m2: 28 V
- 200 W/m2: 27 V
- 100 W/m2: 26 V

a) Grafique, de manera aproximada, las curvas de potencia en función del voltaje para cada condición de carga. Las curvas deben estar contenidas en un mismo gráfico, el cual debe tener una presentación clara (ejes etiquetados, curvas de grosor visible, rangos razonables, entre otros) **[5 pts]**.

b) Suponga que se trabaja con un panel fotovoltaico con 1000 W/m2 de irradiación solar. Determine la potencia entregada por el panel si a la salida se conecta una carga resistiva de valor R_L, evalúe los siguientes casos **[3 pts]**:

- $R_L = 2\ \Omega$

- $R_L = 5\ \Omega$
- $R_L = 10\ \Omega$

c) Basado en lo observado en el ítem anterior, determine (aproximadamente) el valor de la resistencia R_L que maximiza la potencia entregada a la carga **[2 pts]**.

Solución (10 pts):

a) Como se tiene la relación $P = VI$, basta con multiplicar los valores de corriente por el voltaje correspondiente en cada punto. Para las regiones de corriente constante (aproximación) se tienen rectas ascendentes que comienzan en el origen (voltaje y potencia nula). Se obtiene un punto de máxima potencia para cada curva, la cual decae hasta ser nula para el voltaje de circuito abierto.

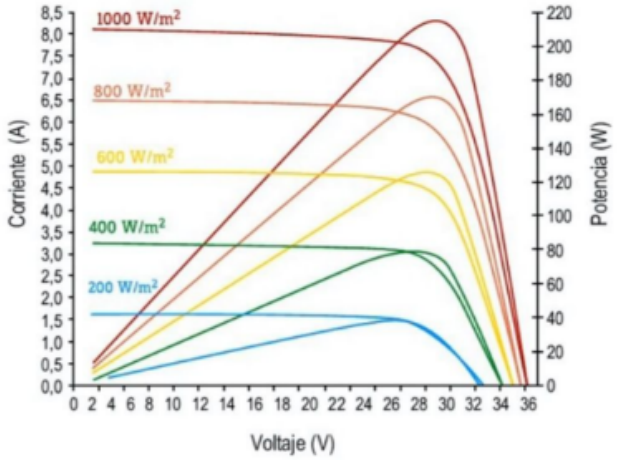


Figura 2: Curvas de potencia

- 2 pts por obtener curvas con potencia nula en el origen
- 2 pts por obtener curvas con punto de máxima potencia (no es necesario el valor)
- 1 pto por presentación del gráfico (unidades de medida, grosor visible, entre otros)

b) Los valores de corriente y voltaje para la carga se obtienen trazando rectas que pasan por el origen y con pendiente $1/R_L$:

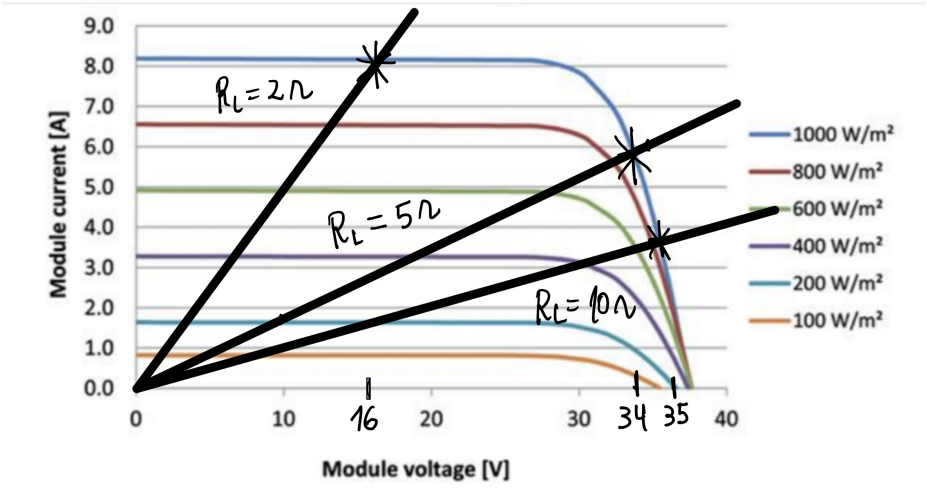


Figura 3: Intersección curva de carga

Aproximadamente, se obtiene la potencia para cada carga:

- $R_L = 2\ \Omega \rightarrow P = VI = 16V \cdot 8A = 128\ W$
- $R_L = 5\ \Omega \rightarrow P = VI = 34V \cdot 5{,}8A = 197{,}2\ W$
- $R_L = 10\ \Omega \rightarrow P = VI = 35V \cdot 3{,}5A = 122{,}5\ W$

- 1 pto por cada valor correcto. Estos resultados son aproximados, pueden variar entre valores cercanos a los establecidos.

c) La resistencia que maximiza la potencia cumple que:

$$R_L = \frac{V}{I_{max}} \approx \frac{29V}{8A} \approx 3{,}625\ \Omega$$

- 2 pts por obtener el valor correcto. Este resultado es aproximado, puede variar entre valores cercanos.

