IEE 2123 Circuitos Eléctricos
Prof. David Watts, PUC
Clase 14 y 15: RSP y Fasores

Contenidos:

Régimen sinusoidal permanente (RSP):

1. Introducción & Motivación
    1. Respuesta permanente a funciones forzantes sinusoidales
    2. Respuesta permanente a funciones forzantes exponenciales complejas
    3. Fasores extrapolando nuestro conocimiento de Z(D) y las exponenciales complejas
2. Fasores
    1. Impedancia (nuevamente) y admitancia
    2. Ejemplos de análisis fasorial
    3. Diagrama fasorial

Capítulo 10 Dorf 6ª Edición

Profesor David Watts

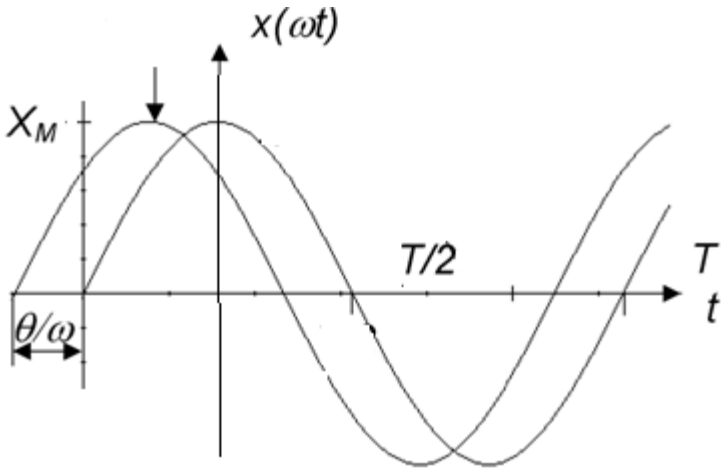
1. Introducción

- **Régimen permanente:** estado después del período transiente (respuesta que se mantiene en el tiempo).

- **Régimen sinusoidal permanente:** respuesta forzada a entrada sinusoidal, que corresponde a la forma de onda dominante en la industria de la potencia eléctrica.

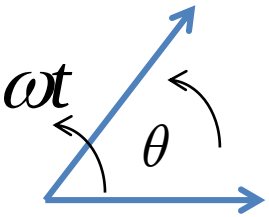
- **Análisis de circuitos:** se trabaja en el ámbito de la corriente alterna (**CA como en casa!**) y dado que nos abocaremos a la respuesta forzante, se **ignorarán** las **condiciones iniciales** y la **respuesta transitoria**.

1. Introducción:
La onda cosinusoidal



Frecuencia angular:

$$\omega = 2\pi f \left[\frac{rad}{s}\right]$$



Fase: se dice que

$$X_M \cos(\omega t + \theta) \rightarrow X_M \angle \theta°$$

Magnitud:

X_M : valor peak

$2X_M$: valor peak to peak

$\frac{X_M}{\sqrt{2}}$: valor efectivo(RMS)

adelanta a

$$X_M \cos(\omega t) \rightarrow X_M \angle 0°$$

en θ radianes o grados?

Precauciones y mas ejemplos

2. Respuesta permanente a funciones forzantes sinusoidales

Analizaremos la respuesta en régimen permanente de un circuito RL simple mediante dos métodos de la materia anterior del curso:

1. **La ecuación diferencial directamente**.

2. **La función forzante exponencial compleja**.

Luego lo realizaremos con **Fasores (recomendado)**!

A propósito, todo en coseno: $\text{sen } \omega t = \cos(\omega t - \pi/2)$

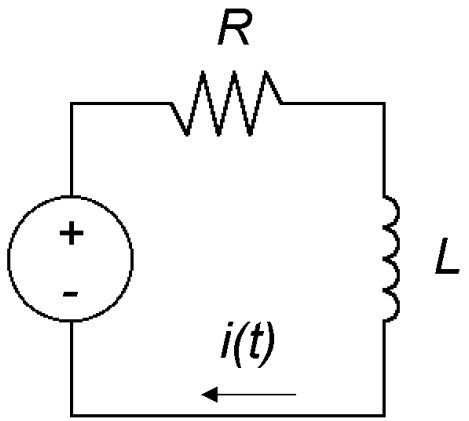
2. Rpta Permanente a F.F. Sinusoidales:

Ec. Diferencial directamente.

