Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Eléctrica
IEE2123 – Circuitos Eléctricos
Prof. Álvaro Lorca
Segundo Semestre de 2018

Tarea 5
Circuitos RL y de segundo orden

Isidora Nahum y ilnahum@uc.cl

Instrucciones

- La Tarea debe ser entregada el día viernes 12 de Octubre antes de las 17:00 horas en secretaría de Ingeniería Eléctrica.
- Su reporte debe ser conciso y auto-explicativo, conteniendo cualquier información relevante (sin páginas y páginas de números o cosas por el estilo). En particular, el reporte debe contener cualquier código relevante desarrollado, si este fuera el caso.
- Existirá un bono de 1 décima en la nota final de la Tarea si es que ésta se escribe completamente en LaTeX (siempre que la nota final no resulte mayor a 7).
- El trabajo es individual, i.e. una Tarea por persona, sin embargo, se incentiva a que colaboren con sus compañeros en las estrategias más efectivas para abordar los diferentes problemas.

Problema 1: Circuito RL (2 puntos)

A partir de la siguiente figura, determine $i_L(t)$ para todo t. Considere que los interruptores se cierran en los tiempos indicados en la figura y se mantienen cerrados. Además, considere que el tiempo t^* es suficiente para que el inductor se cargue completamente.

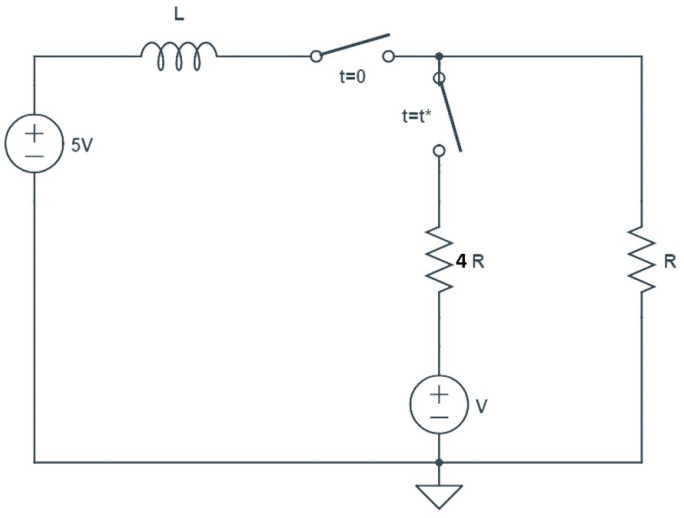


Figure 1: Problema 1

Problema 2: Circuitos de segundo orden (2 puntos)

Considere la figura de más abajo.

(a) Determine una ecuación diferencial para resolver el voltaje en el capacitor sin los valores numéricos de los elementos (utilice expresiones genéricas para estos valores). En su desarrollo, no utilice técnicas basadas en la Transformada de Laplace.

(b) Determine el voltaje en el capacitor a través del tiempo reemplazando los valores numéricos de los elementos del circuito.

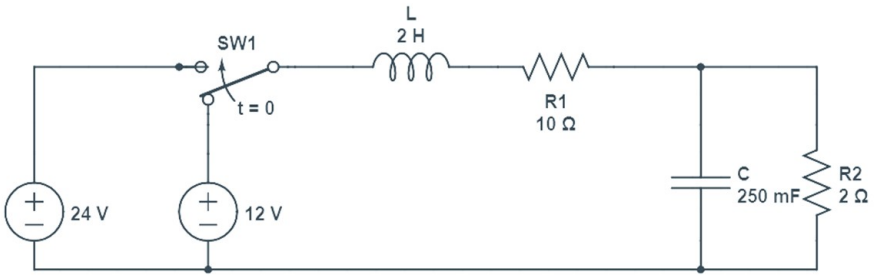


Figure 2: Problema 2

Problema 3: Circuitos de segundo orden en Laplace (2 puntos)

Considere la figura de más abajo. Considere también que la fuente de corriente $I_f(t)$ es una sinusoide de amplitud unitaria y frecuencia de 1kHz. Además, ambos inductores tienen condiciones iniciales nulas. Determine la ecuación diferencial para obtener la corriente que pasa a través del inductor L_1 y determine la frecuencia natural del circuito y el coeficiente de amoritgüación. Luego, implemente una simulación transiente (*.trans*) en LTSpice. Compare los resultados.