Problema 2: Resistencia equivalente (8 pts)

En la Figura 2 se observa un circuito con una fuente de voltaje independiente y dos resistencias en serie. Las resistencias están en serie cuando una se sitúa a continuación de la otra en un mismo hilo conductor, por lo que la corriente que atraviesa a cada una será la misma. Es posible reducir las resistencias en serie a una resistencia equivalente, que corresponde a la suma de estas mismas:

$$R_{eq} = R_1 + R_2$$

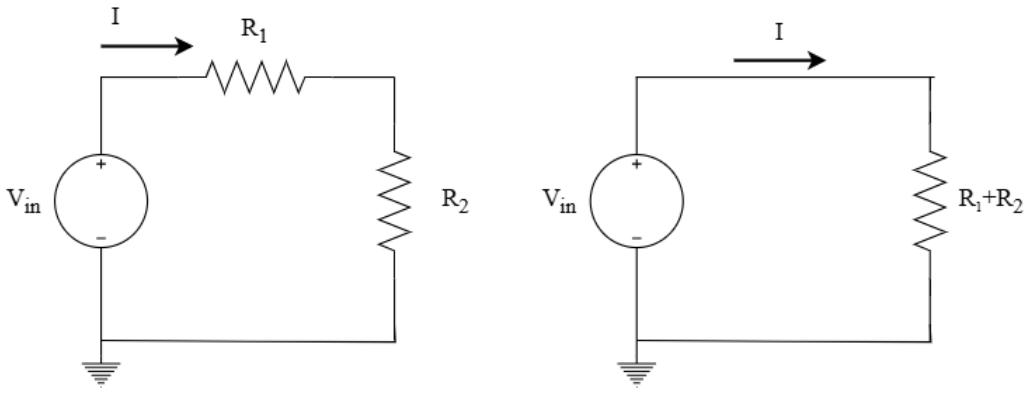


Figura 4: Resistencia equivalente para conexión serie

Por otro lado, en la Figura 3 se observa un circuito con una fuente de voltaje y dos resistencias en paralelo. Las resistencias están en paralelo cuando estas comparten los mismos nodos entre sí, lo que significa que el voltaje es el mismo para todas las resistencias que se encuentren en paralelo. Es posible reducir las resistencias en paralelo a una resistencia equivalente a través de la siguiente operación:

$$R_{eq} = R_1 // R_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

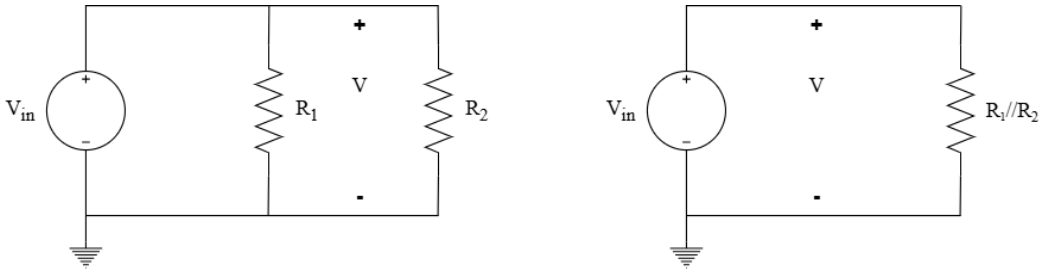


Figura 5: Resistencia equivalente para conexión paralelo

Considerando la información anterior, calcule la resistencia equivalente entre los terminales A y B en los siguientes circuitos:

a) [5 pts]

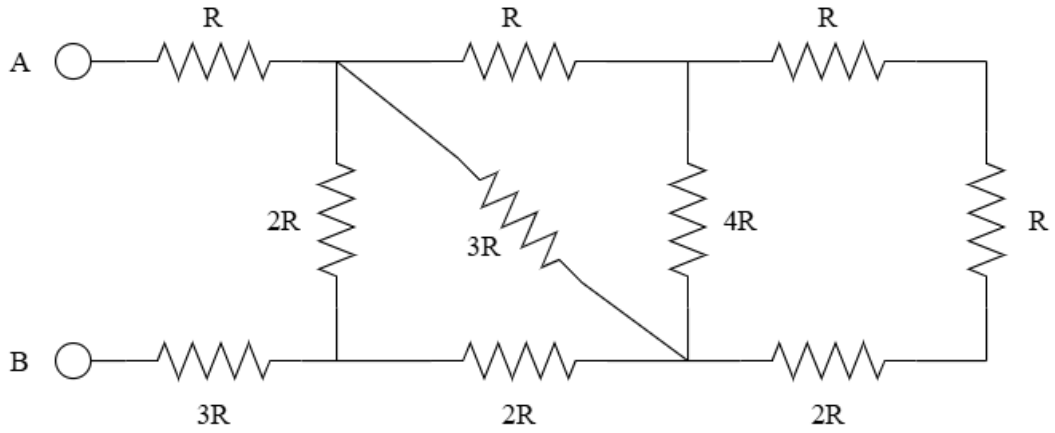


Figura 6: Circuito a) resistencia equivalente

b) [3 pts] Nota: Los puntos en negro confirman contacto eléctrico entre los cables

