Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ingeniería Eléctrica
IEE2123 - Circuitos Eléctricos

Tarea 6

Circuitos de primer orden

1º semestre 2023 - Profesor David Watts

Ayudante: Elena Contardo (ele.contardo@uc.cl)

- La tarea debe ser subida en formato .pdf a Canvas al buzón correspondiente.
- Resuelva 3 de los 4 ejercicios propuestos.
- Es posible utilizar un comodín para poder entregar la tarea 3 días después del plazo final (contando fin de semana y festivos). Para esto, se debe enviar un correo al ayudante encargado avisando que se usará el comodín antes de que termine el plazo final original.
- No se aceptan tareas con letra ilegible.

Problema 1

Responda las siguientes preguntas:

a) ¿Qué significa que un circuito sea de primer orden?

b) ¿Cómo se obtiene la condición inicial de un circuito de primer orden RC y RL? Detalle para cada uno.

c) ¿Cómo se obtiene la constante τ en un circuito RC y en un circuito RL? ¿Qué información otorga esta constante?

Solución:

a) Un circuito de primer orden puede ser modelado matemáticamente como una ecuación diferencial de primer orden.

b) Para un circuito RC, se dice que cuando el circuito lleva mucho tiempo de una forma, el capacitor se representa como un circuito abierto, por lo que se calcula el voltaje en estos terminales para encontrar la condición inicial del capacitor. Luego, en un circuito RL, se dice que cuando el circuito lleva mucho tiempo de una forma, el inductor se representa como un cortocircuito, por lo que se calcula la corriente en este para encontrar la condición inicial del inductor.

c) Para un circuito RC $\tau = R_{eq} \cdot C_{eq}$, mientras que para un circuito RL $\tau = \frac{L_{eq}}{R_{eq}}$. La constante de tiempo τ tiene relación con la velocidad con la que cambia la respuesta transitoria del circuito, donde a mayor valor de τ, más lento es el circuito.

Problema 2

Considerando el circuito RC y el circuito RL de la Figura 1:

a) Determine la ecuación diferencial para encontrar el voltaje de salida $V_{out}(t)$ a partir del circuito RC.

b) Determine la ecuación diferencial para encontrar la corriente $i_L(t)$ a partir del circuito RL.

c) Considerando $C = 1\mu F$ y $V_{in} = u(t)$. ¿Cuánto debería valer R en el circuito RC para que V_{out} alcance el 90 % de su valor final en t=200μ segundos? Considere que el capacitor inicia descargado.

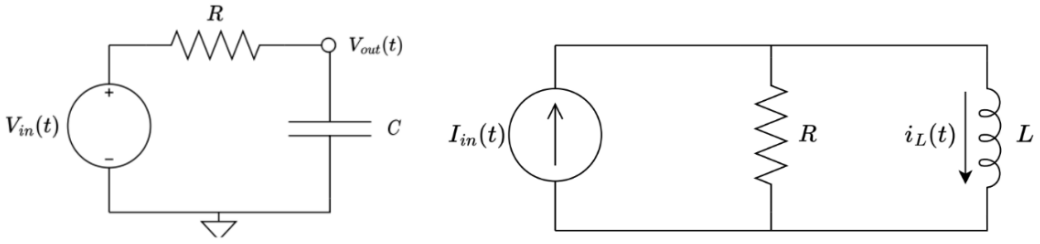


Figura 1: Circuito 1

Solución:

a) Como la corriente por el resistor es la misma que pasa por el capacitor, y $V_c(t) = V_{out}(t)$, se puede derivar la siguiente relación a partir de la ecuación de mallas:

$$-V_{in} + R \cdot i_c(t) + V_{out}(t) = 0$$

$$V_{in} = R \cdot C \frac{d}{dt} V_{out}(t) + V_{out}(t)$$

$$\frac{V_{in}}{RC} = \frac{d}{dt} V_{out}(t) + \frac{V_{out}(t)}{RC}$$

b) Considerando que el voltaje en el inductor es el mismo voltaje que hay en el resistor, a partir de la ecuación de nodos se tiene:

$$I_{in}(t) = \frac{V_L(t)}{R} + i_L(t)$$

$$I_{in}(t) = L \cdot \frac{d}{dt} i_L(t) \cdot \frac{1}{R} + i_L(t)$$
$$\frac{R}{L} \cdot I_{in}(t) = \frac{d}{dt} i_L(t) + \frac{R}{L} \cdot i_L(t)$$

c) La solución de la ecuación diferencial de la parte a) es la siguiente:

$$V_{out} = V_{out}(\infty) + (V_{out}(0) - V_{out}(\infty)) \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$
$$0{,}9 \cdot 1 = 1 + (0 - 1) \cdot e^{-\frac{200\mu}{R \cdot 1\mu}}$$

