IEE2123-1 Circuitos Eléctricos - 1er Semestre 2018
Profesor: Daniel Olivares Q.
Ayudantes: Christian Escobar Nicolás Garrido Alonso Lizana
Maximiliano Rivera Rodrigo Troncoso

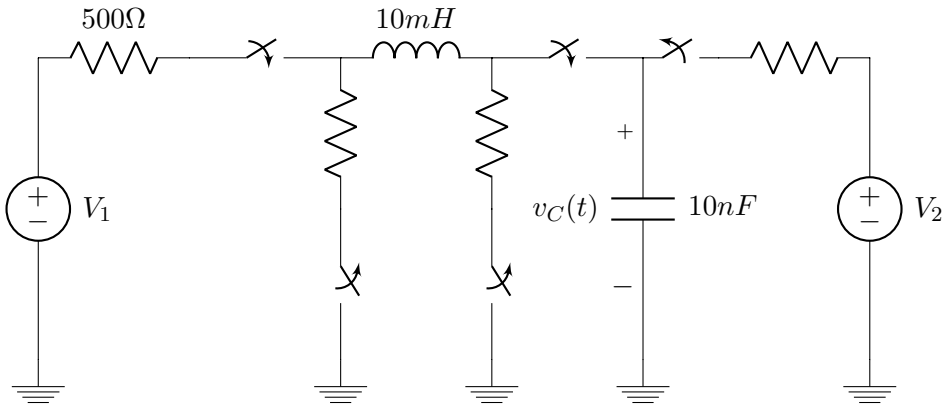
Tarea 6

Circuitos de segundo orden, fasores e impedancia
Fecha de Entrega: Día XX de XXXXX hasta las 23:59 horas.
Mail ayudante encargado: nagarrido@uc.cl

- La Tarea debe ser subida en formato .pdf al Siding, junto a los archivos adjuntos necesarios en un formato .rar o .zip.
- No se aceptarán fotografías de tareas escritas a mano. Solo serán revisadas tareas escritas en editor de texto (imágenes, diagramas, esquemáticos, etc. podrán ser hechas a mano).
- Existirá un bono de +0.5 pts. por tarea si se escribe en LaTeX.
- Evite entregar tareas de más de 10 MB de peso debido a imágenes de alta resolución.

1. Circuito de segundo orden

Considere que en el siguiente circuito los switch han estado as[i desde hace mucho tiempo:



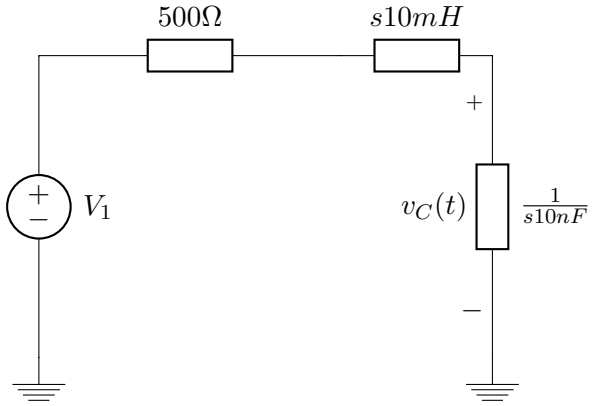
En $t = 0$ todos los switch cambian su estado, como se muestra en el diagrama. Encuentre $v_c(t)$ para una entrada de escalón unitario y $V_2 = 5V$.