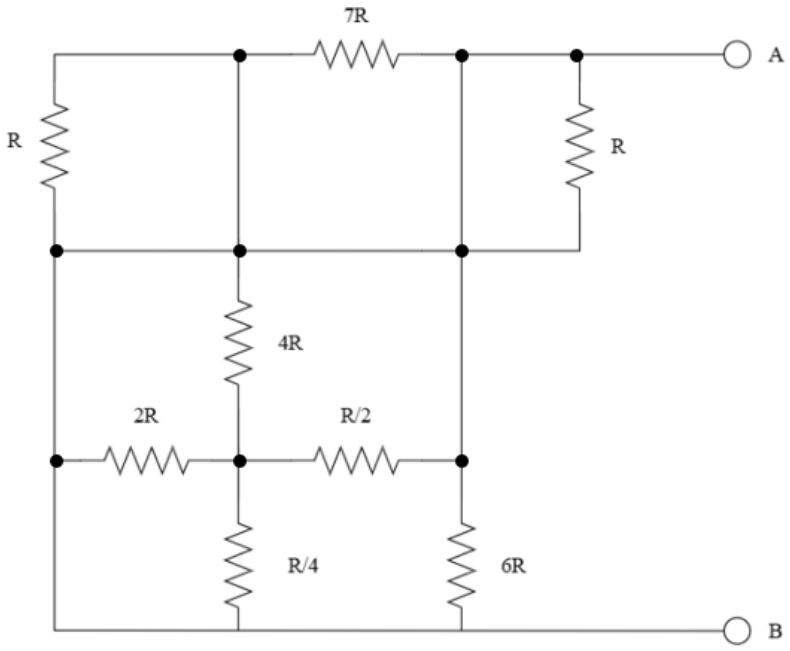


Figura 7: Circuito b) resistencia equivalente

Solución (8 pts):

a)

- **Reducción 1:** Se tienen las resistencias R, R y $2R$ en serie

$$R^* = R + R + 2R = 4R$$

- **Reducción 2:** Se tienen las resistencias $4R$ y $4R$ en paralelo

$$R^* = 4R//4R = 2R$$

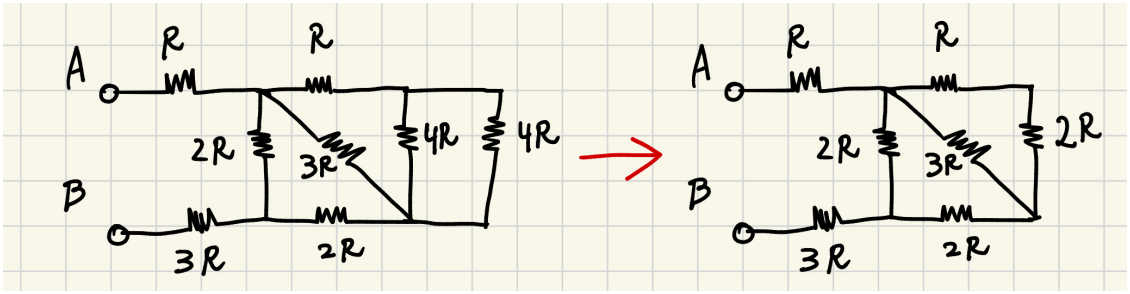


Figura 8: Reducción 1 y 2

- **Reducción 3:** Se tienen las resistencias R y $2R$ en serie

$$R^* = R + 2R = 3R$$

- **Reducción 4:** Se tienen las resistencias $3R$ y $3R$ en paralelo

$$R^* = 3R//3R = \frac{3}{2}R$$

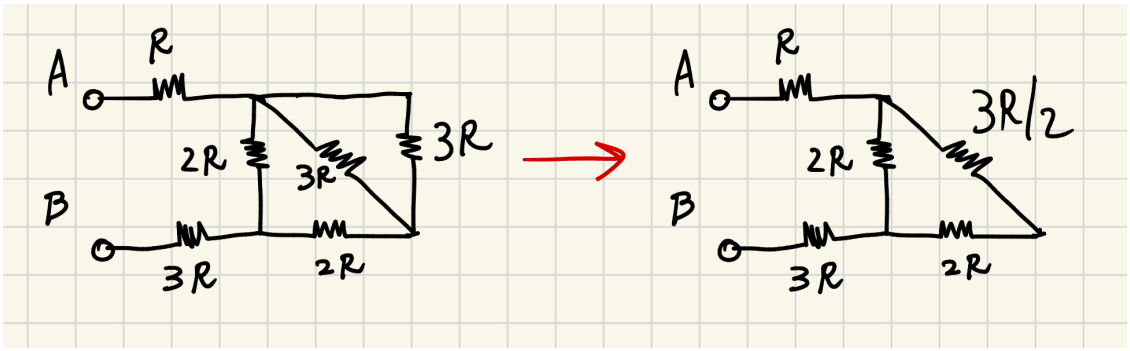


Figura 9: Reducción 3 y 4

- **Reducción 5:** Se tienen las resistencias $\frac{3}{2}R$ y $2R$ en serie

$$R^* = \frac{3}{2}R + 2R = \frac{7}{2}R$$

- **Reducción 6:** Se tienen las resistencias $2R$ y $\frac{7}{2}R$ en paralelo

$$R^* = 2R//\frac{7}{2}R = \frac{14}{11}R$$

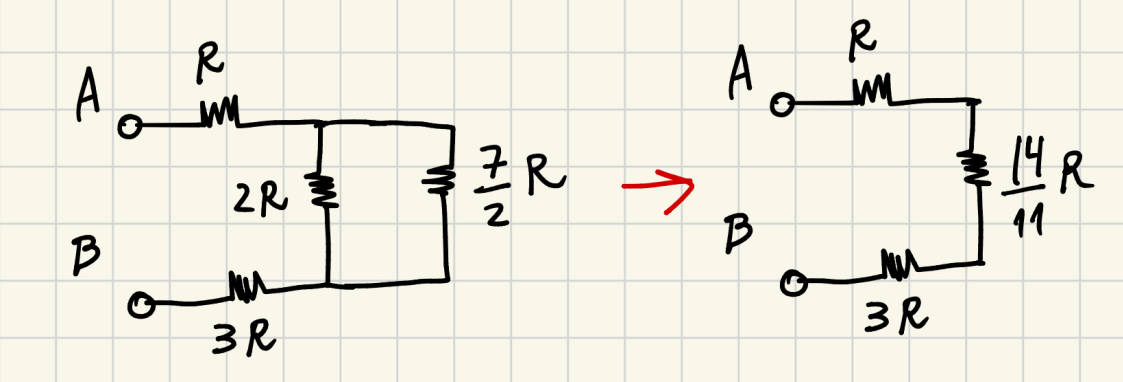


Figura 10: Reducción 5 y 6

- **Reducción 7:** Finalmente, se tiene R, $\frac{14}{11}R$ y $3R$ en serie

$$R_{AB} = R + \frac{14}{11}R + 3R = \frac{58}{11}R$$

- 1 pto por cada reducción
- 1 pto por el resultado final correcto

b) Como A y B son un mismo nodo, se tiene:

$$R_{AB} = 0$$

- 1.5 pts por resultado final
- 1.5 pts por argumentar que se trata de un mismo nodo

Problema 3: Teorema de Kenelly (12 pts)

El teorema de Kenelly muestra la equivalencia entre las configuraciones Delta (Δ) y Estrella (Y), según lo indicado en la Figura 11 y las respectivas ecuaciones:

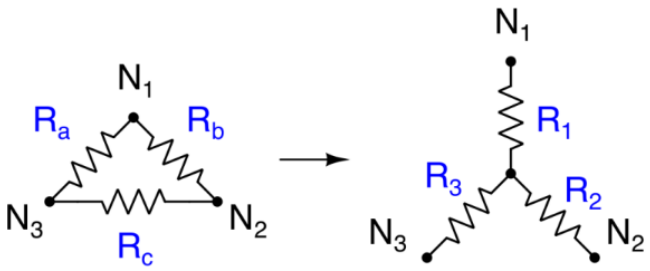


Figura 11: Equivalencia $\Delta - Y$

$$R_1 = \frac{R_a R_b}{R_a + R_b + R_c}$$
$$R_2 = \frac{R_b R_c}{R_a + R_b + R_c}$$
$$R_3 = \frac{R_a R_c}{R_a + R_b + R_c}$$

Demuestre este teorema paso a paso.

Hint: **La resistencia equivalente entre 2 terminales particulares debe ser igual en ambos modelos (entre N_1 y N_2, por ejemplo). Con esto se obtiene un sistema de 3 ecuaciones y 3 incógnitas.**

Solución (12 pts):

En primer lugar, se debe notar que (desde la figura 11) que el teorema dice que los nodos N_1, N_2 y N_3 son equivalentes en ambas configuraciones. Luego, se ve que debemos encontrar 3 expresiones: una para R_1, otra para R_2 y una tercera para R_3, es decir plantear un sistema de ecuaciones.

Se comienza por fijar tierra en el nodo N_2 y medir la resistencia vista desde el nodo N_1. Ya que la imagen 11 establece que los nodos N_1 y N_2 son iguales, las resistencias entre ambos nodos deberían ser iguales.

Para la configuración Δ, se puede ver que la resistencia vista desde N_1 con N_2 como nodo de tierra es:

$$R_{N1\ \Delta} = (R_a + R_C)//R_b = \frac{(R_a + R_c)R_b}{R_a + R_b + R_c}$$

Para la configuración Y, se puede ver que la resistencia vista desde N_1 con N_2 como nodo de tierra es:

$$R_{N1\ Y} = R_1 + R_2$$

Luego, igualando ambas resistencias, se tiene la primera ecuación del sistema de ecuaciones:

$$\frac{(R_a + R_c)R_b}{R_a + R_b + R_c} = R_1 + R_2$$

A continuación, se hacen cálculos análogos, calculando la resistencia vista desde los nodos N_2 y N_3. Ello genera el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \dfrac{(R_a + R_c)\,R_b}{R_a + R_b + R_c} = R_1 + R_2 \\ \dfrac{(R_c + R_b)\,R_a}{R_a + R_b + R_c} = R_3 + R_1 \\ \dfrac{(R_a + R_b)\,R_c}{R_a + R_b + R_c} = R_3 + R_2 \end{cases}$$

Este sistema se puede resolver con el método que el alumno estime conveniente (*software* incluido), lo cual debe estar justificado. Finalmente, se obtiene:

$$\begin{cases} R_1 = \dfrac{R_a R_b}{R_a + R_b + R_c} \\ R_2 = \dfrac{R_b R_c}{R_a + R_b + R_c} \\ R_3 = \dfrac{R_a R_c}{R_a + R_b + R_c} \end{cases}$$

- 2 pts por obtener expresión de $R_{N1\ \Delta}$ (No necesariamente se debe comenzar desde N_1)
- 2 pts por obtener expresión de $R_{N1\ Y}$ (No necesariamente se debe comenzar desde N_1)
- 2 pts por obtener la primera ecuación del sistema $R_{N1\ \Delta} = R_{N1\ Y}$
- 4 pts por obtener el sistema de 3 ecuaciones y 3 incógnitas
- 2 ptos por resolver el sistema de ecuaciones, explicando el método de solución

Problema 4: Circuito con fuente dependiente (8 pts)

Encuentre la relación $\frac{V_o}{V_s}$ para el siguiente circuito:

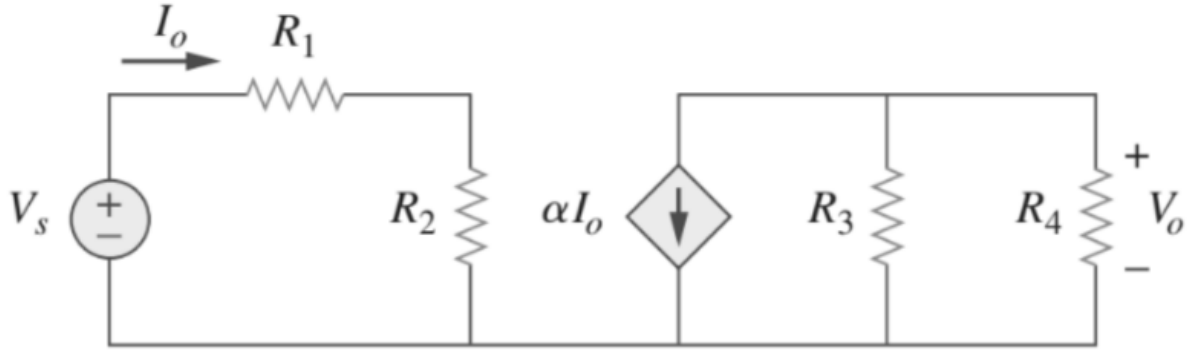


Figura 12: Circuito con fuente dependiente

Solución (8 pts):

En primer lugar, se puede observar que se tienen 2 circuitos unidos por conductor en la parte inferior. Por este cable no circula corriente, debido que esta no tiene un camino de regreso si existiese un flujo. Por lo tanto, ambos circuitos se pueden analizar de manera independiente.

Para el circuito del lado izquierdo se calcula el valor de I_o:

$$I_o = \frac{V_s}{R_1 + R_2}$$

Luego, el circuito del lado derecho se puede simplificar como una fuente de corriente dependiente y una resistencia equivalente al paralelo de R_3 y R_4. Se tiene que:

$$V_o = -\alpha I_o (R_3 // R_4) = -\alpha I_o \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}$$

Es muy importante notar que la polaridad de V_o asume una corriente que entra a la resistencia, sin embargo, la fuente de corriente tiene un sentido contrario. Por este motivo se debe añadir un signo negativo en la ecuación.

Finalmente, se reemplaza I_o en la segunda ecuación y se despeja lo pedido:

$$V_o = -\alpha \frac{V_s}{R_1 + R_2} \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}$$

$$\frac{V_o}{V_s} = -\alpha \frac{R_3 R_4}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}$$

- 3 pts por ecuación de I_o
- 3 pts por ecuación de V_o (0.5 pto de descuento por error de signo)
- 2 pts por despejar el valor de $\frac{V_o}{V_s}$

Problema 5: Potencia para voltaje y corriente sinusoidal (10 pts)

En un elemento circuital el voltaje [V] y corriente [A] están dados por:

$$v(t) = 100\sin(100\pi t)$$
$$i(t) = 50\sin(100\pi t + \phi)$$

a) Encuentre y grafique la potencia instantánea del elemento para distintos valores de ϕ (puede apoyarse de *softwares* matemáticos). Para ello, grafique 4 ciclos de onda para cada caso. Además, los gráficos deben tener una presentación clara (ejes etiquetados, curvas de grosor visible, rangos razonables, entre otros) [**5 pts**].

b) Analice y discuta los resultados obtenidos [**5 pts**].

BONUS (opcional): Potencia promedio (5 pts)

Para el elemento circuital del problema anterior demuestre que la potencia promedio en 1 ciclo de onda P está dada por:

$$P = 2500\cos(\phi) \qquad [\text{W}]$$

***Hint* 1:** El promedio X de una señal periódica $x(t)$ con periodo T está dada por:

$$X = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\ dt$$

Hint 2: Recordar que $\sin(\alpha)\sin(\beta) = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$

Solución (10 pts):

a) La potencia instantánea estará dada por:

$$p(t) = v(t)i(t) = 5000\sin(100\pi t)\sin(100\pi t + \phi)$$

En Python se grafica por separado la potencia instantánea para los valores $\phi = \{0°, 30°, 90°, 120°, 180°\}$. Sin embargo, estos valores son a modo de ejemplo, el alumno puede usar los que estime conveniente.