Despejando R se obtiene:

$$R = 86{,}85\Omega$$

Problema 3

En el circuito de la Figura 2 los interruptores llevan abiertos mucho tiempo. Luego, en $t = 0$, S1 se cierra, manteniéndose S_2 abierto. En $t = 3$, S1 se vuelve a abrir, todavía con S_2 abierto. Finalmente, en $t = 7$, S_2 se cierra y S_1 queda abierto permanentemente. Encuentre el voltaje del capacitor en función de los parámetros del problema para todo $t > 0$.

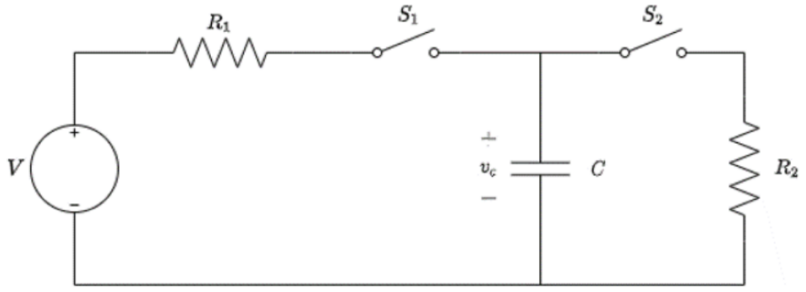


Figura 2: Circuito

Solución:

Se usará la ecuación general $v_c(t) = (V_0 - V(\infty)) \cdot e^{-\frac{(t-t_o)}{ReqC}} + V(\infty)$ para encontrar v_c en cada intervalo.

Para $t < 0$:

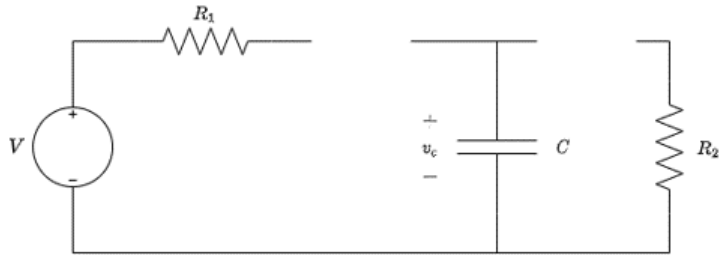


Figura 3: Circuito en $t < 0$

Luego, se ve que $v_c(0^-) = 0\ V$.

Para $0 \leq t < 3$:

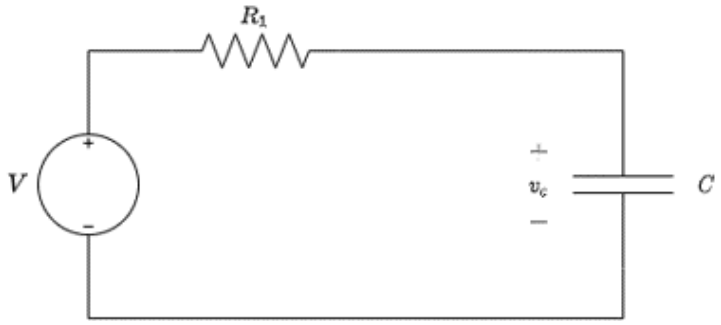


Figura 4: Circuito en $0 \leq t < 3$

Se ve que el circuito ya es un Thevenin, por lo que no se necesita sacar su equivalente. Luego,

$$V(\infty) = V_{th} = V$$

$$R_{eq} = R_{th} = R_1\ \Omega$$

Como el instante inicial del intervalo corresponde a $t = 0$, entonces $to = 0$ y $V_0 = v_c(0^-) = v_c(0^+) = 0$, por lo que se calculó al inicio en $t < 0$.

