Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ingeniería Eléctrica
IEE2123 - Circuitos Eléctricos

# Solución Tarea 6

Funciones de Transferencia, Bode, Filtros y OpAmps.

2º semestre 2022 - Profesor Samuel Córdova

Ayudante Joaquín Canelo L. - jcanelopez@uc.cl

---

## Problema 1

A partir del circuito de la figura 1:

- Encuentre la función de transferencia $\mathbf{G(s) = V_o/I_{in}}$. Explicite polos, ceros y constantes relevantes.
- Elabore el Diagrama de Bode de Magnitud y de Fase de la Función de Transferencia $\mathbf{G(s)}$ con sus respectivas asíntotas, sabiendo que $R_1 = 1[k\Omega]$, $R_2 = 30[k\Omega]$, $C_1 = 66[nF]$, $R_3 = 500[\Omega]$ y $L_1 = 0{,}2[H]$. Indique las pendientes $\frac{dB}{dec}$ en cada trazo.

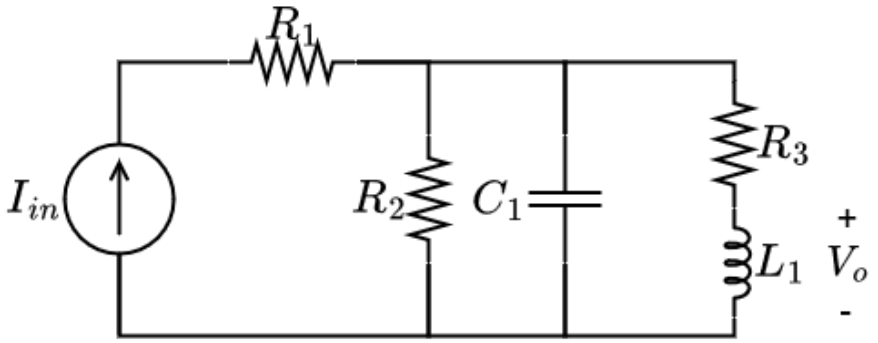



Figura 1: Circuito Pregunta 1

## Solución Problema 1

Se comienza trabajando con las impedancias de los elementos. Notamos que $R_1$ no será parte de nuestra Función de Transferencia. Luego, es posible calcular la corriente que circula por $L_1$ y luego usando Ley de Ohm, calcular $V_o$. Para esto, primero calculamos la impedancia resultante del paralelo de $R_2$ y $C_1$:

$$Z_1 = Z_{R_2}||Z_{C_1} = \frac{R_2 \cdot \frac{1}{sC_1}}{R_2 + \frac{1}{sC_1}} = \frac{R_2}{1 + sC_1R_2}$$

Luego, la relación buscada es:

$$V_o = I_2 \cdot sL_1$$

donde $I_2$ es la corriente que circula por el inductor. Hacemos un divisor de corriente para encontrar $I_2$:

$$I_2 = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} \cdot I_{in}$$

donde $Z_1 = R_3 + sL_1$

Reemplazando los valores de las impedancias, se llega a:

$$I_2 = I_{in} \frac{R_2}{R_2 + R_3 + s(L_1 + C_1R_2R_3) + s^2C_1L_1R_2}$$

Haciendo ley de Ohm en el inductor:

$$G(s) = \frac{V_o}{I_{in}} = \frac{sR_2L_1}{R_2 + R_3 + s(L_1 + C_1R_2R_3) + s^2C_1L_1R_2}$$

Reordenando la ecuación, queda de la siguiente manera:

$$G(s) = \frac{R_2L_1}{R_2 + R_3} \frac{s}{(1 + s\frac{L_1 + C_1R_2R_3}{R_2 + R_3} + s^2\frac{C_1L_1R_2}{R_2 + R_3})}$$

De esta manera, se tendrá:

- Ganancia = $\frac{R_2L_1}{R_2+R_3}$
- Cero en el origen.
- Dos polos conjugados en $w_n = \frac{R_2+R_3}{C_1L_1R_2}$