Respuesta a una fuente sinusoidal:

$$i(t) = A\cos(\omega t) + Bsen(\omega t)$$

¿i(t)?



$v(t) = V_M \cos \omega t$

$\dot{V} = V_M \angle 0°$

Ecuación diferencial :

$$L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = V_M \cos(\omega t)$$

Reemplazando:

$$L\left(-A\omega sen(\omega t) + B\omega\cos(\omega t)\right) + R\left(A\cos(\omega t) + Bsen(\omega t)\right) = V_M \cos(\omega t)$$

Luego, A y B resultan d e igualar coeficientes de seno y coseno:

$LBw + RA = V_M$

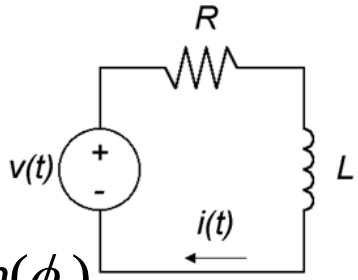
$-LAw + RB = 0$

$$B = \omega L V_M / \left(R^2 + \omega^2 L^2\right)$$

$$A = RV_M / \left(R^2 + \omega^2 L^2\right)$$

$$i(t) = \left(\frac{RV_M}{R^2 + \omega^2 L^2}\right)\cos(\omega t) + \left(\frac{\omega L V_M}{R^2 + \omega^2 L^2}\right)sen(\omega t)$$

2. 2. Rpta. Permanente a F.F. Sinusoidales:
Ec. Diferencial directamente.



Recordamos:

$$\cos(x+y)=\cos(x)\cos(y)-sen(x)sen(y)$$

Entonces:

$$I_M\cos(\omega t+\phi_i)=I_M\cos(\omega t)\cos(\phi_i)-I_M sen(\omega t)sen(\phi_i)$$

$$I_M\cos(\phi_i)=\left(\frac{RV_M}{R^2+\omega^2L^2}\right);\ I_M\,sen(\phi_i)=-\left(\frac{\omega LV_M}{R^2+\omega^2L^2}\right)$$

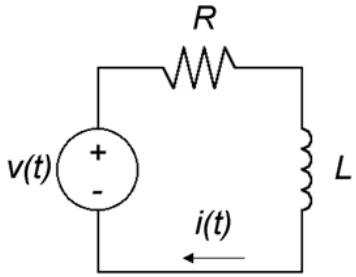
$$\tan(\phi_i)=-\frac{\omega L}{R}\rightarrow\phi_i=-\text{Arctan}\left(\frac{\omega L}{R}\right)$$

$$I_M^2=\frac{V_M^2}{\left(R^2+L^2\,\omega^2\right)}\rightarrow I_M=\frac{V_M}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}$$

Finalmente:

$$\boxed{i(t)=\frac{V_M}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\cos\left(\omega t-\text{Arctan}\left(\frac{\omega L}{R}\right)\right)}$$

2. 2. Rpta. Permanente a F.F. Sinusoidales:
Función exponencial compleja.



Consideremos la función compleja:

$$\hat{v}_f = V_M\, e^{j\omega t} = V_M(\cos\omega t + j\sin\omega t)$$

La función sinusoidal forzante es : $\Re\left\{\hat{v}_f\right\} = V_M\cos\omega t$

y el resultado será obtenido como: $i(t) = \Re\left\{\hat{i}\right\}$

Superposición!

