Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ingeniería Eléctrica
IEE2123 – Circuitos Eléctricos

# Ayudantía 9

Profesor David Watts – 2023-1
Ayudante José Aravena (jos.aravena@uc.cl)

## Problema 1

Considere un sistema trifásico con dos cargas balanceadas en configuración estrella conectadas en paralelo, las cargas son descritas por los siguientes datos:

- Carga 1: Potencia de 15[kW] con factor de potencia 0.6 en atraso.
- Carga 2: Potencia de 10[kVA] con factor de potencia 0.8 en adelanto.

Se sabe que ambos consumos se encuentran a un voltaje de fase balanceado de 480[V] y están conectados a un generador por medio de una línea de transmisión de impedancia $Z_{line} = 0.4 + j1.5[\Omega]$ por fase.

a) Dibuje el triángulo de potencia para ambas cargas por separado y en conjunto. Determine el factor de potencia de las cargas en conjunto y si este se encuentra en adelanto o atraso.

b) Determine la corriente de línea que entrega el generador y las pérdidas en la línea de transmisión.

c) Si ahora se conecta un banco de capacitores en configuración delta en paralelo con los consumos. ¿Qué valor de capacitancia se necesita en cada pierna para lograr un factor de potencia total 0.95 en atraso? Asuma $f = 50[\text{Hz}]$.

## Solución:

a) A partir de los datos de las cargas se puede determinar la potencia aparente directamente. Para la primera carga se tiene:

$$fp_1 = \frac{P_1}{|S_1|} \rightarrow |S_1| = \frac{15k}{0.6} = 25 \text{ [kVA]}$$

El ángulo a partir del factor de potencia:

$$fp_1 = \cos\phi_1 \rightarrow \phi_1 = 53.13^\circ$$

Por lo tanto, para la primera carga:

$$S_1 = 25\angle 53.13^\circ \text{ [kVA]} = 15 + j20 \text{ [kVA]}$$

De manera similar para la segunda carga, el ángulo de la potencia es negativo puesto que se tiene una carga capacitiva.

$$\phi_2 = -\cos^{-1}(fp_2) = -36.87^\circ$$

$$S_2 = 10\angle -36.87^\circ \text{ [kVA]} = 8 - j6 \text{ [kVA]}$$

Si ahora se consideran ambas cargas en conjunto, se deben sumar las potencias complejas.

$$S_T = S_1 + S_2 = 23 + j14 \text{ [kVA]}$$

El factor de potencia se puede obtener a partir del triangulo de potencia o bien, su forma polar

$$\phi_T = \tan^{-1}\left(\frac{14}{23}\right) = 31.33^\circ$$

$$fp_T = \cos\phi_T = 0.854$$

b) Conociendo las potencias y el voltaje de cada consumo se puede determinar la corriente de línea. Se entrega el voltaje de fase y la potencia que consume cada carga, por lo que se debe convertir el circuito para hacer el análisis de cada fase por separado. Como el sistema se encuentra balanceado y las cargas en estrella se tiene para la fase a

$$V_{an} = 480\angle 0^\circ \text{ [V]}$$

La corriente para las cargas en conjunto:

$$I_a^* = \frac{S_T/3}{V_{an}} \rightarrow I_a = 18.69\angle -31.33^\circ \text{ [A]}$$

Las demás fases al estar balanceado:

$$I_b = 18.69\angle -151.33^\circ \text{ [A]}$$

$$I_c = 18.69\angle 88.67^\circ \text{ [A]}$$

Luego, las pérdidas en la línea de transmisión vienen dadas por la parte resistiva de la impedancia de esta.

$$P_{line} = 3|I_a|^2 R_{line}$$

$$P_{line} = 0.419 \text{ [kW]}$$

c) Para lograr un factor de potencia 0.95 se requiere disminuir la potencia reactiva del consumo por medio de capacitores manteniendo la potencia activa constante. El nuevo valor de potencia reactiva para que se cumplan estas condiciones viene dado por el nuevo factor de potencia:

$$fp_{new} = 0.95 \rightarrow \phi_{new} = 18.19°$$

Por lo tanto:

$$Q_{new} = P \cdot \tan(\phi_{new}) = 7.557 \text{ [kVar]}$$

Así, los reactivos que debe inyectar el banco de capacitores son:

$$Q_c = Q_{new} - Q_{old} = -6.443 \text{ [kVAr]}$$

A partir de este valor, se puede determinar el valor de los capacitores, como se pide que la conexión sea en delta:

$$|V_{ff}| = \sqrt{3}|V_{fn}| = 831.28 \text{ [V]}$$

$$S_c = jQ_c = 3\frac{|V_{ff}|^2}{Z_c^\star}$$

$$jQ_c = 3\frac{|V_{ff}|^2}{jX_c} \rightarrow X_c = -3\frac{|V_{ff}|^2}{Q_c}$$

$$X_c = 321.83 \text{ [}\Omega\text{]}$$

Finalmente, sabiendo que la reactancia de un capacitor es $X_c = 1/\omega C$ y el sistema opera a 50 [Hz], el valor de los capacitores en delta es:

$$C_\Delta = \frac{1}{2\pi f X_c} = 9.89 \text{ [}\mu\text{F]}$$

# Problema 2

Copnsidere el circuito de la siguiente figura:

a) Determine las corrientes de línea (magnitud y fase) y la magnitud del voltaje de línea en la carga.
b) Las corrientes de la delta en la fuente.

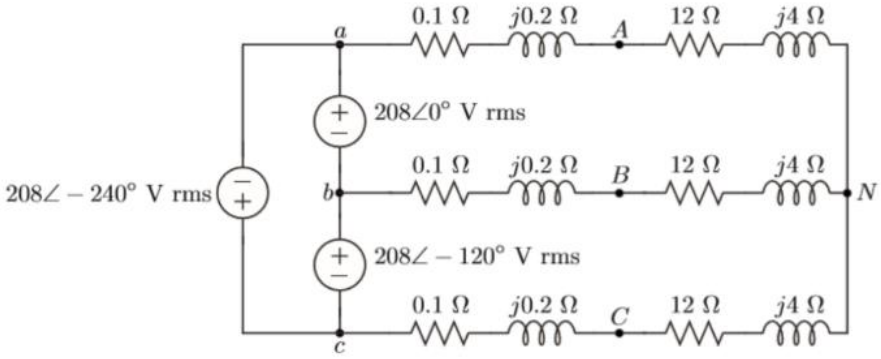


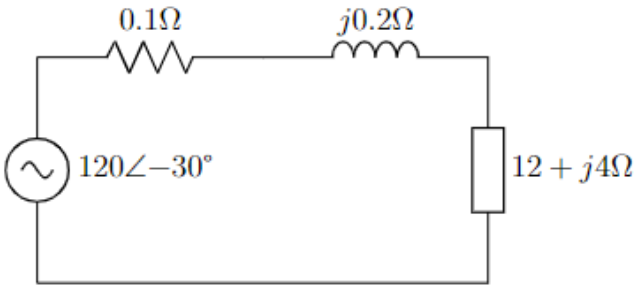

Figura 1: Sistema trifásico balanceado.

## Solución

a) En primer lugar, se transforma la fuente en delta a una configuración en estrella para analizar el circuito en una sola fase.

$$V_{aN} = \frac{208}{\sqrt{3}} \angle 0° - 30° = 120 \angle -30°$$

Como el circuito está balanceado se tiene el siguiente circuito equivalente para la fase $a$.




La corriente de línea por ley de Ohm:

$$Z_a = 0.1 + j0.2 + 12 + j4 = 12.8 \angle 19.14° \ [\Omega]$$

$$I_a = \frac{V_a N}{Z_a} = 9.375 \angle -49.14° \ [\text{A}]$$

Para las fases $b$ y $c$:

$$I_b = 9.375 \angle -169.14° \ [\text{A}]$$

$$I_c = 9.375\angle 70.86^\circ \text{ [A]}$$

Luego, la magnitud del voltaje en la carga:

$$V = I \cdot Z_L = 118.5 \text{ [V]}$$

b) En secuencia positiva, la corriente de línea atrasa en 30° a su corriente de fase. Además:

$$\frac{|I_L|}{|I_F|} = \sqrt{3}$$

Por lo que las corrientes de fase, (corrientes de la delta) serían respectivamente:

$$I_{ab} = \frac{I_a}{\sqrt{3}}\angle -49.14^\circ - 30^\circ = 5.41\angle -19.14^\circ \text{ [A]}$$

$$I_{bc} = 5.41\angle -139.14^\circ \text{ [A]}$$

$$I_{ca} = 5.41\angle 100.86^\circ \text{ [A]}$$

# Problema 3

El sistema trifásico de la figura está operando en condiciones normales en donde se sabe que la tensión de las cargas se encuentra regulada de forma que en todo momento $V_{AB} = 480\sqrt{3}\angle 0°[\text{V}]$. Si en un momento determinado se produce una falla en la fase c, como se muestra mediante el cable rojo. Determine el voltaje $V_{Nn}$ entre los neutros y las corrientes de línea. Considere que la impedancia de falla es $Z_{falla} = 20 + j15[\Omega]$ y una impedancia de retorno de $Z_n = 1.5 + j5[\Omega]$.