Para armar el Bode, reemplazamos los valores, obteniendo que:

$$G(s) = 0{,}197 \cdot \frac{s}{1 + s3{,}9 \cdot 10^{-5} + s^2 1{,}3 \cdot 10^{-8}}$$

Con esto, damos cuenta que:

$$w_n = 8770[rad/s] \text{ , } \xi = 0{,}171 \text{ y } Q = 2{,}92$$

Con esto ya dispuesto, es posible armar el Bode. En rojo son los aporte del cero en el origen. Verde los polos complejos conjugados. Azul la ganancia y en amarillo, los resultados finales. Recordar que estas asíntotas son aproximaciones al Bode real, por lo que algunos valores de decibeles/frecuencia pueden variar levemente.

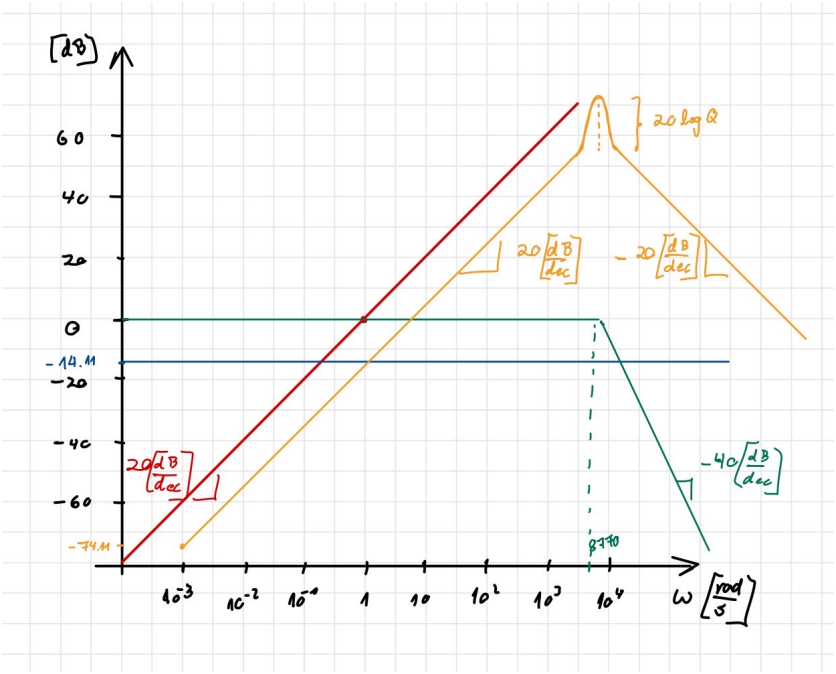



Figura 2: Bode Magnitud P1

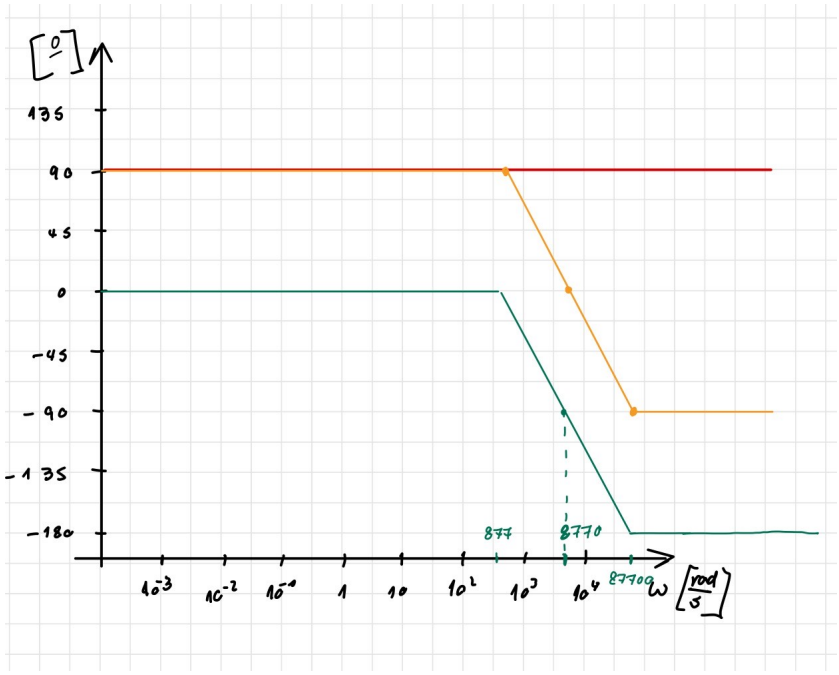



Figura 3: Bode Fase P1

# Problema 2

- Elabore el diagrama de Bode de Magnitud y de Fase, especificando polos, ceros y constantes importantes, además de indicar las pendientes $\frac{dB}{dec}$, a partir de la siguiente Función de Transferencia:

$$H(s) = 100\frac{s^2 + s + 49}{s^3 + 1000s^2}$$

- Determine la función de transferencia a partir de los siguientes gráficos de Bode:

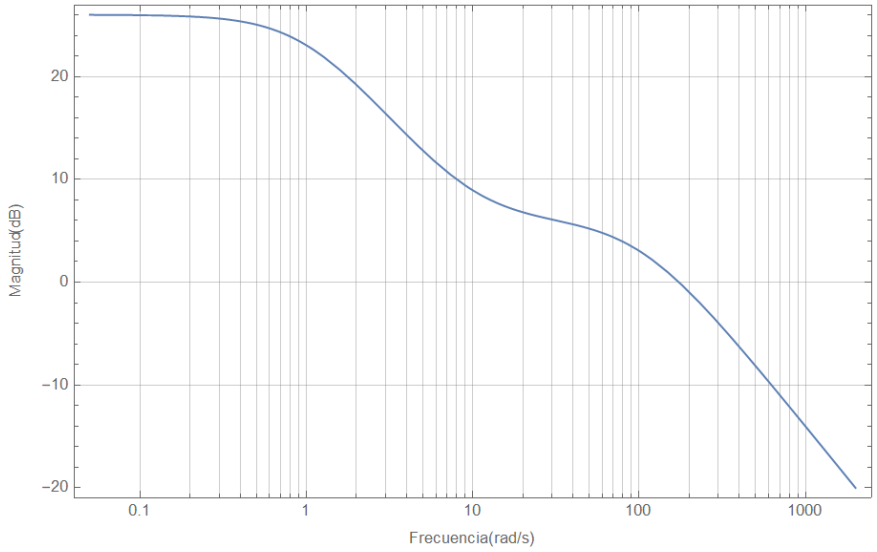



Figura 4: Diagrama Bode Magnitud P2

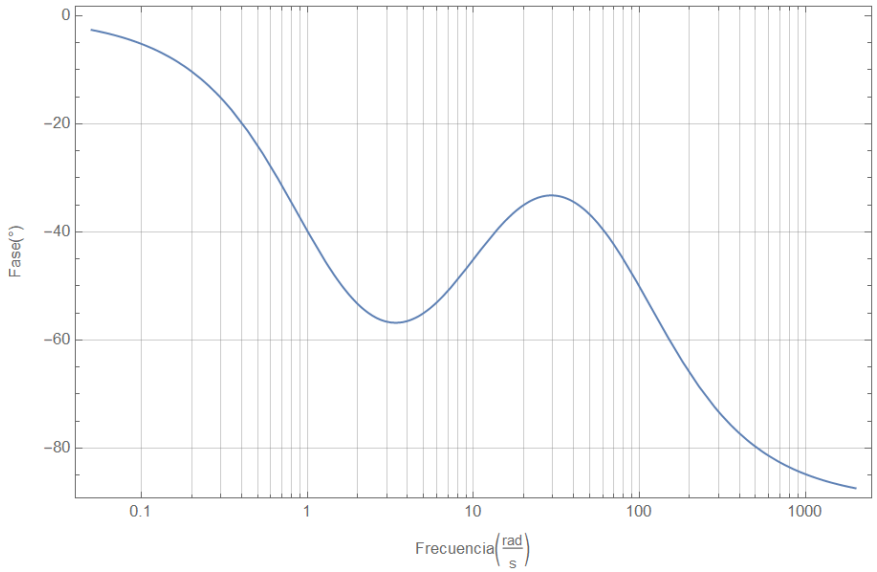



Figura 5: Diagrama Bode Fase P2

## Solución Problema 2

### Problema A

Comenzamos reordenando la función de transferencia de manera de dejarla en su forma normalizada/canónica.

$$H(s) = \frac{100 \cdot 49}{1000} \cdot \frac{(\frac{s}{7})^2 + \frac{s}{49} + 1}{s^2(\frac{s}{1000} + 1)} = 4{,}9 \cdot \frac{(\frac{s}{7})^2 + \frac{s}{49} + 1}{s^2(\frac{s}{1000} + 1)}$$

Aquí notamos la existencia de 2 polos en el origen, 1 polo en $w = 1000[rad/s]$, 2 ceros complejos conjugados en $w_n = 7[rad/s]$. Además, $\xi = 0{,}0714$, $Q = 7$ y una ganancia de 4.9.