- **La respuesta permanente está dada por:**

$$\hat{i} = Ae^{j\omega t} \quad (A \in \mathbb{C})$$

- **Reemplazando:** $L\dfrac{di(t)}{dt} + Ri(t) = V_M e^{j\omega t}$

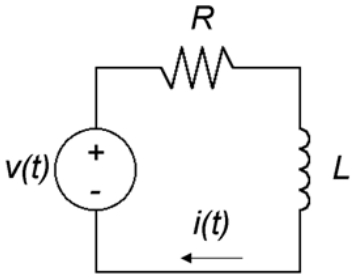
$$(j\omega L + R)Ae^{j\omega t} = V_M\, e^{j\omega t} \rightarrow A = \frac{V_M}{(R + j\omega L)}$$

2. Rpta. Permanente a F.F. Sinusoidales

Función exponencial compleja.

- **A puede ser escrito como:**

$$A = \frac{V_M}{(R + j\omega L)} \cdot \frac{(R - j\omega L)}{(R - j\omega L)} = \frac{V_M}{R^2 + \omega^2 L^2} \cdot (R - j\omega L)$$



- **Expresamos el número complejo en su forma polar:**

$$R - j\omega L = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}\ e^{-j\,\mathrm{Arc\,tan}(\omega L / R)}$$

- **Entonces:**

$$A = \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}\ e^{-j\,\mathrm{Arctan}(\omega L / R)}$$

$$\hat{i}(t) = \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}\ e^{-j(\omega t - \mathrm{Arctan}(\omega L / R))}$$

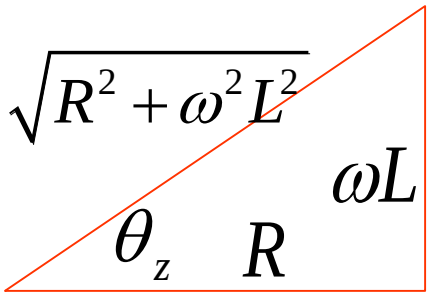
2. Introducción a Fasores

Función exponencial compleja.

Lo que **se acaba de calcular** es **la misma expresión de *i(t)*** determinada a través de la ecuación diferencial, si se toma la parte real de $\hat{i}(t)$, o sea:

$$i(t) = \Re\left\{\hat{i}(t)\right\} \qquad i(t) = \underbrace{\frac{V_M}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}}_{I_M} \cos\left(\omega t - \underbrace{\text{Arctan}\left(\frac{\omega L}{R}\right)}_{\theta_i}\right)$$

- **Conclusiones**
  - Usar números complejos en coordenadas polares para calcular respuestas en régimen permanente de circuitos (lineales) excitados sinusoidalmente es **mucho más ventajoso y fácil**.
  - La frecuencia de v(t) e i(t) es la misma
  - Ambas, v(t) e i(t), difieren sólo en magnitud y fase
  - Fácil si recordamos impedancia operacional Z(D)
  - Ley de ohm con Z(D) → Z(jω) ó D → jω

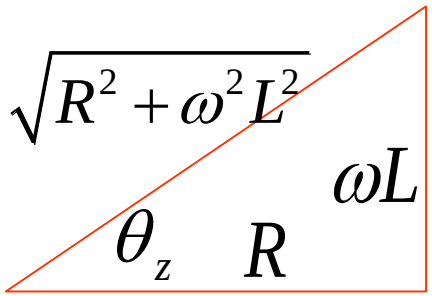


3. Introducción a Fasores
Función exponencial compleja.

- **Resolvamos a mano para motivar el concepto de fasor**
  - Utilizando la ley de Ohm con Z(D) con excitación exponencial, es decir, utilizando con Z(D) → Z(jω),
  - Reemplazando D → jω
  - Fijándonos en la parte real…

1. Ahora olvidemos la exponencial compleja que se repite siempre y sólo usemos amplitudes y desfases
2. Dibujemos el triangulo de impedancia y calculemos Zeq
3. Aplicamos ley de Ohm I=V/Z
4. Observamos la parte real

(Trabajo en la pizarra!)