Teniendo entonces todos los parámetros se procede a reemplazar en la ecuación general y se obtiene que para $0 \leq t < 3$:

$$v_c(t) = (0 - V) \cdot e^{-\frac{(t-0)}{R_1 C}} + V$$

$$v_c(t) = -V \cdot e^{-\frac{t}{R_1 C}} + V$$

Para $3 \leq t < 7$:

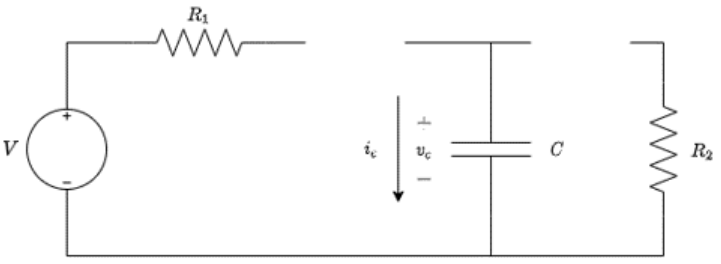


Figura 5: Circuito en $3 \leq t < 7$

Se ve que la corriente del capacitor $i_c = 0\ A$. Luego, sabiendo la relación entre corriente y voltaje de un capacitor, se llega a:

$$i_c = 0 = C \cdot \frac{dv_c}{dt} \rightarrow v_c\ cte$$

Al ser el v_c cte, significa que el voltaje que llevaba el capacitor hasta el punto antes del cambio del switch ($t = 3$), se mantendrá igual para todo este nuevo intervalo. Para encontrar este valor se usa el voltaje obtenido en el intervalo anterior ($v_c(t) = -V \cdot e^{-\frac{t}{R_1 C}} + V$) y se evalúa en $t = 3$, esto nos dará el voltaje con el que llegó cargado el capacitor a este intervalo $3 \leq t < 7$.

$$v_c(3) = -V \cdot e^{-\frac{3}{R_1 C}} + V$$

Entonces, el voltaje entre $3 \leq t < 7$ corresponde a:

$$v_c(t) = -V \cdot e^{-\frac{3}{R_1 C}} + V$$

Para $7 \leq t$:

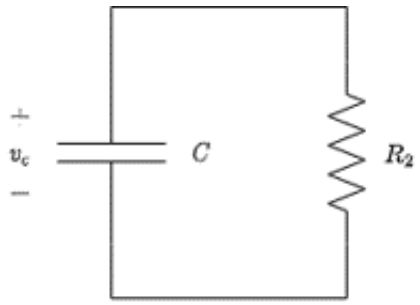


Figura 6: Circuito en $7 \leq t$

Este circuito ya corresponde a Thevenin con voltaje de thevenin 0, por lo que se encuentran a simple vista los parámetros:

$$V(\infty) = V_{th} = 0\ V$$
$$R_{eq} = R_{th} = R_2\ \Omega$$

Como el instante inicial del intervalo corresponde a $t = 7$, entonces $to = 7$ y $V_0 = v_c(7^-) = v_c(7^+)$, valor que se obtiene por medio del voltaje obtenido en el intervalo anterior $3 \leq t < 7$ evaluado en $t = 7$.

$$v_c(t) = -V \cdot e^{-\frac{3}{R_1 C}} + V$$
$$v_c(7) = -V \cdot e^{-\frac{3}{R_1 C}} + V$$

(El voltaje en el intervalo anterior era cte, por lo que no dependía de t).

Entonces:

$$V_0 = v_c(7^-) = v_c(7^+) = -V \cdot e^{-\frac{3}{R_1 C}} + V$$

Teniendo ya todos los parámetros se procede a reemplazar en la ecuación general y se obtiene que para $7 \leq t$:

$$v_c(t) = ((-V \cdot e^{-\frac{3}{R_1 C}} + V) - 0) \cdot e^{-\frac{(t-7)}{R_2 C}} + 0$$

$$v_c(t) = (-V \cdot e^{-\frac{3}{R_1 C}} + V) \cdot e^{-\frac{(t-7)}{R_2 C}}$$

Por lo que finalmente:

$$\begin{aligned}
&\text{En } 0 \leq t < 3: && v_c(t) = -V \cdot e^{-\frac{t}{R_1 C}} + V \\
&\text{En } 3 \leq t < 7: && v_c(t) = -V \cdot e^{-\frac{3}{R_1 C}} + V \\
&\text{En } t \geq 7: && v_c(t) = \left(-V \cdot e^{-\frac{3}{R_1 C}} + V\right) \cdot e^{-\frac{(t-7)}{R_2 C}}
\end{aligned}$$

