Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Eléctrica
IEE2123 – Circuitos Eléctricos
Profesor Álvaro Lorca
Segundo Semestre 2018

Interrogación 3

Instrucciones

- Poner nombre y número de lista en cada hoja.
- Resolver cada Problema en un conjunto diferente de hojas.
- No se permite utilizar apuntes de ningún tipo. Sí se permite el uso de calculadora científica.
- Justifique adecuadamente todas sus respuestas.
- No se puede hacer preguntas. Si hay un error en el enunciado, explique por qué. Si hay algo ambiguo, explique por qué y determine un supuesto razonable para poder responder.
- Tiempo: dos horas.

Problema 1 (15 puntos)

(a) (4 puntos) Para un sistema trifásico balanceado, justifique matemáticamente por qué se cumple que la suma de los fasores que representan las corrientes de línea en las tres fases es nula.

Solución:

Una forma de demostrar que la suma fasorial de las corrientes es nula es la siguiente:
Considerando que todas las corrientes tiene la misma amplitud tenemos

$$I\angle 0^\circ = I\cos(\omega t) + jI\sin(\omega t)$$

$$I\angle 120^\circ = I\cos(\omega t + 120^\circ) + jI\sin(\omega t + 120^\circ)$$

$$I\angle -120^\circ = I\cos(\omega t - 120^\circ) + jI\sin(\omega t - 120^\circ)$$

Al descomponer y sumar cada una de las expresiones trigonométricas por la ley de suma y resta de ángulos quedaría

$$\sum I = I\cos(\omega t) + j\sin(\omega t) + I\cos(\omega t)cos(120^\circ) - I\sin(\omega t)\sin(120^\circ) + jI\sin(\omega t)\cos(120^\circ) + jI\sin(120^\circ) + I\cos(\omega t)\cos(120^\circ) + I\sin(\omega t)\sin(120^\circ) + jI\sin(\omega t)\cos(120^\circ) - jI\sin(120^\circ)\cos(\omega t)$$

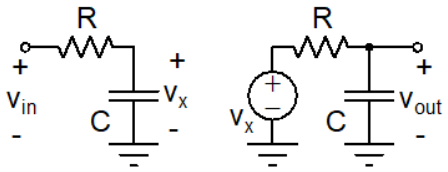
Considerando que $\cos(120^\circ) = -0.5$ y $\sin(120^\circ) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ quedaría lo siguiente:

$$I(\cos(\omega t) - \frac{\cos(\omega t)}{2} - \frac{\sin(\omega t)\sqrt{3}}{2} - \frac{\cos(\omega t)}{2} + \frac{\sin(\omega t)\sqrt{3}}{2})$$

$$+jI(\sin(\omega t) - \frac{\sin(\omega t)}{2} + \frac{\cos(\omega t)\sqrt{3}}{2} - \frac{\sin(\omega t)}{2} - \frac{\cos(\omega t)\sqrt{3}}{2})$$

$$= 0$$

(b) (3 puntos) Calcule la función de transferencia para el circuito siguiente.



Solución

La impedancia de los capacitores será $\frac{1}{sC}$ y la de las resistencias será simplemente R. Una vez que pasamos al dominio de Laplace trabajaremos con las impedancias como si fuese un circuito de resistencias en el tiempo. De esta manera, para obtener V_x haremos un divisor de tensión:

$$V_x = \frac{V_{in}}{sRC+1}$$

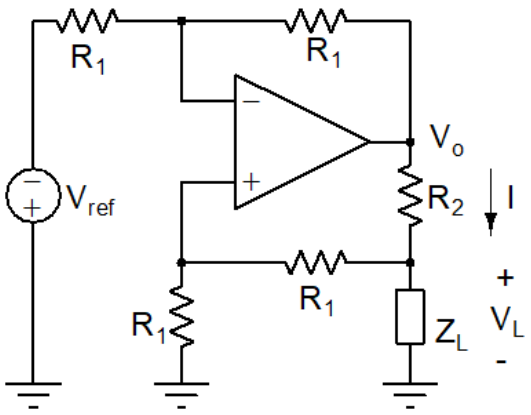
De igual manera, haremos un divisor de tensión en la segunda parte del circuito:

$$V_{out} = \frac{V_x}{sRC+1}$$

Al reemplazar V_x con la expresión anterior podemos despejar la función de transferencia.