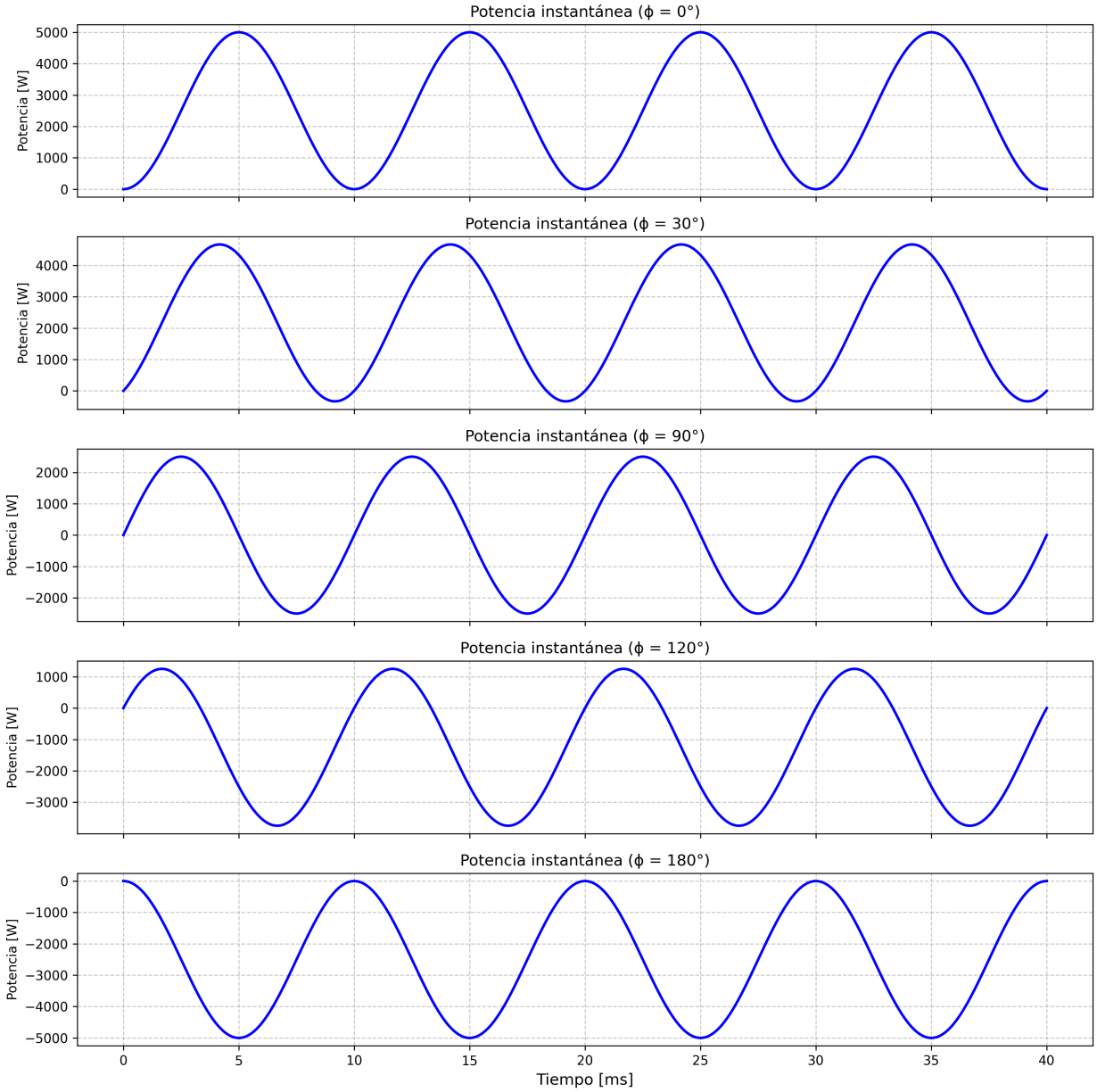


Figura 13: Potencia instantánea para distintos valores de ϕ

- 4 pts por graficar la potencia para distintos valores de ϕ
- 1 pto por presentación del gráfico (unidades de medida, grosor visible, entre otros)

b) En primer lugar, se observa que para un voltaje y corriente sinusoidal (50 Hz) se obtiene una potencia pulsante, la cual oscila al doble de frecuencia, es decir, 100 Hz. Lo anterior se ilustra a continuación para $\phi = 30°$ (no es necesario graficar):

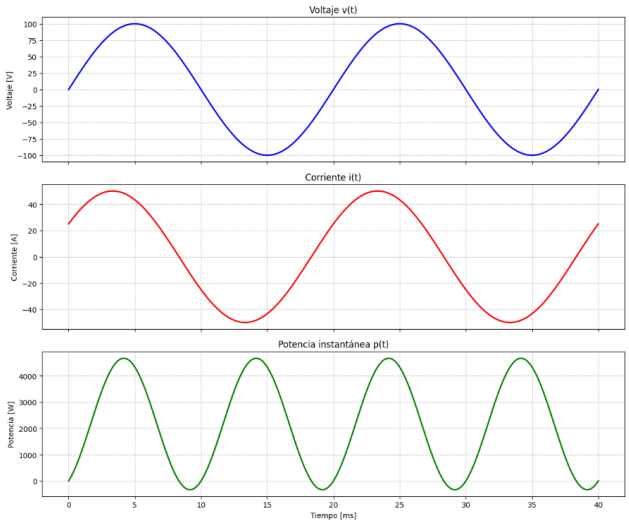


Figura 14: Ilustración de frecuencia pulsante 100 Hz

Por otro lado, se observa que para $\phi = 0°$ el signo de la potencia del elemento circuital no cambia. Sin embago, al variar el valor de ϕ existen tramos en el que la potencia instantánea se invierte de signo. Para $\phi = 180°$ el signo de la potencia se invierte completamente. Además, se observa que al variar ϕ la potencia instantánea máxima cambia. En definitiva, el valor de ϕ tiene un efecto directo en la potencia promedio vista por el elemento circuital dado.

- 2 pts por señalar carácter pulsante de la potencia instantánea
- 3 pts por analizar el efecto de ϕ

Solución BONUS (5 pts):

La potencia instantánea estará dada por:

$$p(t) = v(t)i(t) = 5000\sin(100\pi t)\sin(100\pi t + \phi)$$

Empleando ***Hint 1***:

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T 5000\sin(100\pi t)\sin(100\pi t + \phi)\ dt$$

Empleando ***Hint 2***:

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T 5000 \cdot \frac{1}{2}\left[\cos\phi - \cos(200\pi t + \phi)\right]\ dt$$

$$P = \frac{2500}{T}(\int_0^T \cos\phi\ dt - \int_0^T \cos(200\pi t + \phi)\, dt)$$

Notar que al integrar una señal sinusoidal pura en su periodo se obtiene 0:

$$\int_0^T \cos(200\pi t + \phi)\, dt = 0$$

Finalmente:

$$P = \frac{2500}{T}\int_0^T \cos\phi\ dt$$

$$P = \frac{2500}{T}\cos\phi \cdot T = 2500\cos\phi$$

- 2 pts por emplear *Hint 1* y *Hint 2*
- 3 pts por resultado final

Problema 6: Línea de distribución eléctrica (12 pts)

Suponga el diseño de una línea de distribución eléctrica modelado como un resistencia de línea R_{linea}.