Criterios de corrección

- 2 puntos por respuesta correcta entre $0 \leq$ t < 3 segundos
- 2 puntos por respuesta correcta en $3 \leq$ t < 7 segundos
- 2 puntos por respuesta correcta en $7 \leq$ t segundos

Problema 4

El interruptor del circuito de la Figura 3 lleva mucho tiempo cerrado. Luego, en $t = 0$, este se abre, y en $t = 3$ vuelve a cerrarse, quedando así permanentemente. Encuentre la corriente $i_L(t)$ para $t > 0$.

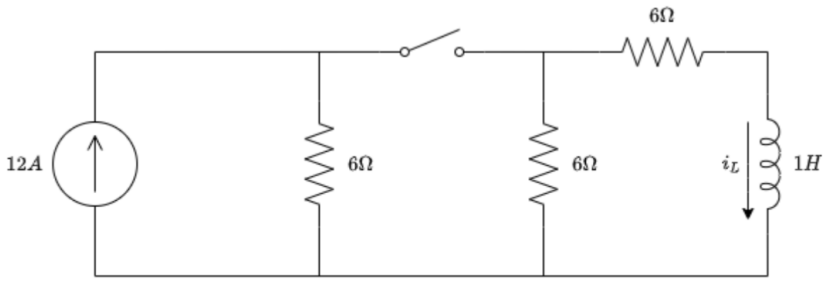


Figura 7: Circuito

Solución:

Se utiliza la fórmula general:

$$i_L(t) = (I_0 - I(\infty)) \cdot e^{-\frac{(t-t_o)}{L/R_{eq}}} + I(\infty)$$

El primer cambio de switch ocurre en $t = 0$, entonces $t_o = 0$ y $I_0 = I(0)$ y la solución general queda de la forma:

$$i_L(t) = (I(0) - I(\infty)) \cdot e^{-\frac{t}{L/R_{eq}}} + I(\infty)$$

En $t < 0$:

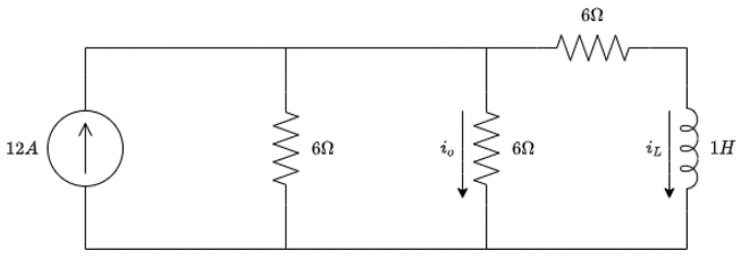


Figura 8: Circuito para $t < 0$

Como el inductor se lleva cargando mucho tiempo, se ve como un cortocircuito, por lo que para encontrar $I(0)$ se debe calcular la corriente de cortocircuito del inductor, la cual corresponde a:

$$I(0) = i_L(0^-) = i_L(0^+) = 12 \cdot \frac{6\Omega//6\Omega}{(6\Omega//6\Omega) + 6\Omega} = 3{,}99\ A$$

Para $t > 0$:

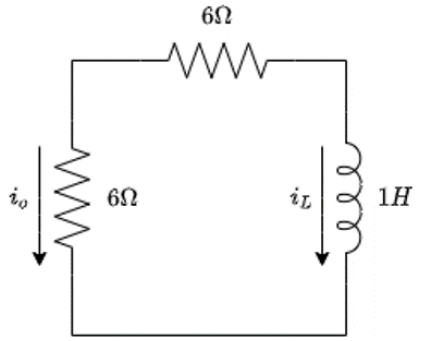


Figura 9: Circuito para $t > 0$

El cual se debe reducir a un Norton, ya que la ecuación general corresponde a la solución de un Norton. Este queda de la forma:

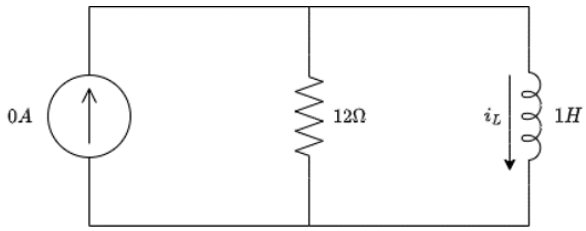


Figura 10: Circuito para $t > 0$

(La corriente de Norton es 0, se puede no poner, era solo para mostrar como queda el circuito).