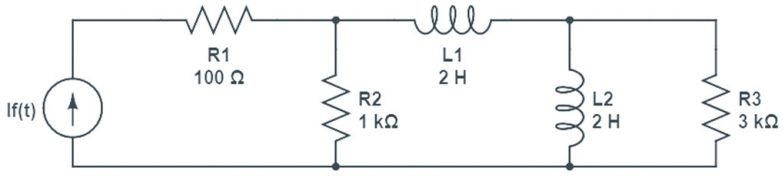


Figure 3: Problema 3

Solución Problema 1: Circuito RL

Para $t < 0$, tenemos un circuito abierto en los extremos del inductor. Por ende, la corriente del inductor es cero.
Entre $0 < t < t^*$ tenemos un circuito RL con resistencia R y inductancia L donde es fácil determinar los parámetros de la ecuación base

$$i_L(t) = (i_L(0) - i_L(\infty))e^{\frac{-t}{\tau}} + i_L(\infty)$$

En este caso, $i_L(0) = 0$ ya que el circuito estaba abierto al inicio y los componentes estaban descargados. Cuando se cargue por completo el inductor este se comportará como un cortocircuito, es decir, la corriente es $i_L(\infty) = \frac{5V}{R}$. De esta manera, la corriente será

$$i(0 < t < t^*) = \left(0 - \frac{5V}{R}\right) e^{\frac{-tR}{L}} + \frac{5V}{R}$$

Este resultado se puede obtener de igual manera considerando que el voltaje en el inductor es $v_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt}$ y aplicando mallas. Se obtiene la ecuación diferencial $5V = L\frac{di_L(t)}{dt} + Ri_L(t)$ y con la condición inicial $i_L(0) = 0$ se llega a la misma ecuación descrita anteriormente.
Cuando todos los interruptores están cerrados, es decir, en $t > t^*$, tendremos un circuito donde no será fácil reconocer la corriente inicial y la final para reemplazarlas en la ecuación, por lo que aplicaremos Thevenin. De esta manera, obtendremos un circuito RL fácil de analizar.
El circuito en primera instancia es

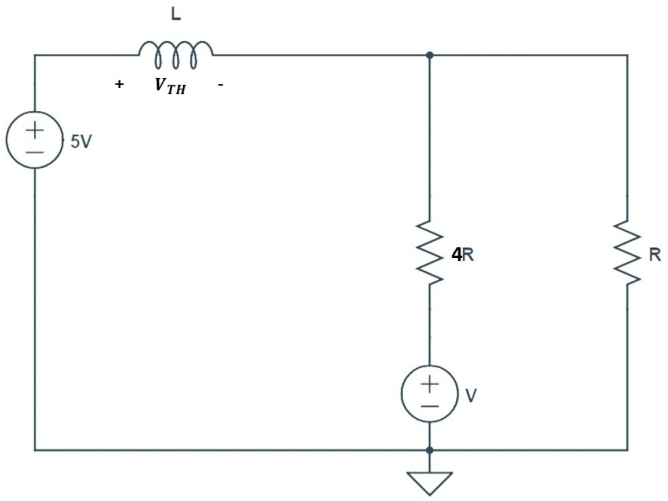


Figure 4: Circuito sin simplificar

Al apagar las fuentes de voltaje queda una resistencia equivalente entre los terminales del inductor de $R||4R$, es decir, $R_{TH} = \frac{4R}{5}$.