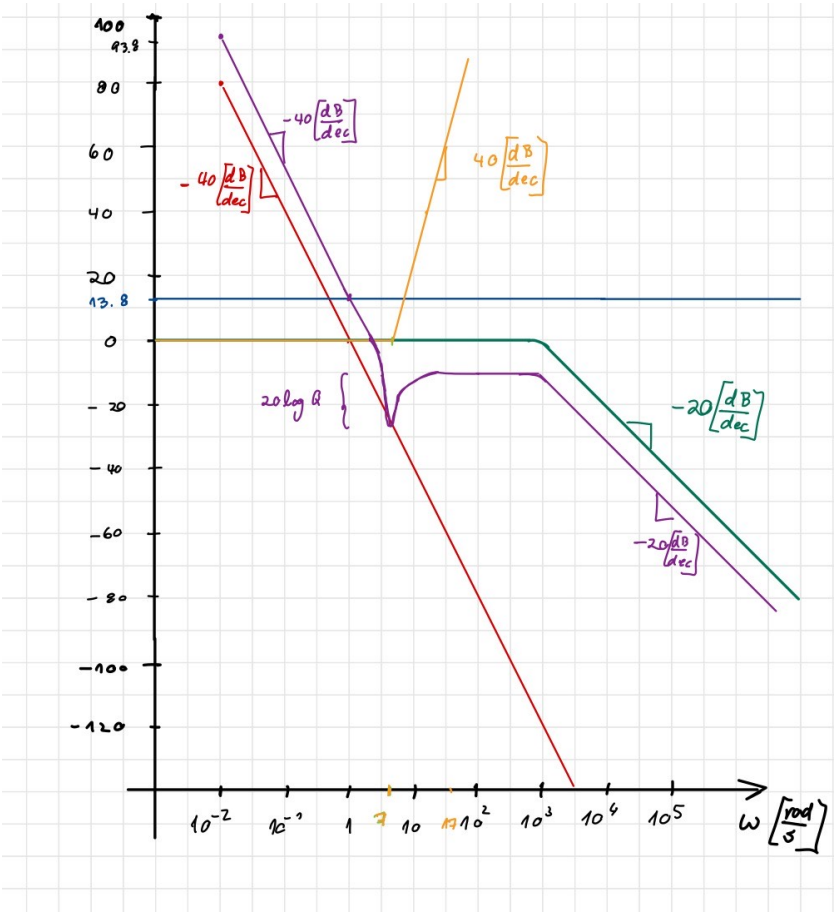



Figura 6: Bode Magnitud P2

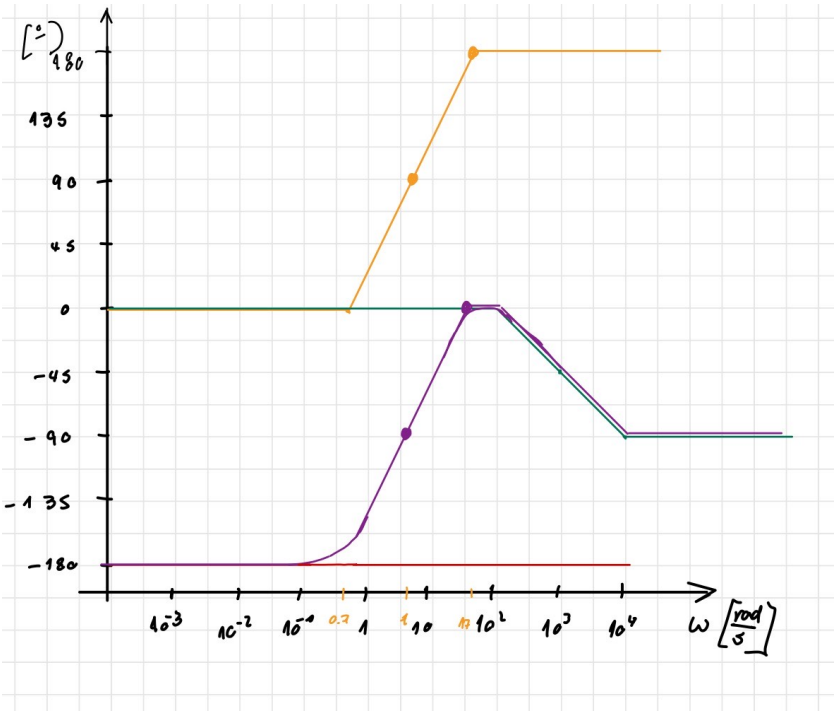



Figura 7: Bode Fase P2

En rojo se encuentra la asíntota de los polos complejos conjugados. En verde y amarillo el polo en 1000 $rad/s$ y los ceros complejos conjugados, respectivamente. Azul la ganancia y en morado el resultado final. Nuevamente recordar que estos gráficos son aproximaciones a los gráficos de Bode reales.

### Problema B

- Primero notamos que el Bode de Magnitud comienza en 26 [db] y que el de Fase comienza en 0°. Con esto podemos concluir que no hay polos ni ceros en el origen y que se posee una Ganancia de 20. ($20logA = 26 \rightarrow A = 26[db]$)
- Es posible notar que en $w = 1rad/s$ comienza a haber un decaimiento en el Bode de Magnitud. Además, justo en esta frecuencia, se tiene una magnitud de 23 [dB], que corresponden al decaimiento de -3[db] cuando hay un polo en cierta frecuencia. Así, se posee una pendiente de -20 [db/dec]. De esta manera, se concluye que existe un polo en $w = 1rad/s$.
- Ahora, observamos el diagrama de Fase. Notamos que en $w = 10rad/s$, la fase se encuentra cercana a -45°. Sabemos que en $w = 1rad/s$ hay un polo, por lo que en $w = 10rad/s$ la fase debiese estar en -90°. Como se encuentra cercano a -45°, la única explicación posible es que en $w = 10rad/s$ existe un cero ya que la fase en este punto aumenta 45°. Además, es posible observar el diagrama de Magnitud, donde se observa que entre 10 rad/s y 100 rad/s, la pendiente se parece a 0 [dB/dec]
- Finalmente, volvemos a observar el diagrama de magnitud para observar que desde

$w = 100 rad/s$, la curva tiene una pendiente de -20 [dB/dec], lo que se explica con un polo en aquella frecuencia.