Luego, se tiene entonces:

$$R_{eq} = R_n = 12\ \Omega$$
$$I(\infty) = I_n = 0\ A$$

Y ahora ya se tienen todos los parámetros de la ecuación, por lo que solo se debe reemplazar:

$$i_L(t) = (3{,}99 - 0) \cdot e^{-\frac{t}{1/12}} + 0$$
$$i_L(t) = 3{,}99 \cdot e^{-12t}\ A$$

Ya habiendo encontrado que para $0 \leq t < 3$:

$$i_L(t) = 3{,}99 \cdot e^{-12t}\ A$$

Entonces faltaría encontrar la corriente para $t > 3$.

Como este intervalo empieza en 3, entonces la ecuación general queda de la forma:

$$i_L(t) = (I_0 - I(\infty)) \cdot e^{-\frac{(t-t_o)}{L/R_{eq}}} + I(\infty)$$

$$i_L(t) = (I(3) - I(\infty)) \cdot e^{-\frac{(t-3)}{L/R_{eq}}} + I(\infty)$$

Luego, en $t > 3$:

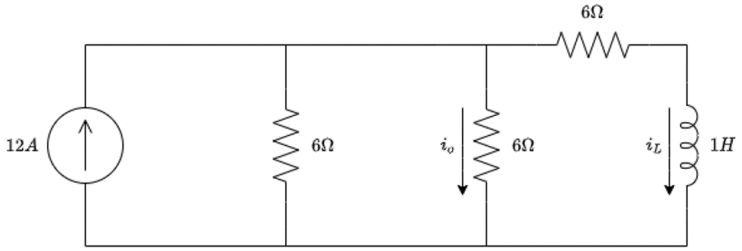


Figura 11: Circuito para $t > 3$

Pero como la ecuación general es la solución para un norton, se debe sacar el equivalente del circuito y queda de la forma:

Luego, en $t > 3$:

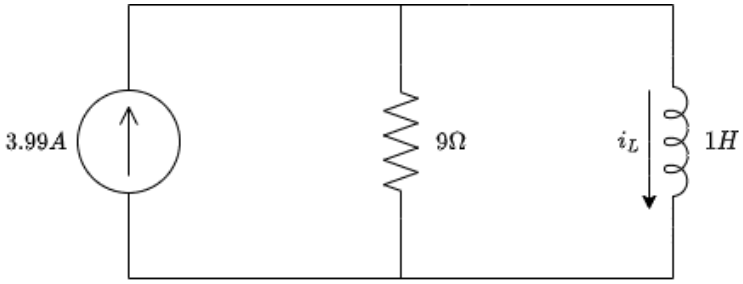


Figura 12: Circuito equivalente Norton $t > 3$

Luego, se tiene entonces:

$$R_{eq} = R_n = 9\ \Omega$$

$$I(\infty) = I_n = 3{,}99\ A$$

Por último, falta encontrar $I(3)$, lo que se hace tomando la corriente obtenida en el intervalo anterior $(0 < t < 3)$ y evalúandola en $t = 3$:

$$i_L(t) = 3{,}99 \cdot e^{-12t}\ A$$

$$i_L(3) = 3{,}99 \cdot e^{-12 \cdot 3} \approx 0\ A$$

Y ahora ya se tienen todos los parámetros de la ecuación, por lo que solo se debe reemplazar:

$$i_L(t) = (0 - 3{,}99) \cdot e^{-\frac{(t-3)}{1/9}} + 3{,}99$$

$$i_L(t) = -3{,}99 \cdot e^{-9(t-3)} + 3{,}99$$

Y finalmente,

$$\begin{array}{ll} \text{Para } 0 \leq t < 3 & \rightarrow \quad i_L(t) = 3{,}99 \cdot e^{-12t} A \\ \text{Para } t \geq 3 & \rightarrow \quad i_L(t) = -3{,}99 \cdot e^{-9(t-3)} + 3{,}99 A \end{array}$$

Criterios de corrección

- 3 puntos por respuesta correcta entre $0 \leq$ t < 3 segundos
- 3 puntos por respuesta correcta en $3 \leq$ t segundos