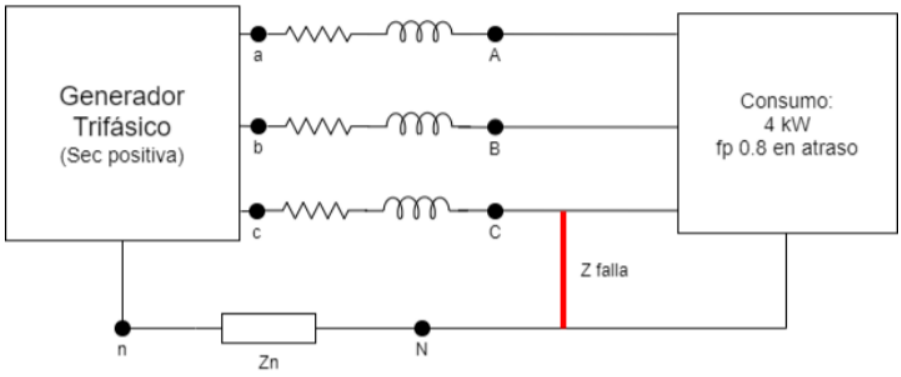



Figura 2: Circuito trifásico desbalanceado.

## Solución

Para conocer el voltaje en el neutro es necesario conocer las impedancias del consumo, estos valores se pueden obtener analizando el sistema antes de la falla. Se puede apreciar que el consumo se encuentra conectado en estrella al tener conexión con el neutro, analizando la fase $a$ se puede obtener la impedancia de la fase.

$$V_{An} = 480\angle -30° \text{ [V]}$$

La potencia aparente total del consumo inductivo:

$$S_l = 5\angle 36.87° \text{ [kVA]}$$

Luego, este valor es equivalente a:

$$S_l = 3V_{An}I_a^*$$

Pero la corriente de línea es a su vez:

$$I_a = \frac{V_{An}}{Z_Y}$$

Por lo tanto:

$$S_l = 3V_{An} \cdot \left(\frac{V_{An}}{Z_Y}\right)^*$$

$$S_l = 3\frac{|V_{An}|^2}{Z_Y^*}$$

Despejando la impedancia se tiene:

$$Z_Y^* = 138.24\angle -36.87^\circ \ [\Omega]$$

$$Z_Y = 138.24\angle 36.87^\circ \ [\Omega] = 110.6 + j82.94 \ [\Omega]$$

Como el sistema se encontraba balanceado antes de la falla, la impedancia es la misma para las tres fases.

**Post falla:** Una vez ocurrida la falla, las impedancias de las fases a y b se mantienen iguales mientras que la de c cambia debido al paralelo que se forma entre ella y la impedancia de falla. De esta manera se tiene:

$$Z_a = Z_b = 138.24\angle 36.87^\circ \ [\Omega]$$

$$Z_c = Z_Y // Z_{falla} = \frac{(138.24\angle 36.87^\circ) \cdot 25\angle 36.87^\circ}{110.6 + j82.94 + 20 + j15} = 21.17\angle 36.87^\circ \ [\Omega]$$

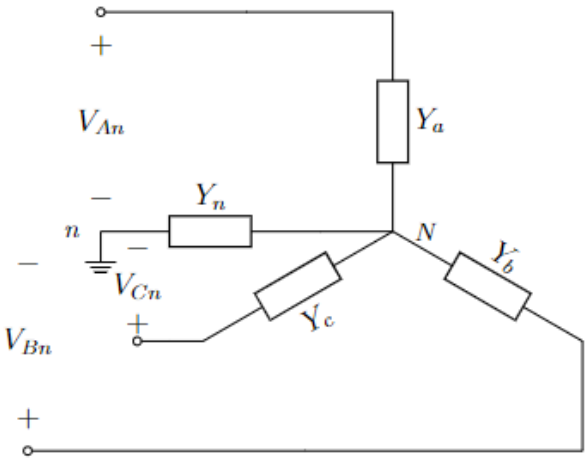
Por comodidad, se trabajará con las admitancias del circuito. Transformando los valores anteriores se tienen para cada fase y para el neutro:

$$Y_a = Y_b = 7.233\angle -36.87^\circ \ [\text{mS}]$$

$$Y_c = 47.23\angle -36.87^\circ \ [\text{mS}]$$

$$Y_n = 5.22\angle -73.3^\circ \ [\text{mS}]$$

El circuito de la carga desbalanceada en estrella con la conexión de neutros y las admitancias del sistema:

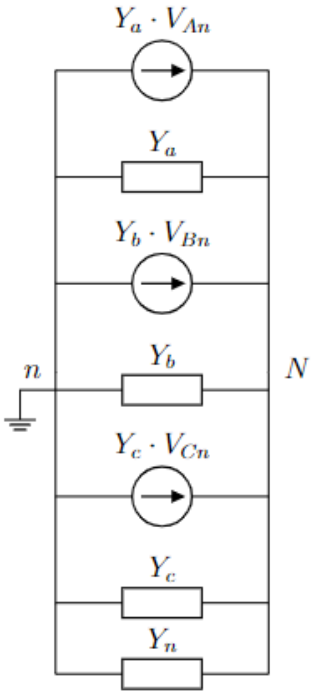



Dado que el voltaje en la carga se encuentra regulado, el voltaje fase neutro que entrega la fuente no cambia y el desbalance del circuito ocurre exclusivamente por un cambio en las impedancias de la carga en estrella. Debido al desbalance de las cargas, la suma de corrientes

de cada fase en el neutro $N$ deja de ser 0, por lo que ya no se puede asumir $V_{Nn} = 0$ [V]. Fijando la fase a como la referencia se tiene:

$$V_{An} = 480\angle 0° \text{ [V]} \qquad V_{Bn} = 480\angle -120° \text{ [V]} \qquad V_{Cn} = 480\angle 120° \text{ [V]}$$

Se transforman las fuentes de voltaje en fuentes de corriente para facilitar el análisis post falla, el circuito equivalente que refleja la situación anterior se muestra a continuación.




Por KCL en $N$, se tiene la siguiente ecuación.

$$V_{Nn}(Y_a + Y_b + Y_c + Y_n) = Y_a V_{An} + Y_b V_{Bn} + Y_c V_{Cn}$$

Despejando se encuentra el voltaje entre neutros.

$$V_{Nn} = \frac{Y_a V_{An} + Y_b V_{Bn} + Y_c V_{Cn}}{Y_a + Y_b + Y_c + Y_n}$$

$$V_{Nn} = 78.7\angle 147.78° \text{ [V]}$$

Finalmente, las corrientes de línea vienen dadas por:

$$I_a = (V_{An} - V_{Nn})Y_a = 3.97\angle -41.25° \text{ [A]}$$

$$I_b = (V_{Bn} - V_{Nn})Y_b = 3.54\angle -147.62° \text{ [A]}$$

$$I_c = (V_{Cn} - V_{Nn})Y_c = 19.46\angle 78.02° \text{ [A]}$$

# Problema 4

Un sistema trifásico de secuencia positiva se ve afectado durante una manifestación por un antisocial, quien arroja una cadena de impedancia $20 + j10$ [$\Omega$] al alambrado público justo frente a los empalmes de los clientes; resultando en que esta cae conectando la fase "c" con el conductor de retorno (o neutro). Considere que la línea de retorno tiene una impedancia de $Z_n = 0.2 + j2$ [$\Omega$], mientras que la impedancia de las fases a, b y c de las líneas se asume nula para simplificar el problema. El empalme de los clientes está compuesto por dos cargas:

- Carga 1: Impedancia por fase de $Z_1 = 100 + j50$ [$\Omega$] y está conectada en estrella.
- Carga 2: Impedancia por fase de $Z_2 = 80 + j40$ [$\Omega$] y está conectada en estrella.

Según la situación antes descrita y sabiendo que el voltaje de línea en los bornes del generador es $V_{ab} = 34641\angle 0°$ [V], calcule paso a paso lo siguiente:

a) Un diagrama físico del problema o circuito, incluyendo las denominaciones de cada punto que Ud. elija, (a, a', A, n, N, etc.), la cadena y las definiciones de las variables a utilizar (corrientes y voltajes).

b) Diagrama fasorial de voltajes fase-fase y fase-neutro en la carga, presentando sus valores en magnitud y ángulo.

c) Un desarrollo paso a paso (sin memorizar nada ni aplicar fórmulas) que permita calcular el voltaje entre los neutros del generador y carga usando las **ADMITANCIAS** y transformación de fuentes hasta llevar el circuito a su mínima expresión.