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{1}{(sRC+1)^2}$$

(c) (8 puntos) Para el circuito siguiente, demuestre que la corriente I está dada por V_{ref}/R_2. Hint: Utilizando superposición, demuestre primero que $V_o = V_L + V_{ref}$.



Solución

Debido a que no entra corriente por el amplificador retroalimentado podemos inferir que la corriente marcada en rojo de la figura es $\frac{V_o-(-V_{ref})}{2R_1} = \frac{V_o+V_{ref}}{2R_1}$.Esta misma corriente la podemos igualar en un segmento del mismo cable (como la corriente que va de V^- a V_{ref}.

$$\frac{V_o+V_{ref}}{2R_1} = \frac{V^- + V_{ref}}{R_1}$$

$$\longrightarrow V^- = \frac{V_o - V_{ref}}{2}$$

Y como tenemos cortocircuito virtual, $V^- = V^+$. Haciendo un divisor de voltaje en la parte inferior del circuito tenemos que

$$V^+ = V_L \frac{R_1}{R_1 + R_1} = \frac{V_L}{2} = \frac{V_o - V_{ref}}{2}$$
$$\longrightarrow V_o = V_L + V_{ref}$$

Ahora, la corriente pedida en el enunciado se define como lo siguiente:

$$i = \frac{V_o - V_L}{R_2} = \frac{V_L + V_{ref} - V_L}{R_2} = \frac{V_{ref}}{R_2}$$

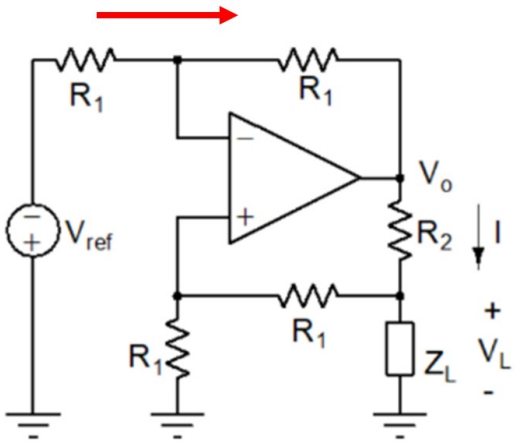
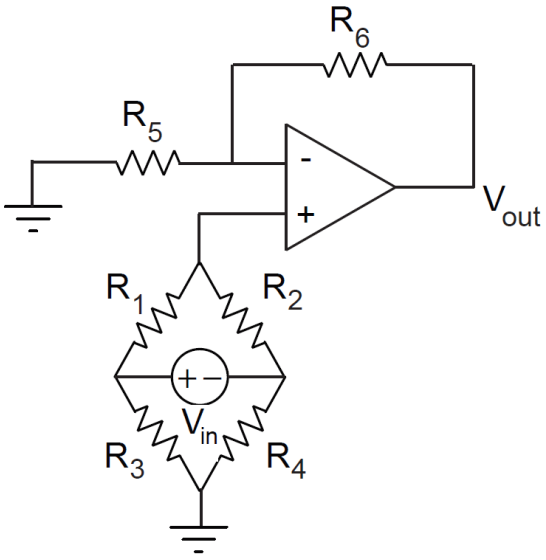


Figure 1: Circuito solución

Problema 2 (15 puntos)

Para el circuito siguiente, calcule la ganancia V_{out}/V_{in}.



Solución

Analizando el circuito vemos que hay retroalimentación negativa $V_n = V_p$. Por lo que debemos calcular una expresión para V_p que contenga a V_n, puesto que podemos relacionar V_n con V_{out}.