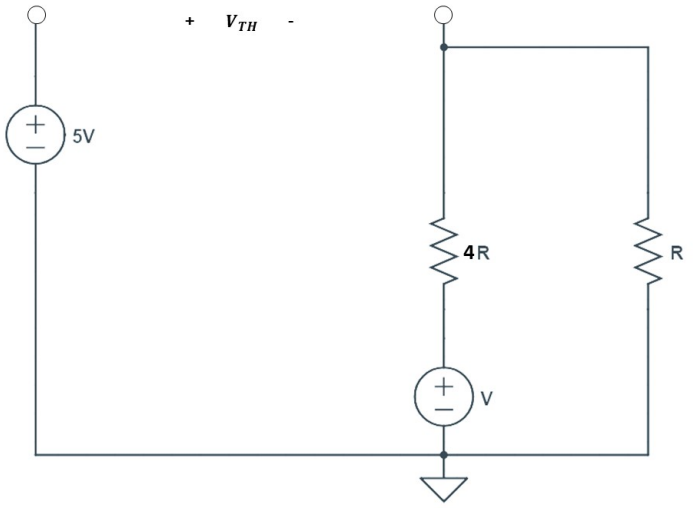


Figure 5: Cálculo de voltaje de Thevenin

El voltaje de Thevenin lo calculamos por superposición. Al apagar la fuente de $5V$ tenemos un divisor de voltaje $V_{TH^-} = \frac{V}{4}$ de manera que $V_{TH1} = 0 - \frac{V}{5}$ debido a que el divisor de voltaje se encuentra en el extremo negativo de como se ha planteado el voltaje de Thevenin o de circuito abierto.
Al apagar la fuente de V obtenemos un voltaje de $5V$ en el circuito abierto, es decir, $V_{TH2} = 5V$. Por superposición, $V_{TH} = 5V - \frac{V}{5} = \frac{24V}{5}$. El circuito RL equivalente entonces es



Figure 6: Circuito RL equivalente

Sabemos que la corriente inicial es $\frac{5V}{R}$ porque en el enunciado se indica que el tiempo t^* es suficiente para que el inductor quede cargado, es decir, para que quede a la corriente final de la ecuación anterior. La corriente final de esta parte corresponde al voltaje de thevenin dividido en la resistencia equivalente. La constante de tiempo para esta parte es $\tau = \frac{5L}{4R}$. Debemos considerar que la ecuación base debe quedar trasladada en t^* ya que la ecuación base esta dada para un tiempo inicial igual a cero. De esta manera, la corriente del inductor para $t > t^*$ es

$$i(t > t^*) = \left(\frac{5V}{R} - \frac{24V}{4R}\right) e^{-\frac{(t-t^*)4R}{5L}} + \frac{24V}{4R} = -\frac{V}{R} e^{-\frac{(t-t^*)4R}{5L}} + \frac{6V}{R}$$

Podemos notar por el signo que acompaña a la exponencial que esta parte también carga al inductor.

Solución Problema 2: Circuito de segundo orden (2 puntos)

Evaluando el circuito en $t < 0$ obtenemos las condiciones inciales:

$$v_C = 2$$
$$i_C = 0$$
$$v_L = 0$$
$$i_L = 1$$

En $t > 0$ podemos aplicar mallas y nodos en puntos específicos para facilitar el cálculo. El método de mallas aplicado en la malla izquierda da

$$L\frac{di_L(t)}{dt} + R_1 i_L(t) + v_L(t) = 24V$$

Al aplicar el método de nodos en el nodo superior de la derecha queda

$$i_L(t) = C\frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{v_C(t)}{R_2}$$

Aplicando la segunda ecuación en la primera y despejando queda la expresión pedida

$$\frac{d^2v_C(t)}{dt^2} + \left(\frac{1}{R_2C} + \frac{R_1}{L}\right)\frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{R_1 + R_2}{R_2LC}v_C(t) = \frac{24}{LC}$$

Al reemplazar los valores queda la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2v_C(t)}{dt^2} + 7\frac{dv_C(t)}{dt} + 12v_C(t) = 48$$

La ecuación característica para resolver la ecuación diferencial es

$$r^2 + 7r + 12 = 0$$

cuyas raíces son $r_1 = -3$ y $r_2 = -4$. A partir de ello obtenemos la solución con constantes incógnitas $v_C(t) = k_1e^{-3t} + k_2e^{-4t} + k_3$. Podemos obtener la tercera constante al hacer un divisor de voltaje cuando estamos en $t = \infty$.

$$v_C(\infty) = k_3 = \frac{24 * 2}{2 + 10} = 4$$

A partir de las dos condiciones iniciales que sacamos anteriormente podemos deducir las otras dos constantes en un sistema de ecuaciones.

$$v_C(0) = k_1 + k_2 + 4 = 2 \rightarrow k_1 + k_2 = -2$$

Sabemos que pasará corriente por el condensador en $t = 0^+$ por lo que la ecuación de nodos planteada anteriormente es válida. A partir de ella podemos despejar la derivada del voltaje y derivar el voltaje de la ecuación diferencial de igual manera.

$$\frac{dv_C(t)}{dt} = \frac{i_L(t)}{C} - \frac{v_C(t)}{CR_2} = -3k_1e^{-3t} - 4k_2e^{-4t}$$