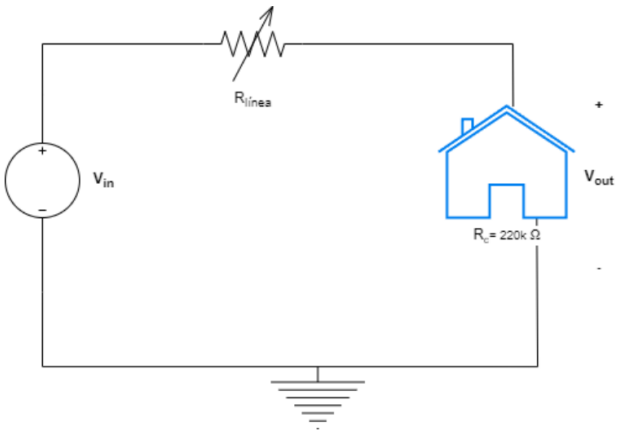


Figura 15: Diagrama circuito con fuente de voltaje

En la figura adjunta se presenta un circuito que representa una fuente de poder de 220 V que suministra a una casa. La casa se modela como una resistencia de 220 kΩ. El objetivo de diseño es decidir la resistencia (R_{linea}) de los cables del circuito que maximice la potencia suministrada a la casa.

a) Realice un gráfico P_{out} v/s R_{linea} con el apoyo de *software* computacional (e.g, Python o Julia). Discuta los resultados obtenidos [**5 pts**].

Suponga que la topología del circuito cambia a una fuente de corriente y una resistencia en paralelo, y ahora se busca un R_{linea} para maximizar la **corriente** en la casa.

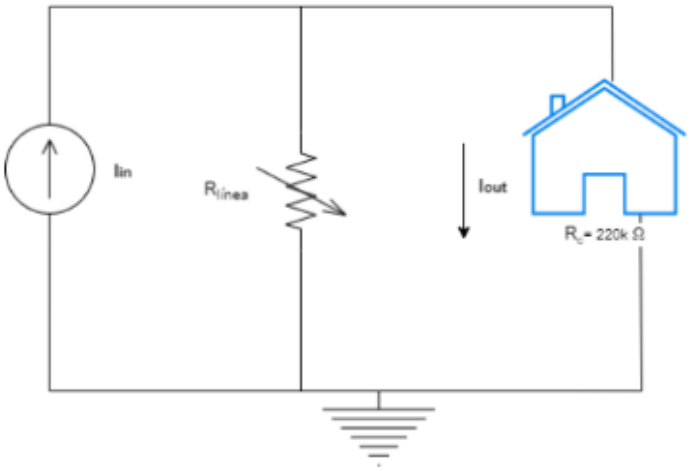


Figura 16: Diagrama circuito con fuente de corriente

b) Realice un gráfico I_{out} v/s I_{in} con el apoyo de *software* computacional (e.g, Python o Julia). Discuta el efecto de R_{linea} **[5 pts]**.

c) Suponga que la casa puede consumir como máximo una potencia P_{max}, encuentre el valor mínimo de R_{linea} para cumplir este requerimiento **[2 pts]**.

Solución (12 pts):

a) Se calcula la potencia de la casa $R_{out} = 220$ kΩ:

$$P_{out} = I^2 R_{out} = (\frac{V}{R_{out} + R_{linea}})^2 \cdot R_{out}$$

$$P_{out} = \frac{V^2}{(R_{out} + R_{linea})^2} R_{out}$$

$$P_{out} = \frac{(220\ V)^2}{(220000\ \Omega + R_{linea})^2} \cdot 220000\ \Omega$$

Analizando el gráfico, la potencia cae a medida que R_{linea} sube, por lo que podemos suponer que lo ideal es que este valor sea cercano a 0 Ω. En condiciones no ideales, se buscaría que el valor de R_{linea} sea lo más pequeño posible, para que la caída de voltaje en la red de distribución sea la menor posible.

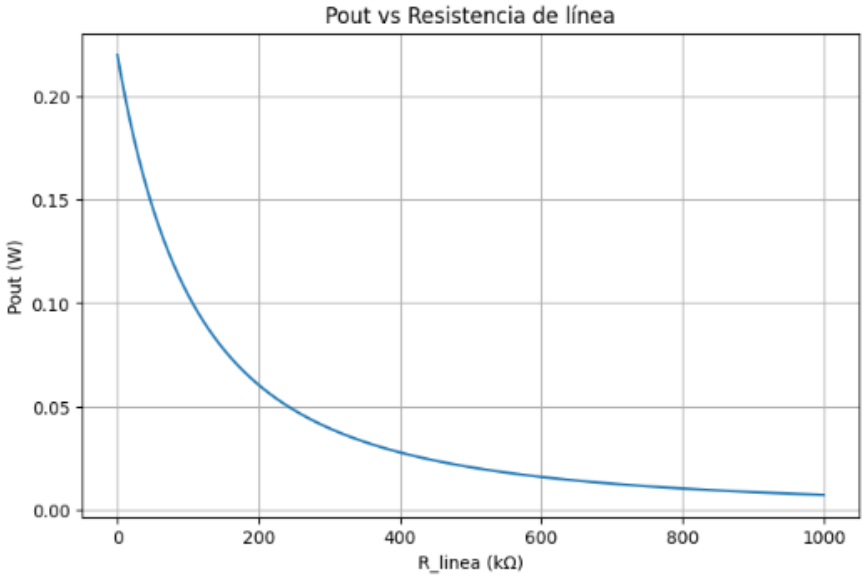


Figura 17: P_{out} v/s R_{linea}

- 2 pts por obtener fórmula de P_{out}
- 2 pts por el gráfico P_{out} v/s R_{linea}
- 1 pto por discutir resultados obtenidos