Mediante el análisis nodal en V_n:

$$\frac{V_n}{R_5} = \frac{V_n - V_{out}}{R_6} = 0$$

$$V_{out} = \frac{R_5 + R_6}{R_5} V_n$$

Tomando la parte inferior del circuito:
Malla 1:

$$V_{in} = i_1(R_1 + R_2)$$

Malla 2:

$$V_{in} = i_2(R_3 + R_4)$$

$$V_p = i_2 R_2 - i_2 R_4$$

Reemplazando corrientes:

$$V_p = V_{in}\left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} - \frac{R_4}{R_4 + R_3}\right)$$

Entonces,

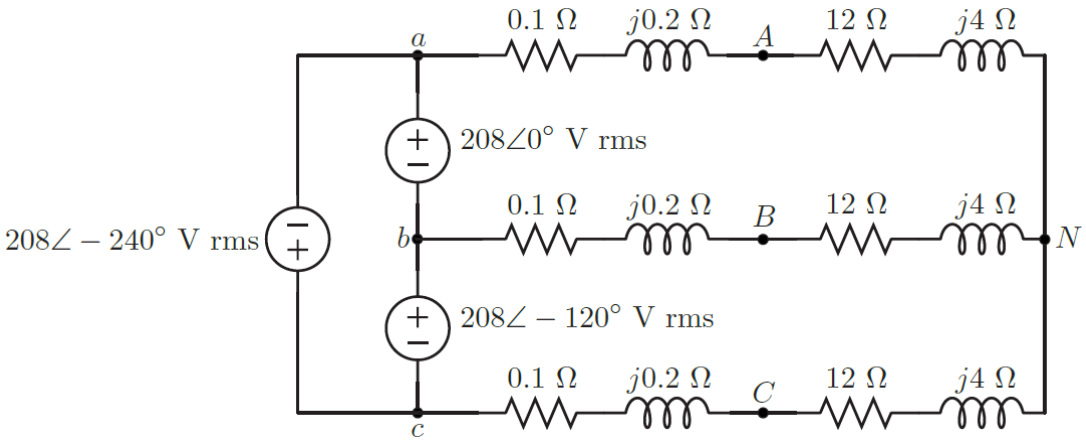
$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{R_5 + R_6}{R_5}\left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} - \frac{R_4}{R_4 + R_3}\right)$$

Alternativamente se puede obtener otro resultado correcto con otro desarrollo:

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{R_5 + R_6}{R_5}\left(\frac{R_3}{R_3 + R_4} - \frac{R_1}{R_1 + R_2}\right)$$

Problema 3 (15 puntos)

Considere el siguiente sistema trifásico balanceado.



(a) (3 puntos) Determine las corrientes de línea: I_a, I_b, I_c (como fasores en coordenadas polares).
Solución:
Como es un sistema balanceado se puede trabajar para una sola fase, y luego extenderlo a 3. Recordando las fórmulas

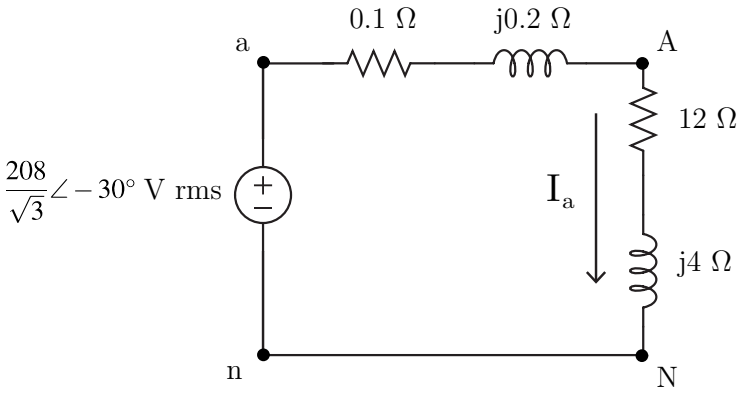
$$|V_{fase-fase}| = \sqrt{3}\,|V_{fase-neutro}|$$

$$\angle V_{fase-fase} = \angle V_{fase-neutro} + 30°$$

Luego el voltaje fase-neutro es

$$V_{an} = \frac{208}{\sqrt{3}} \angle -30^\circ \text{ V}_{rms}$$

Entonces el sistema monofásico queda de la forma:



Luego es fácil ver que la corriente de línea es

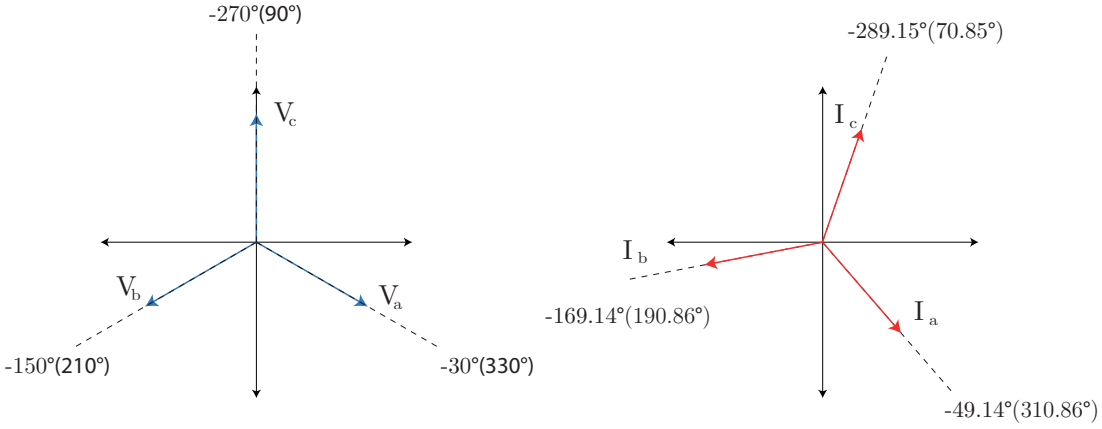
$$I_a = \frac{\frac{208}{\sqrt{3}} \angle -30^\circ}{12.1 + j4.2} = \frac{120 \angle -30^\circ}{12.8 \angle 19.14^\circ} \approx 9.37 \angle -49.14^\circ \text{ A}_{rms}$$

Extendiendo para las tres fases queda

$$I_b \approx 9.37 \angle -169.14^\circ \text{ A}_{rms}$$

$$I_c \approx 9.37 \angle 70.85^\circ \text{ A}_{rms}$$

Para evitar confusiones con los ángulos se dejan los diagramas fasoriales de los voltajes y corrientes



(b) (3 puntos) Determine los voltajes en la carga: V_{AN}, V_{BN}, V_{CN} (como fasores en coordenadas polares).
Solución:
Para obtener los voltajes en la carga se usa Ley de Ohm

$$V_{AN} = I_a \cdot Z_{carga} = (9.37 \angle -49.14^\circ)(12 + j4) = 118.52 \angle -30.70^\circ \text{ V}_{\text{rms}}$$

$$V_{BN} = 118.52 \angle -150.70^\circ \text{ V}_{\text{rms}}$$

$$V_{CN} = 118.52 \angle 89.3^\circ \text{ V}_{\text{rms}}$$

(c) (3 puntos) Determine los voltajes de línea en la carga: V_{AB}, V_{BC}, V_{CA} (como fasores en coordenadas polares).
Solución:
Realizando a conversión a fase-fase en la carga:

$$V_{AB} = \sqrt{3} \cdot 118.52\angle -30.70 + 30 = 205.28\angle -0.7^\circ \text{ V}_{\text{rms}}$$
$$V_{BC} = 205.28\angle -120.7^\circ \text{ V}_{\text{rms}}$$
$$V_{AC} = 205.28\angle 119.3^\circ \text{ V}_{\text{rms}}$$

(d) (3 puntos) Determine la potencia compleja consumida en la carga en cada una de las fases (es decir, entre A y N, entre B y N, y entre C y N) (en coordenadas rectangulares, del tipo $S = P + jQ$).
Solución:
Para obtener la potencia compleja se usa la formula $S = V \cdot I^*$, aunque cualquiera de las formulas conocidas sirve. Entonces

$$S_{AN} = V_{AN} \cdot I_a^* = (118.52\angle -30.70) \cdot (9.37\angle 49.14) = 1110.532\angle 18.44^\circ = 1053.51 + j351.27 \text{ VA}$$