FASORES

La forma simple de calcular la respuesta permanente (particular) a excitaciones sinusoidales

3. Fasores

Definiciones y Explicaciones:

- Número complejo en coordenadas polares que típicamente representa una corriente o voltaje

$$a + j \cdot b \leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} \angle \text{Arctan}\left(\frac{b}{a}\right)$$

- Queda definido por un valor de magnitud (amplitud) y por una fase (ángulo).
- Es “independiente” de la frecuencia angular (ω);
- Su parte real representa un valor físico, Representa una forma de onda sinusoidal.

$$A\angle\phi \text{ representa } \Re\left\{ Ae^{j(\omega t+\phi)} \right\} = A\cos(\omega t + \phi)$$

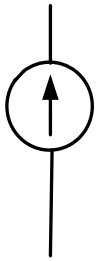
$$X_M \cos(\omega t + \theta) \leftrightarrow \dot{X} = X_M \angle\theta \ peak$$

Dominio del tiempo

Dominio de la frecuencia

3. Fasores

Representación Fasorial (coseno):



$$i(t) = 10\cos(2\pi 50t + 30°) \leftrightarrow \dot{I} = 10\angle 30° A\ peak$$

Y si es un seno?

El fasor representa una función coseno. Para encontrar la representación fasorial de funciones seno hay que transformarlas primero a coseno: $sen(x) = \cos(x - 90°)$



$$v(t) = 6sen(20t + 120°) \leftrightarrow \dot{V} = 6\angle 30° V\ \ peak$$

Operatoria Fasorial:

$$A\angle\theta \cdot B\angle\phi = AB\angle\theta + \phi$$

$$\frac{A\angle\theta}{B\angle\phi} = \frac{A}{B}\angle\theta - \phi$$

3. Fasores:

Relaciones fasoriales para elementos circuitales.

Los fasores permiten expresar las **relaciones voltaje-corriente** de inductancias y condensadores de la siguiente manera.

Con funciones forzante del tipo: $v(t) = V_M \, e^{j(\omega t + \theta)}$ se tiene: $D \rightarrow j\omega$

- **Resistencia:** $v(t) = Ri(t) \rightarrow \dot{V} = R\dot{I}$

  El voltaje está en fase con al corriente.

- **Inductancia:** $v(t) = L\dfrac{di(t)}{dt} \rightarrow \dot{V} = j\omega L\dot{I}$

La corriente **atrasa** al voltaje en 90°.

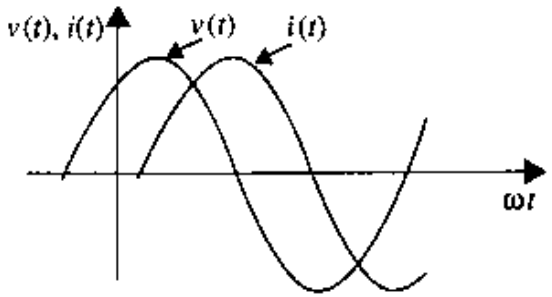
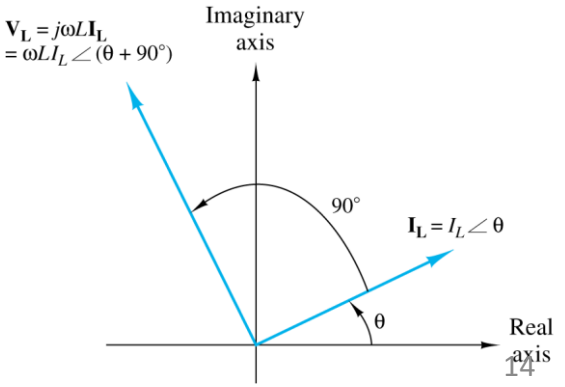




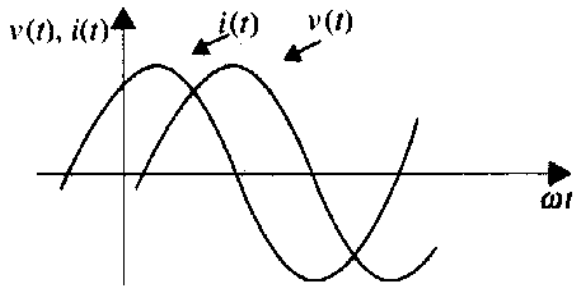
Diagrama fasorial inductancia



3. Fasores:
Relaciones fasoriales para elementos circuitales.

- **Condensador:** $i(t) = C\dfrac{dv(t)}{dt} \rightarrow \dot{I} = j\omega C\dot{V}$

La corriente **adelanta** al voltaje en 90°.