Evaluando en cero y aplicando las condiciones iniciales obtenemos $0 = -3k_1 - 4k_2$. Teniendo las dos ecuaciones del sistema de ecuaciones, resolvemos para las constantes y obtenemos $k_1 = -8$ y $k_2 = 6$ y reemplazando en la ecuación obtenemos

$$v_C(t) = 4 - 8e^{-3t} + 6e^{-4t}$$

Solución Problema 3: Circuito de segundo orden en Laplace (2 puntos)

Los inductores en Laplace serán resistores de resistencia sL. De esta manera podemos hacer un divisor de corriente en la resistencia equivalente del circuito en Laplace para obtener la corriente pedida en el enunciado.

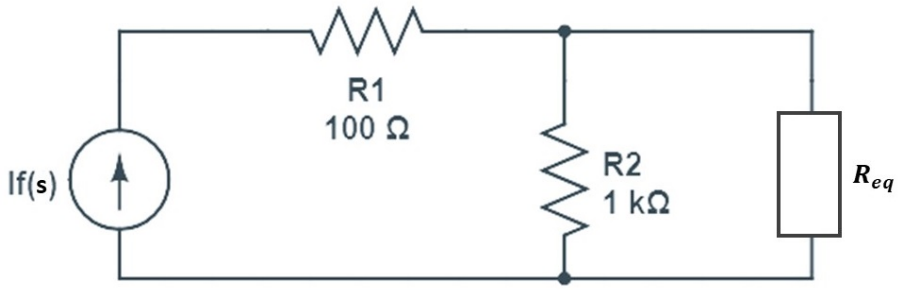


Figure 7: Circuito equivalente en Laplace

donde la resistencia equivalente es

$$sL_1 + R_3||sL_2 = \frac{sL_2R_3 + s^2L_1L_2 + sL_1R_3}{sL_2 + R_3}$$

De esta manera el divisor de corriente es

$$I_1(s) = \frac{If(s)R_2}{(sL_1 + R_2||sL_2) + R_2} = \frac{If(s)(sR_2L_2 + R_3R_2}{s^2L_1L_2 + s(L_2R_3 + L_1R_3 + L_2R_2) + R_2R_3}$$

Obtenemos entonces

$$s^2I_1(s)L_1L_2 + sI_1(s)(L_2R_3 + L_1R_3 + L_2R_2) + I_1(s)R_2R_3 = If(s)(sR_2L_2 + R_3R_2$$

Donde la frecuencia natural y el coef. de amortiguamiento son

$$w_o = \sqrt{\frac{R_2R_3}{L_1L_2}}$$

$$\eta = \frac{L_2R_3 + L_1R_3 + L_2R_2}{2\sqrt{L_1L_2R_2R_3}}$$

La simulación en LTSpice da lo siguiente:

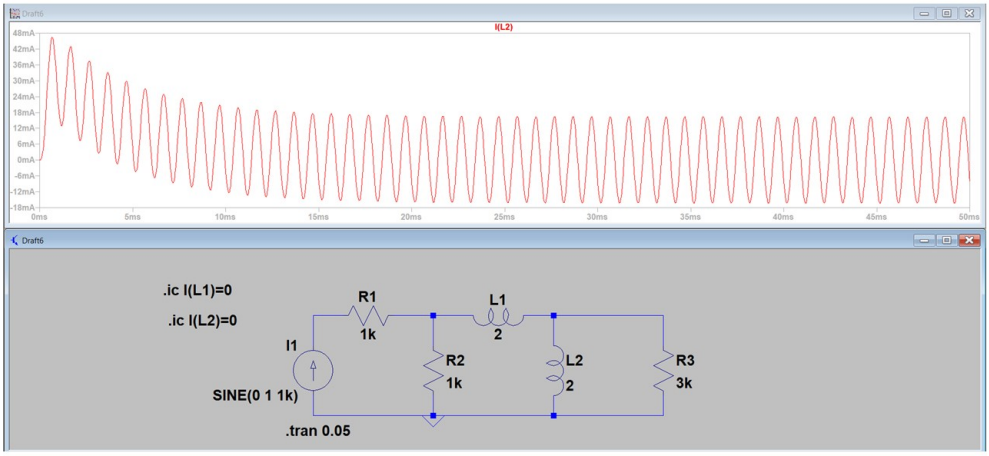


Figure 8: Simulación