La función de transferencia resultante es:

$$H(s) = 20 \cdot \frac{(\frac{s}{10} + 1)}{(s+1)(\frac{s}{100} + 1)}$$

# Problema 3

## Parte 1

A continuación, se presenta en la figura 8, un filtro activo Sallen-Key. Determine la función de transferencia del circuito, $H(s) = V_{out}(s)/V_{in}(s)$, considerando que el opAmp es ideal. Explicite qué tipo de filtro es. Además, escriba el sistema de ecuaciones y los supuestos necesarios que utilizó para encontrar la expresión.

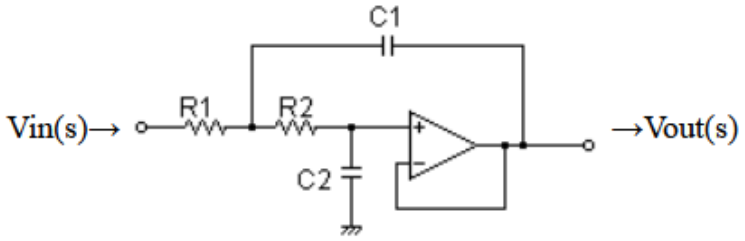



Figura 8: Circuito P3 parte 1

Determine valores para los componentes que permitan que la frecuencia de corte se encuentre en $3[kHz]$. Justifique.

## Parte 2

A partir de la figura [9]:

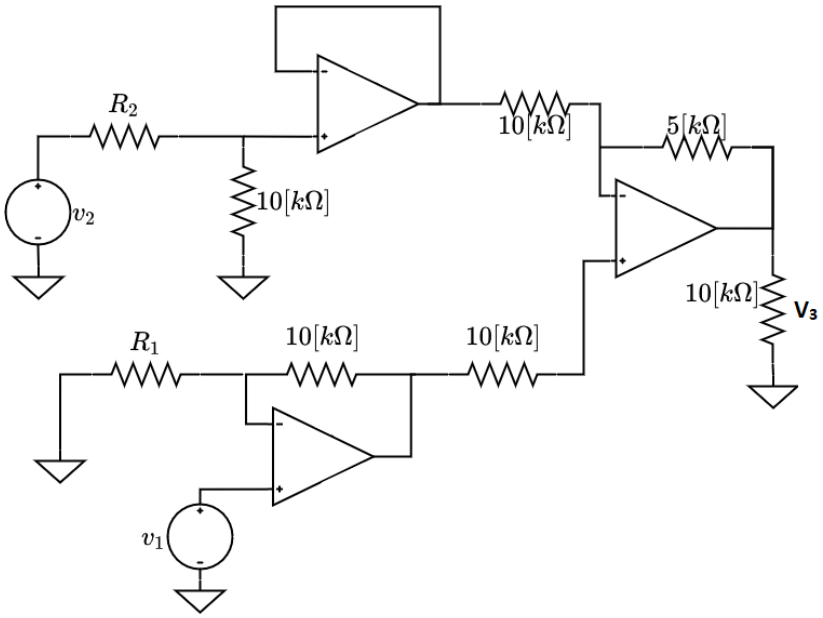



Figura 9: Circuito P3 parte 2

- Determine el tipo de configuración utilizada para cada uno de los OpAmps presentados en la figura (e.g., Amplificador Inversor).
- Determine los valores de los resistores $R_1$ y $R_2$, de manera que se cumpla $v3 = 9v_1 - 0{,}25v_2$

## Solución Problema 3

### Parte 1

Primero, notamos que al ser un opAmp ideal, la salida $V_{out}$ estará en el nodo $V^+$ del opAmp. De esta manera, al nombrar además el nodo entre $R_1$ y $R_2$ como $V_1$, podemos llegar al siguiente sistema de ecuaciones:

$$1)\ \frac{V_1 - V_{in}}{R_1} + \frac{V_1 - V_{out}}{1/sC_1} + \frac{V_1 - V_{out}}{R_2} = 0$$

$$2)\ \frac{V_1 - V_{out}}{R_2} = \frac{V_{out}}{1/sC_2}$$

Luego, de 2) es posible llegar a la siguiente relación:

$$V_1 = V_{out}(1 + sC_2R_2)$$

De 1), al trabajarla algebraicamente, se llega a lo siguiente:

$$V_1(\frac{1}{R_1} + sC_1 + \frac{1}{R_2}) = \frac{V_{in}}{R_1} + V_{out}(sC_1 + \frac{1}{R_2})$$