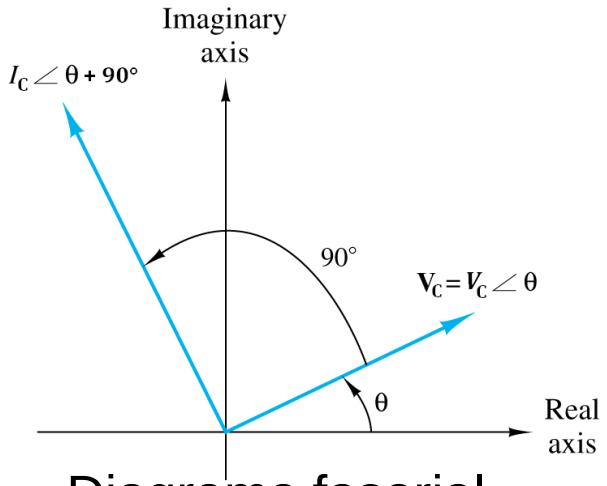


Diagrama fasorial condensador

El **diagrama fasorial** presenta las relaciones entre las distintas variables (fasores) del circuito.

4. Impedancia y admitancia

$$\dot{V} = Z\dot{I}$$

- **Impedancia (Z):** concepto equivalente al de la resistencia, pero definida de manera más general, y para régimen sinusoidal permanente.

- **Unidadades:** Z se mide en Ohm.

- Z es un número complejo, pero **no es un fasor** (depende de la frecuencia).

Resistencia: $Z_R = R = R + j \cdot 0[\Omega]$

Inductancia: $Z_L = j\omega L = 0 + j \cdot \omega L = jX_L[\Omega], X_L > 0$

Condensador: $Z_C = \frac{1}{j\omega C} = 0 + \frac{-j}{\omega C} = jX_C[\Omega], X_C < 0$

4. Impedancia y admitancia

$$Z = R + j \cdot X \left[\Omega\right]$$

Si X > 0, Z es inductiva. (viene de jωL)
Si X < 0, Z es capacitiva. (viene de -j/(ωC)
Si R = 0, Z es reactiva pura, (inductiva o capacitiva)
Si X = 0, Z es resistiva pura.

- **Admitancia:** $$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{R + j \cdot X} = G + j \cdot B$$

  Donde G es la conductancia y B la susceptancia.

- **Unidadades:** Y se mide en siemens (“Mho”)

4. Impedancia y admitancia:
Operatoria.

Tratamiento de la Z es análogo al de R

- **Impedancias en serie:**

$$Z_{eq} = Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n$$

- **Impedancias en paralelo:**

$$\frac{1}{Z_{eq}} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \cdots + \frac{1}{Z_n}$$

- **Delta – estrella:**

……..

5. Análisis fasorial: Paso a Paso

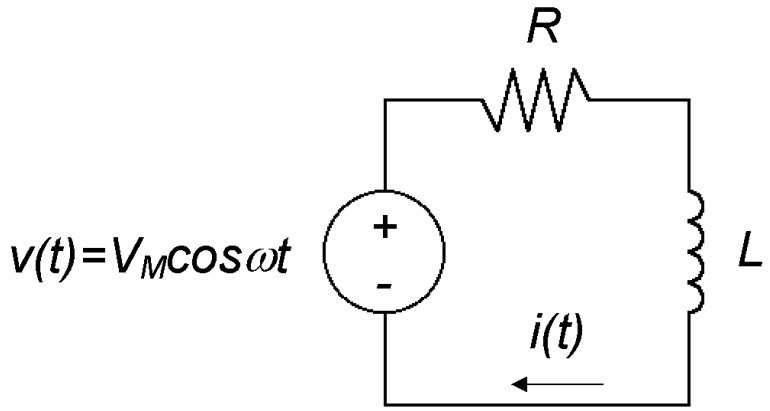
Pasos a seguir:

1. **Paso 1:** Traspasar el circuito del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia.
   - Escribir fasores (magnitud y la fase de la fuente cosenoidal)
   - Escribir las impedancias Z(jw) de R, L y C

2. **Paso 2:** Resolver las cantidades deseadas fasorialmente, utilizar las mismas técnicas conocidas en el dominio del tiempo (pero ahora con números complejos).
   - L. de Ohm, LVK, LCK, Mallas, Nodos, Th-No, Transformación de fuentes, etc.

3. **Paso 3:** Llevar la solución desde el dominio de la frequencia al dominio del tiempo (i.e. escribir solución como un coseno nuevamente)

5. Todo de nuevo con fasores!

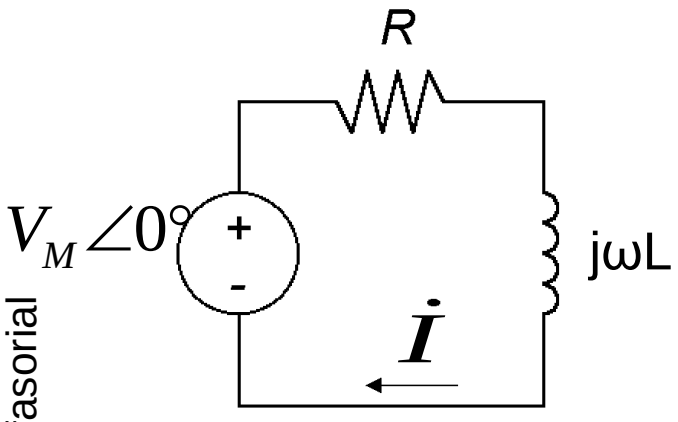


tiempo → frecuencia

$$R \rightarrow Z_R = R$$

$$L \rightarrow Z_L = j\omega L$$

$$v(t) \rightarrow V_M \angle 0° = \dot{V}$$



$$\dot{I} = \frac{\dot{V}}{Z_{eq}} = \frac{V_M \angle 0°}{Z_R + Z_L} = \frac{V_M \angle 0°}{R + j\omega L}$$

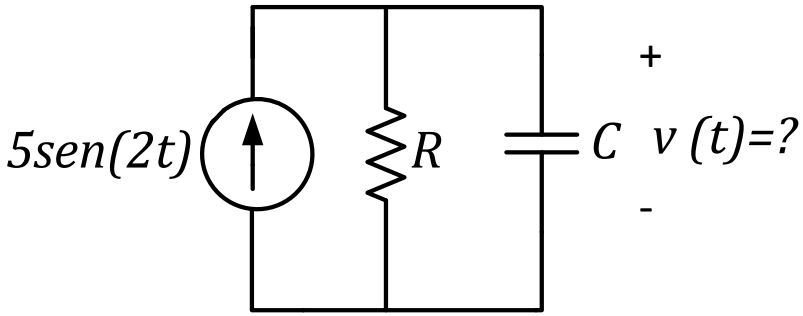
$$= \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \angle 0° - arctg\left(\frac{\omega\ L}{R}\right)$$

$$\rightarrow i(t) = \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos\left(\omega t - arctg\left(\frac{\omega\ L}{R}\right)\right)$$