Solución

Como el circuito ha estado así por mucho tiempo:

$$i_L(0) = 0 \qquad\qquad v_C(0) = V_2$$

El circuito en $t > 0$, ya reemplazando las impedancias correspondientes:



Con análisis de malla:

$$V_1 = I_R \cdot R + I_L \cdot sL + I_C \cdot \frac{1}{sC}$$

Pero sabemos que $I_R = I_L = I_C$, y $V_C = \frac{1}{sC} I_C$. Entonces:

$$V_1 = s^2 LC \cdot V_C + sRC \cdot V_C + V_C$$

Se divide por LC y queda:

$$\frac{d^2 v_c(t)}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dv_c(t)}{dt} + \frac{1}{LC} v_c(t) = \frac{V_1}{LC} \tag{1}$$

Sabemos que $2\omega_0\zeta = \frac{R}{L}$ y $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$. Entonces:

$$\zeta = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}} = 0{,}25 \qquad\qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 100 \text{ krad/s}$$

Notamos de inmediato que $\zeta < 1$, por lo que la respuesta será sub-amortiguada. De lo visto en clases sabemos que las raíces del polinomio característico son:

$$r_{1,2} = -\zeta\omega_0 \pm j\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}$$

Entonces, la respuesta a las condiciones iniciales será:

$$v_h(t) = e^{-\zeta\omega_0 t}\left(k_1 \cos\left(\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}t\right) + k_2 \sin\left(\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}t\right)\right) \tag{2}$$

Para la solución particular se propone $v_p(t) = \alpha V_1$ (notar que las derivadas son impulsos, por lo que no nos interesan para t¿0). Reemplazando en la ED:

$$\frac{1}{LC}\alpha V_1 = \frac{1}{LC} V_1 \Rightarrow \alpha = 1 \tag{3}$$

Entonces:

$$v_c(t) = v_h(t) + v_p(t) = e^{-\zeta\omega_0 t}\left(k_1 \cos\left(\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}t\right) + k_2 \sin\left(\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}t\right)\right) + u(t) \tag{4}$$

Reemplazamos $t = 0^+$:

$$v_c(0) = V_2 = k_1 + 1 \Rightarrow k_1 = V_2 - 1$$

Se deriva y se reemplaza $t = 0^+$. Hay que considerar que $C\frac{dv_c(0)}{dt} = i_C(0) = i_L(0)$:

$$Cv_c'(0) = i_L(0) = -C\zeta\omega_0 k_1 + Ck_2\omega_0\sqrt{1-\zeta^2} = 0 \Rightarrow k_2 = k_1\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} = 0{,}258 \cdot (V_2 - 1)$$

Ahora reemplazando $V_2 = 5$ y el resto de los valores, el resultado final es:

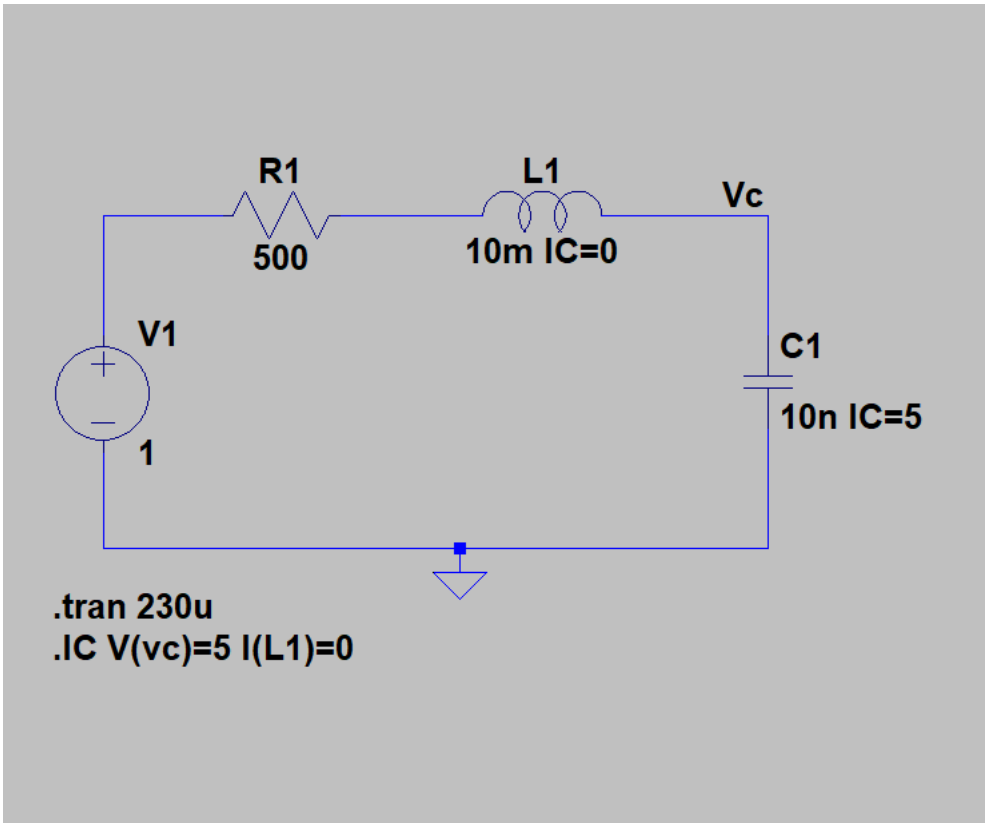
$$v_c(t) = e^{-25\cdot 10^3 t}\left(4\cos\left(9{,}68\cdot 10^4 t\right) + 1{,}291\sin\left(9{,}68\cdot 10^4 t\right)\right) + u(t) \tag{5}$$