Reemplazando la relación encontrada de 2) y reordenando:

$$V_{out}\left(\frac{(1 + sC_2R_2)(R_1 + R_2 + sC_1R_1R_2)}{R_2}\right) - V_{out}\left(\frac{R_1 + sC_1R_1R_2}{R_2}\right) = V_{in}$$

Al juntarlo y simplificarlo, se llega a:

$$H(s) = \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{1}{1 + s(C_2R_1 + C_2R_2) + s^2C_1C_2R_1R_2}$$

Claramente esta función de transferencia corresponde a un filtro pasabajos ya que posee solamente 2 polos complejos conjugados.

Para que la frecuencia de corte se encuentre en 3[kHz], existen infinitas combinaciones de componentes que lo permiten. Gracias a la ecuación de segundo grado, se sabe que:

$$w_n = \frac{1}{\sqrt{C_1 C_2 R_1 R_2}} = 18850[rad/s]$$

**Recordar que 1[Hz] es equivalente a 2$\pi$ [rad/s] y que la unidad de $w_n$ es [rad/s]**

Para simplificar el problema, haremos que $R_1 = R_2$ y $C_1 = C_2$. Luego,

$$w_n = \frac{1}{C \cdot R} = 18850[rad/s]$$

Definimos $R = 5{,}1[k\Omega]$, para así despejar el valor de $C$.

$$\frac{1}{C} = 96135000 \rightarrow C = 0{,}01[\mu F]$$

De esta manera, unos valores posibles son los siguientes:

$$R_1 = R_2 = 5{,}1[k\Omega] \text{ y } C_1 = C_2 = 0{,}01[\mu F]$$

**Parte 2**

De la figura, podemos notar que el opAmp inferior se encuentra en configuración amplificador no inversor, entonces:

$$V_B = V_1 \cdot \left(1 + \frac{10k\Omega}{R_1}\right)$$

donde $V_B$ es el voltaje del nodo a la salida del mismo opAmp.

Además, el opAmp en la parte superior está en configuración de Buffer de Voltaje (También se puede ver como un Restador con $Z_1$, $Z_2$ y $V_2$ iguales a 0). Luego, relacionando sus voltajes, se llega a lo siguiente:

$$V_A = V_2 \cdot \left(\frac{10[k\Omega]}{R_2 + 10[k\Omega]}\right)$$

donde $V_A$ es el voltaje del nodo a la salida del mismo opAmp.

Finalmente, notamos que a través del voltaje $V^+$ del tercer opAmp no circula corriente, por lo que $V^+ = V^- = V^B$. Esto es porque no hay caída de voltaje en la resistencia cercana conectada a $V^+$ del tercer opAmp. Luego, se plantea:

$$\frac{V_A - V_B}{10[k\Omega]} = \frac{V_B - V_3}{5k[\Omega]}$$

despejando para $V_3$ se llega a:

$$V_3 = 1{,}5V_B - 0{,}5V_A$$

$$V_3 = 1{,}5V_1 \cdot \left(1 + \frac{10k\Omega}{R_1}\right) - 0{,}5V_2 \cdot \left(\frac{10[k\Omega]}{R_2 + 10[k\Omega]}\right)$$

Así, para cumplir lo solicitado en el enunciado:

$$9 = 1{,}5 + 1{,}5\frac{10[k\Omega]}{R_1}$$
$$0{,}25 = 0{,}5\left(\frac{10[k\Omega]}{R_2+10[k\Omega]}\right)$$

Despejando las resistencias para cada ecuación, se obtiene:

$$R_1 = 2[k\Omega] \text{ y } R_2 = 10[k\Omega]$$