Análisis fasorial

5.1. Ejemplos: Calcular *v(t)*

Ejemplo 1, filtro pasa bajos



- **Calcular v(t) si:** $R = 10[\Omega]; \quad C = 2[F]$
- **Paso 1 (t→ω):**

$$i(t) = 5sen(2t) \leftrightarrow \dot{I} = 5\angle -90° = -5j$$

$$\omega = 2 \qquad sen(x) = \cos(x - 90°)$$

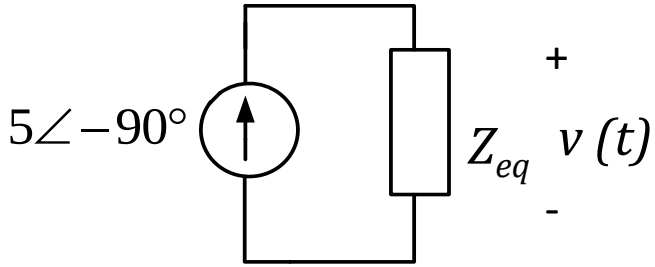
$$Z_R = R = 10; \quad Z_C = \frac{-j}{\omega C}$$

- **Paso 2 (Resolver): Ley de Ohm**

$$Z_{eq} = \left(\frac{1}{Z_R} + \frac{1}{Z_C} \right)^{-1} = \frac{R}{1 + j\omega CR}$$

$$\dot{V} = Z_{eq}\dot{I} = \frac{R}{1 + j\omega CR} \cdot \underbrace{5\angle -90°}_{-5j}$$

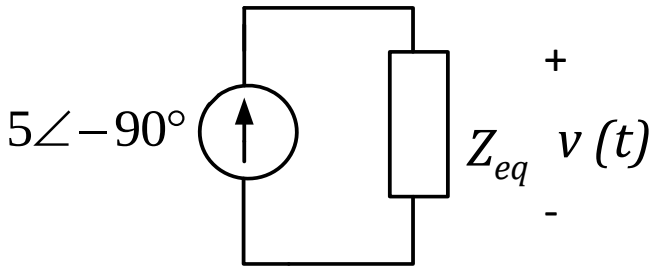
- **Reemplazando:**



5.1. Ejemplos:
Ejemplo 1, filtro pasa bajos

$$\dot{V} = \frac{10 \cdot (-5j)}{1 + j \cdot 2 \cdot 2 \cdot 10} = \frac{-50j}{1 + j40} = \frac{-50j(1 - j40)}{1 + 40^2} = -\frac{1}{1601}(2000 + 50j)$$

$$\dot{V} = 1{,}25 \angle -178{,}57^{o}$$



- **Paso 3 (ω→t):**

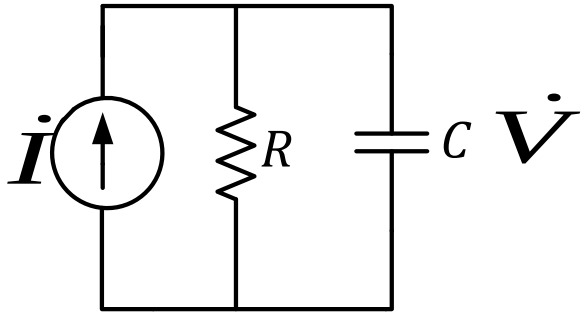
$$v(t) = 1{,}25\cos(2t - 178{,}57^{o})V_{peak}$$

$(v(t) = 1{,}25\,\mathrm{sen}(2t - 88{,}57^{o})\mathrm{V}_{\mathrm{peak}})$

5.1. Ejemplos:
Ejemplo 1, filtro pasa bajos

- **¿Por qué filtro pasa bajos?**

  Tenemos:



$$\omega \approx 0 \rightarrow Z_{eq} = R \rightarrow \dot{V} = R\dot{I}$$

$$0 < \omega << \infty \rightarrow Z_{eq} = \frac{R}{1 + j\omega CR} \rightarrow \dot{V} = \frac{R}{1 + j\omega CR} \cdot \dot{I}$$

$$\omega \approx \infty \rightarrow Z_{eq} = 0 \rightarrow \dot{V} = 0$$

El circuito sólo deja pasar las señales de bajas frecuencias.