Como la proporción entre ángulos se mantiene, se puede decir que

$$S_{AN} = S_{BN} = S_{CN}$$

(e) (3 puntos) ¿Cuál es el factor de potencia en la carga? ¿De qué forma se podría corregir este factor de potencia para aumentar la potencia activa consumida por la carga? Para la segunda pregunta basta con una breve explicación conceptual.
Solución:
Para calcular el factor de potencia en la carga existen varias formas de hacerlo, una de ellas es simplemente viendo el ángulo en el que se encuentra la potencia compleja, esto es:

$$p.f. = \cos(\phi) = \cos(18.44) = 0.94865$$

Y otra forma es ver la relación que existe entre S, P y Q:

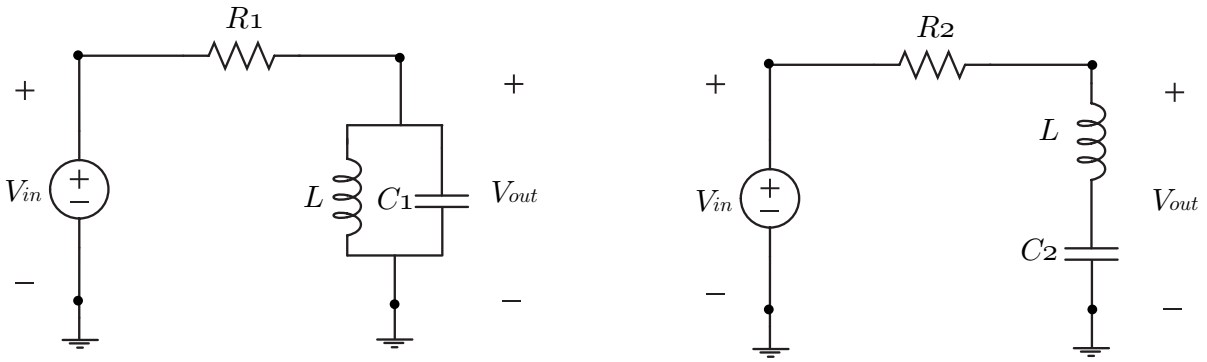
$$p.f. = \cos(\theta) = \frac{P}{|S|} = \frac{1053.51}{1110.532} = 0.9486$$

Donde se debe indicar que el factor de potencia se encuentra en **atraso**, debido a que Q es mayor que cero.

Finalmente, para corregir el factor de potencia existen muchos métodos, entre ellos colocar bancos de capacitores conmutados, condensadores síncronos, reactores, entre otros. El objetivo de esto es lograr disminuir el Q a cero, o sea, mantener el factor de potencia lo más alto posible y mejorar la calidad de potencia activa.

Problema 4 (15 puntos)

Usted desea diseñar un filtro de radio para sintonizar una señal de frecuencia $f_0 = 93.3$ MHz (la cual es una de muchas señales en el voltaje de entrada del filtro). Para esto usted dispone de las siguientes alternativas de filtros:



Donde $L = 3\mu H$ en ambos circuitos.

(a) (2 puntos) Calcule la función de transferencia para cada uno de los filtros, y explique por qué uno de éstos filtros podría servir para sintonizar la señal deseada, si se escogieran apropiadamente sus parámetros.
Solución:
Para el primer circuito tenemos:

$$V_{out} = V_{in}\frac{sL//\frac{1}{sC_1}}{R_1 + (sL//\frac{1}{sC_1})}$$

Donde:

$$sL//\frac{1}{sC_1} = \frac{sL}{1 + s^2LC_1}$$

Sumandole R_1 en el denominador y obteniendo la función de transferencia tenemos:

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = H_1(s) = \frac{sL}{s^2R_1LC_1 + sL + R_1}$$

Para el segundo circuito:

$$V_{out} = V_{in}\frac{(sL + \frac{1}{sC_2})}{R_2 + sL + \frac{1}{sC_2}}$$

Por lo que la función de transferencia en este caso es:

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = H_2(s) = \frac{s^2LC_2 + 1}{s^2LC_2 + sR_2C_2 + 1}$$

Podemos ver que la primera función $H_1(s)$ presenta un cero en el origen y un par de polos, los cuales se pueden hacer complejos conjugados y que tengan un peak de Q=100 para poder filtrar la frecuencia de 93.3 Mhz (es decir, tenemos un filtro pasa-bandas). Por otro lado, la función $H_2(s)$ tiene dos polos y dos ceros, los cuales pueden formar un filtro rechaza-banda en caso de que las raices del polo no sean complejas, lo cual no permite filtrar solo la frecuencia de interés. Por lo tanto, se elige la función $H_1(s)$ para implementar el filtro.

(b) (5 puntos) Calcule el valor del capacitor y resistor necesarios para sintonizar apropiadamente la frecuencia deseada ($f_0 = 93.3MHz$), con un factor de calidad $Q = \frac{1}{2\zeta} = 100$.
Solución:
Tenemos $H_1(s)$ expresado en forma canónica:

$$H_1(s) = \frac{sL}{s^2R_1LC_1 + sL + R_1} = \frac{s\frac{L}{R_1}}{s^2LC_1 + s\frac{L}{R_1} + 1}$$

Tenemos que ω_0 es:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC_1}} = 2\pi * 93.3 * 10^6$$

Despejando C_1:

$$C_1 = \frac{1}{\omega_0^2 L} = \frac{1}{(2\pi * 93.3 * 10^6)^2 * 3 * 10^{-6}} = 9.7 * 10^{-13}$$

Además nos piden que Q=100, y tenemos que:

$$Q = \frac{1}{2\zeta} \quad y \quad \frac{2\zeta}{\omega_0} = \frac{L}{R_1}$$

Despejando ζ y reemplazando en la ecuación de Q tenemos:

$$Q = \frac{R_1}{\omega_0 L} = 100$$

Despejando R_1 tenemos finalmente:

$$R_1 = 100\omega_0 L = 100 * 2\pi * 93.3 * 10^6 * 3 * 10^{-6} = 175.86k\Omega$$

Ahora, suponga que la interferencia de una señal vecina ubicada en una frecuencia f^*=93.8 MHz no permite la correcta sintonización, para lo cual usted utilizará el otro circuito (el que no elijió en la parte (a)), para solucionar el problema.

(c) (3 puntos) Ilustre cómo realizaría la conexión de los filtros a través de un buffer de voltaje para eliminar el problema de interferencia.
Solución:
Ambos diagramas se consideran válidos:

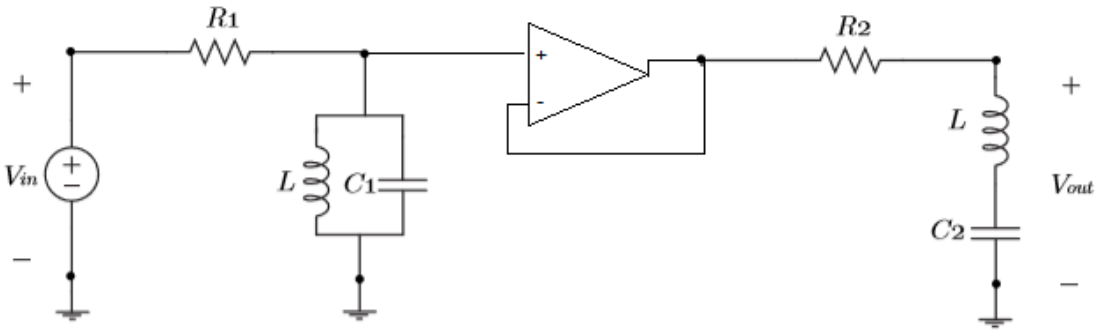


Figure 2: Forma 1: Utilizando un OpAmp ideal

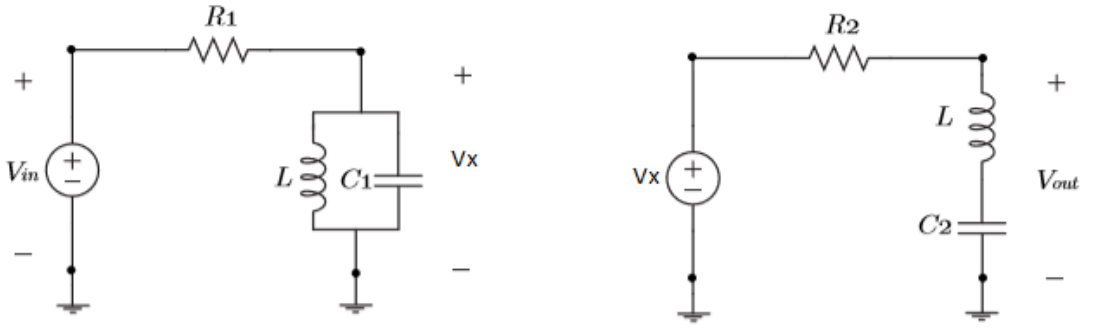


Figure 3: Forma 2: Utilizando una fuente de voltaje dependiente

(d) (5 puntos) Calcule el valor de los elementos del circuito para eliminar la interferencia de la señal vecina, sin atenuar la señal que se desea sintonizar en más de 1dB.

Solución:

La función de transferencia al utilizar ambos filtros en cascada corresponde a la multiplicación de $H_1(s)$ y $H_2(s)$:

$$H(s) == \frac{s\frac{L}{R_1}}{s^2LC_1 + s\frac{L}{R_1} + 1}\frac{s^2LC_2 + 1}{s^2LC_2 + sR_2C_2 + 1}$$

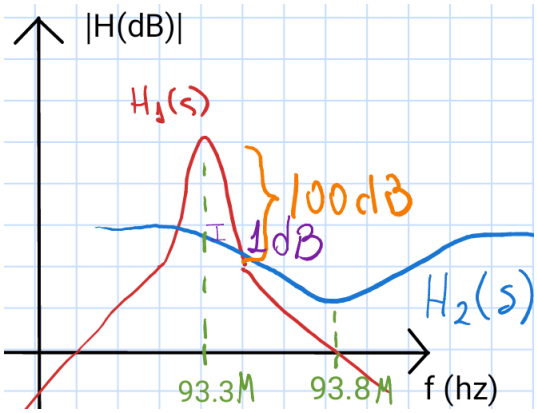


Figure 4: Diagrama de Bode de ambas funciones

Para filtrar la otra frecuencia conviene que esta sea el ω_0 que describen los polos y ceros, ya que en ese punto la amplitud será mínima, entonces:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC_2}} = 2 \cdot \pi \cdot 93.8 \cdot 10^{-6}$$

Despejando C_2:

$$C_2 = \frac{1}{\omega_0^2 L} = \frac{1}{(2 \cdot \pi \cdot 93.8 \cdot 10^{-6})^2 \cdot 3 \cdot 10^{-6}} = 9.6 \cdot 10^{-13}$$

También necesitamos que la caída que producen los polos y ceros de $H_2(s)$ en la frecuencia de interés (93.3 Mhz) sea menor a 1 dB. Entonces:

$$20log(\frac{|1 + s^2LC_2|}{|-w^2LC_2 + 1 + j\omega R_2C_2|}) > -1$$

Dado que ahí la caída queda acotada entre 0dB y -1dB. Quitando los logaritmos tenemos:

$$\frac{\sqrt{(1-\omega^2LC_2)^2}}{\sqrt{(1-\omega^2LC_2)^2 + \omega^2R_2^2C_2^2}} > 10^{\frac{-1}{20}}$$

Elevando al cuadrado y despejando R tenemos:

$$R < \sqrt{\frac{(1-\omega^2LC_2)^2(1-10^{-0.1})}{\omega^2C_2^2 10^{-0.1}}}$$

Reemplazando los valores con $\omega = 2\pi 93.3 Mrad/s$ tenemos finalmente:

$$R_2 < 9.28\Omega$$