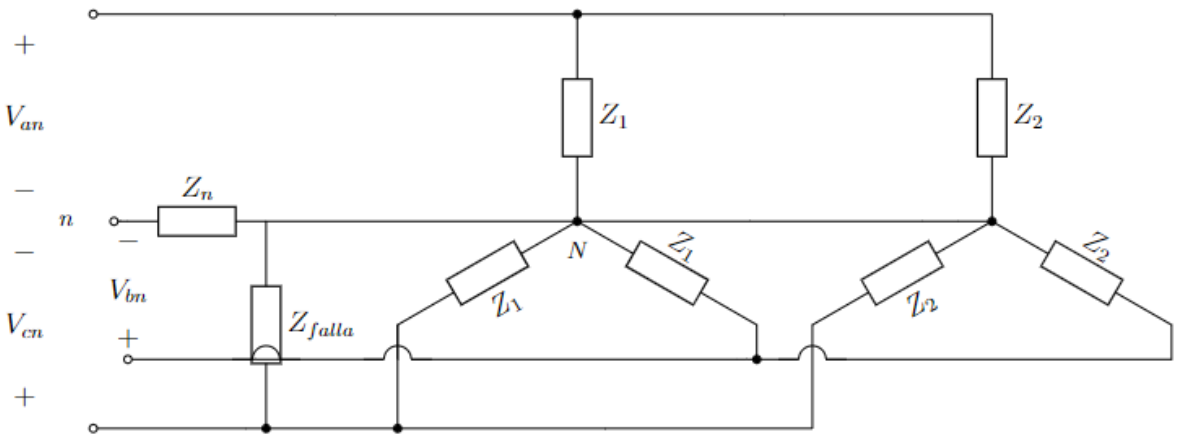
d) La expresión y el valor (en magnitud y ángulo) de las corriente de retorno, de la cadena y de línea en cada una de sus fases.

e) Un desarrollo paso a paso (sin memorizar nada ni aplicar fórmulas) que permita calcular el voltaje fase-neutro de la carga en las fases c y b.

f) Comente breve y precisamente que pasaría con los voltajes y y corrientes que ha calculado, si antes de la falla si antes de la falla hurtan un tramo de la línea de retorno (o neutro) cerca del extremo del generador.

**Nota:** Recuerde que las corrientes y voltajes siempre se **deben** presentar en forma polar.

a) El circuito del sistema trifásico es el siguiente:




b) El diagrama fasorial de los voltajes se realiza para el caso balanceado, antes de la falla. (**Nota:** Si usted asumió que se preguntaba para el caso post-falla, se le entregará puntaje de todas formas).

Con el dato del enunciado respecto al voltaje fase fase $V_{ab}$ del generador, se deduce que los voltajes fase neutro tienen el siguiente valor (dividir por $\sqrt{3}$ y desfasar en $30^o$):

$$V_{an} = 20\angle -30^o[kV] \quad V_{bn} = 20\angle -150^o[kV] \quad V_{cn} = 20\angle 90^o[kV]$$

El diagrama fasorial propuesto:

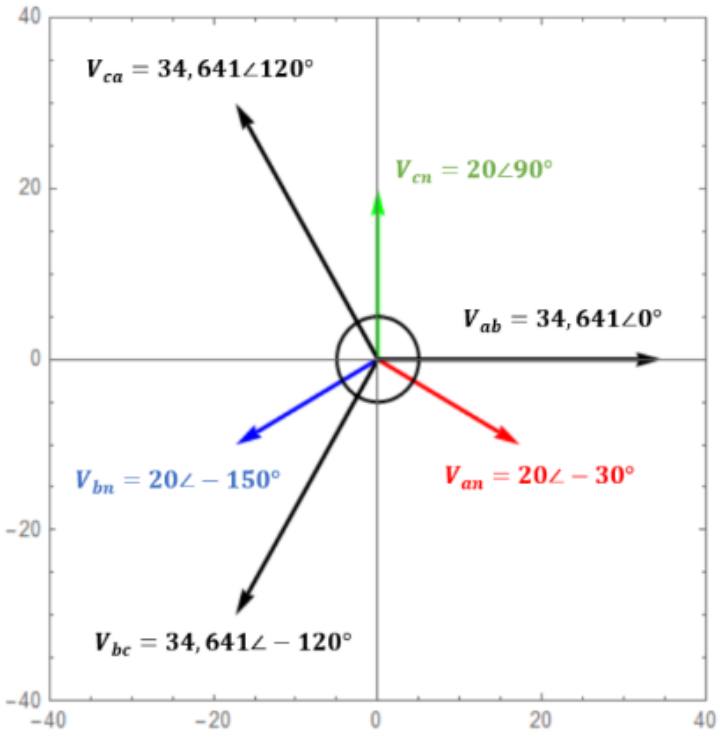
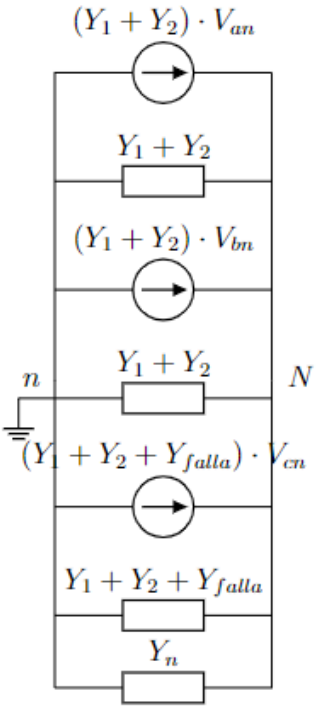



Figura 1. Diagrama fasorial voltajes fase neutro y fase fase de sistema trifásico.

Las medidas del gráfico anterior están en [kV].

c) Se realiza la respectiva transformación de fuentes del sistema trifásico:




Al aplicar KCL en el nodo $N$, se tiene la siguiente ecuación.

$V_{Nn}((Y_1+Y_2)+(Y_1+Y_2)+(Y_1+Y_2+Y_{falla})+Y_n) = (Y_1+Y_2)V_{an}+(Y_1+Y_2)V_{bn}+(Y_1+Y_2+Y_{falla})V_{cn}$

Despejando se encuentra el voltaje entre neutros.

$$V_{Nn} = \frac{V_{an}(Y_1 + Y_2) + V_{bn}(Y_1 + Y_2) + V_{cn}(Y_1 + Y_2 + Y_{falla})}{3Y_1 + 3Y_2 + Y_{falla} + Y_n}$$

d) Primero calculamos el valor del voltaje entre los neutros con la fórmula de la letra c).

$$V_{Nn} = 1595.13\angle 138.606^o[V]$$

Para obtener las corrientes de linea se tiene lo siguiente:

$$I_a = (V_{an} - V_{Nn})(Y1 + Y2) = 434.007\angle -57.4^o[A]$$

$$I_b = (V_{bn} - V_{Nn})(Y1 + Y2) = 393.428\angle -172.13^o[A]$$

$$I_c = (V_{cn} - V_{Nn})(Y1 + Y2 + Yf) = 1230.97\angle 59.82^o[A]$$

Luego, la corriente de retorno por el neutro es:

$$I_{Nn} = I_a + I_b + I_c = \frac{V_{Nn}}{Zn} = V_{Nn}Yn = 793.606\angle 54.317$$

e) Para encontrar la expresión de los voltajes fase-neutro de $b$ y $c$ en la carga nos apoyamos del voltaje entre neutros $V_{Nn}$ calculado en (c). Posteriormente, como se tiene también el voltaje fase-neutro en los terminales del generador, solo se toma el diferencial. Esto es:

$$V_{bN} = V_{bn} - V_{Nn} = 20\angle -150^o[kV] - \frac{V_{an}(Y_1 + Y_2) + V_{bn}(Y_1 + Y_2) + V_{cn}(Y_1 + Y_2 + Y_{falla})}{3Y_1 + 3Y_2 + Y_{falla} + Y_n}$$

$$V_{cN} = V_{cn} - V_{Nn} = 20\angle 90^o[kV] - \frac{V_{an}(Y_1 + Y_2) + V_{bn}(Y_1 + Y_2) + V_{cn}(Y_1 + Y_2 + Y_{falla})}{3Y_1 + 3Y_2 + Y_{falla} + Y_n}$$

f) Al no haber comunicación entre el neutro de las cargas y del generador, las corrientes remanentes producto de que el sistema es desbalanceado no podrían volver por el cable de neutro ($I_{Nn} = 0$). Sin embargo estas corrientes tienen que volver de algún modo, pero tendría que ser por las líneas principales, lo que no es deseable producto de la distorsión de las señales.