2. Simulación

Averigüe como implementar condiciones iniciales en LTSpice y simule el circuito de la pregunta anterior. Luego grafique su respuesta en algún programa de computación científico y compare ambos resultados.

2.1. Solución

El circuito en SPICE es el siguiente:



Para el gráfico se utilizó MatLab. La simulación junto al gráfico están a continuación:

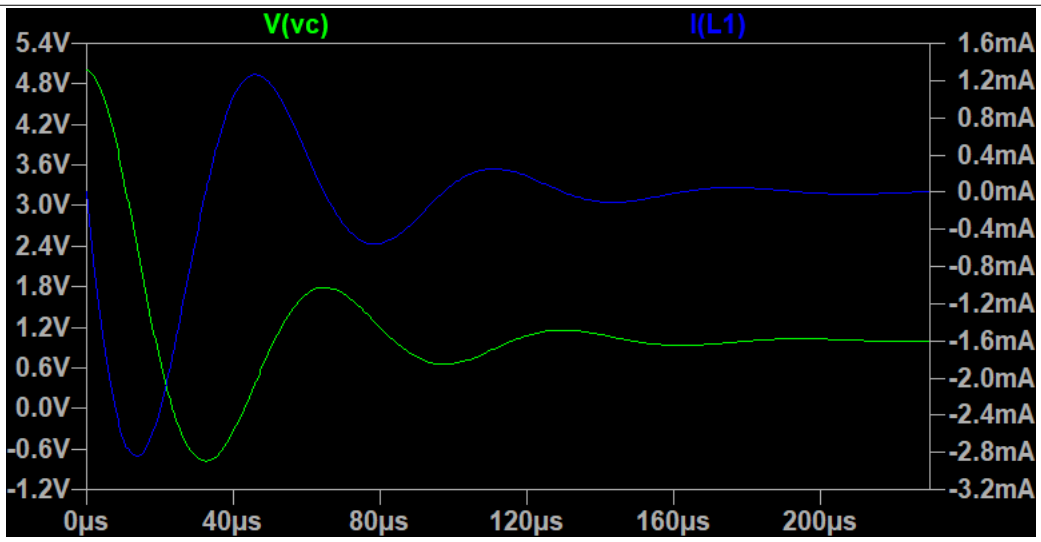


Figura 1: Simulación

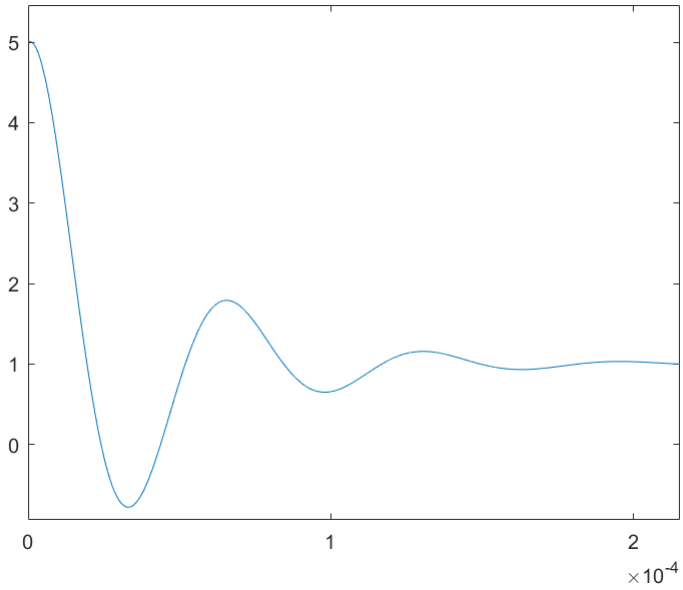
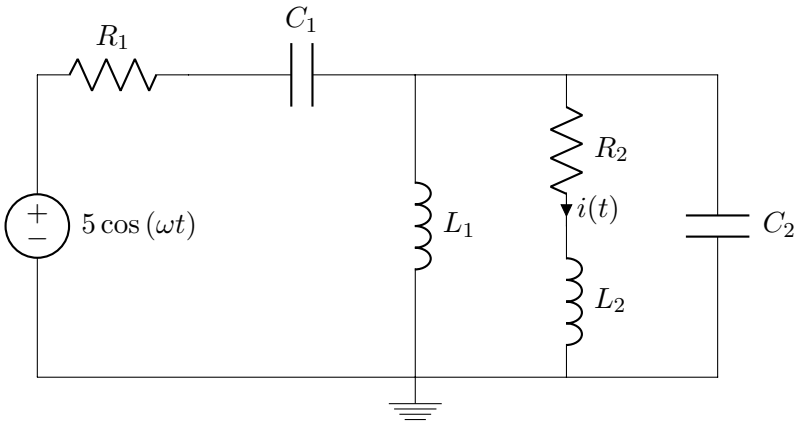


Figura 2: Resultado en MatLab

Se puede ver que la respuesta analítica coincide con alto grado de exactitud con la respuesta de la simulación. En la simulación también se gracifó la corriente, para verificar que la condición inicial $i_C(0) = 0$ se cumpliera.

3. Fasores e impedancia

Encuentre la respuesta temporal $i(t)$ del siguiente circuito en régimen permanente para una frecuencia de 200Hz. Considere $R_1 = 10\Omega$, $R_2 = 200\Omega$ $C_1 = 300\mu F$, $C_2 = 20\mu F$, $L_1 = 600\mu H$ y $L_2 = 200\mu H$:



Solución

Primero tenemos que saber cual es la corriente por el circuito. Conviene escribir las impedancias en formato cartesiano para reducirlas, y se encuentra la impedancia equivalente:

$$Z_{eq} = R_1 + \frac{1}{j\omega C_1} + \ j\omega L_1 || (R_2 + j\omega L_2) || \frac{1}{j\omega C_2} = 10{,}0309 - 5{,}1390i = 11{,}2707\angle -27{,}13 \tag{6}$$

Se ve que domina una impedancia capacitiva. Notar que la última expresión está en formato polar, para poder operar con multiplicaciones de forma sencilla. Luego, la corriente es:

$$I' = \frac{V}{Z_{eq}} = 0{,}3948 + j0{,}2023 = 0{,}4436\angle 27{,}13 \tag{7}$$

Ahora se utiliza un divisor de corriente:

$$I = I' \frac{j\omega L_1 || \frac{1}{j\omega C_2}}{j\omega L_1 || \frac{1}{j\omega C_2} + R_2 + j\omega L_2} \approx j0{,}0038 \cdot 0{,}4436\angle 27{,}13 = 0{,}0017\angle 117{,}13 \tag{8}$$

Entonces, la respuesta temporal será:

$$i(t) = 0{,}0085\cos(2\pi \cdot 200t + 117{,}13) \tag{9}$$