b) Se calcula el voltaje V_{out} en la resistencia equivalente:

$$V_{out} = I_{in}(R_{out}//R_{linea})$$

Luego, se determina I_{out} por ley de Ohm:

$$I_{out} = \frac{V_{out}}{R_{out}} = I_{in}\frac{R_{out}//R_{linea}}{R_{out}}$$

$$I_{out} = I_{in}\frac{R_{linea}}{R_{linea} + R_{out}}$$

$$I_{out} = I_{in}\frac{R_{linea}}{R_{linea} + 220000\ \Omega}$$

Se observa que entre I_{out} e I_{in} existe una relación lineal con pendiente $\frac{R_{linea}}{R_{linea}+R_{out}}$. A continuación, se muestra una ilustración gráfica:

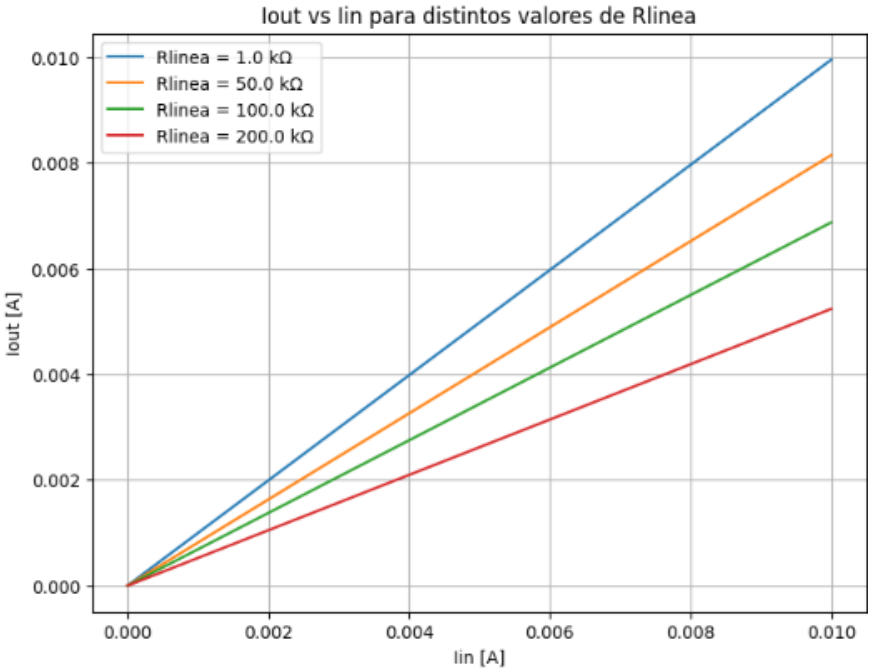


Figura 18: I_{out} v/s I_{in}

Notamos que a medida que R_{linea} aumenta, la pendiente del gráfico también aumenta, por lo que para maximizar la corriente y por lo tanto la potencia, R_{linea} debería ser infinita (o valores muy grandes en condiciones no ideales).

- 2 pts por obtener fórmula de I_{out}
- 2 pts por el gráfico I_{out} v/s I_{in}
- 1 pto por discutir resultados obtenidos

c)

- **Caso 1: Alumno usa circuito serie (Figura 15)**

$$P_{out} = R_{out} I_{out}^2 = R_{out}(\frac{V}{R_{out} + R_{linea}})^2$$

$$\frac{P_{out}}{R_{out} V^2} = \frac{1}{(R_{out} + R_{linea})^2}$$

$$\frac{R_{out} V^2}{P_{out}} = (R_{out} + R_{linea})^2$$

$$R_{linea} = \sqrt{\frac{R_{out} V^2}{P_{out}}} - R_{out}$$

$$\boxed{R_{linea} \geq \sqrt{\frac{R_{out} V^2}{P_{max}}} - R_{out}}$$

- **Caso 2: Alumno usa circuito paralelo (Figura 16)**

$$P_{out} = R_{out} I_{out}^2 = R_{out}(I_{in} \frac{R_{linea}}{R_{linea} + R_{out}})^2$$

$$P_{out} = I_{in}^2 \frac{R_{out} R_{linea}^2}{(R_{linea} + R_{out})^2}$$

$$\frac{P_{out}}{R_{out} I_{in}^2} = \frac{R_{linea}^2}{(R_{linea} + R_{out})^2}$$

$$\sqrt{\frac{P_{out}}{R_{out} I_{in}^2}} = \frac{R_{linea}}{R_{linea} + R_{out}}$$

$$R_{linea} = R_{out} \frac{\sqrt{\frac{P_{out}}{R_{out} I_{in}^2}}}{1 - \sqrt{\frac{P_{out}}{R_{out} I_{in}^2}}}$$

$$\boxed{R_{linea} \leq R_{out} \frac{\sqrt{\frac{P_{max}}{R_{out} I_{in}^2}}}{1 - \sqrt{\frac{P_{max}}{R_{out} I_{in}^2}}}}$$

- 1 pto por plantear correctamente ecuación de P_{out}
- 1 pto por despejar correctamente R_{linea}