5.1. Ejemplos:
Ejemplo 2

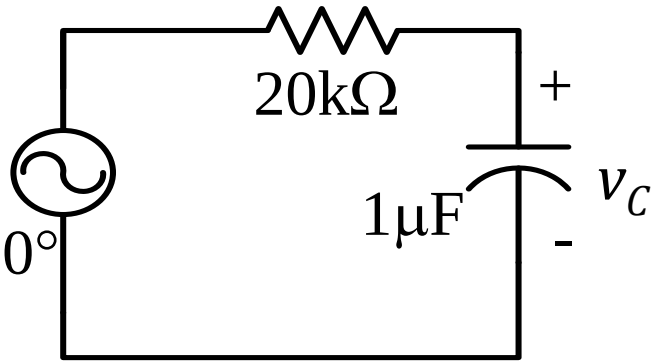
- **Paso 1:**

$$Z_R = 20k = 20000\angle 0°$$

$$Z_C = \frac{1}{j337 \cdot 1\mu} = 2967{,}35\angle -90°$$

$¿v_C?$

$\omega = 377\ rad/s$



- **Paso 2:** por divisor de voltaje:

$$\dot{\mathbf{V}}_C = 10\text{V}\angle 0° \left(\frac{2967{,}35\angle -90°}{2967{,}35\angle -90° + 20000\angle 0°} \right) = 1{,}47\angle -81{,}56°$$

- **Paso 3:**

$$v_C(t) = 1{,}47\cos(377t - 81{,}56°)V$$

Notar que este circuito también corresponde a un filtro pasa bajos.

¿Qué pasa si se intercambia R por C y se mide el voltaje en R?

5.1. Ejemplos:
Ejemplo 3

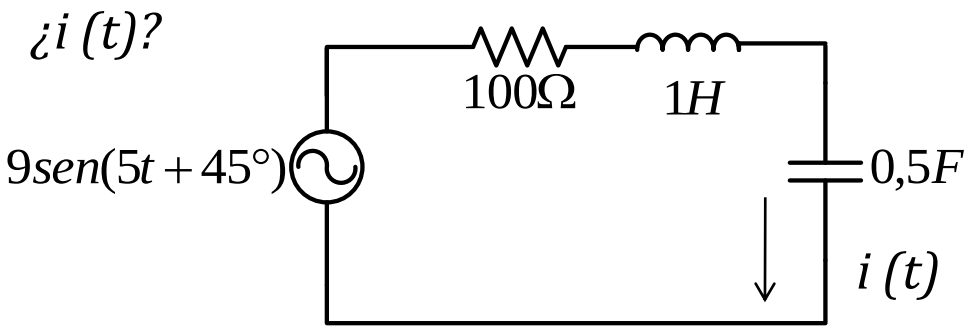
- **Paso 1:**

$$9sen(5t+45°) \leftrightarrow 9\angle -45°$$

$$Z_C = \frac{1}{j\cdot 5\cdot 0{,}5} = \frac{1}{j\cdot 2{,}5}$$

$$Z_R = 100$$

$$Z_L = j\cdot 5\cdot 1 = j\cdot 5$$



- **Paso 2:**

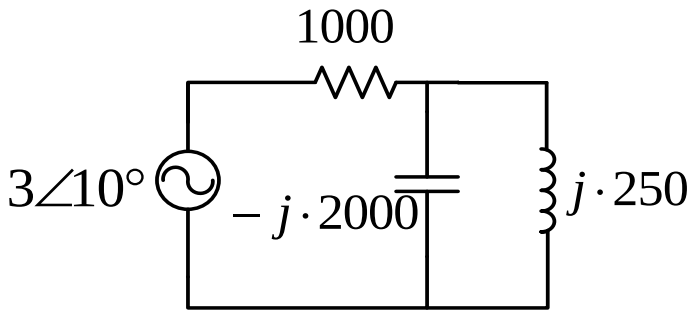
$$\dot{I} = \frac{\dot{V}}{Z_{eq}} = \frac{9\angle -45°}{\frac{1}{j\cdot 2{,}5} + 100 + j\cdot 5} = 0{,}09\angle -48°$$

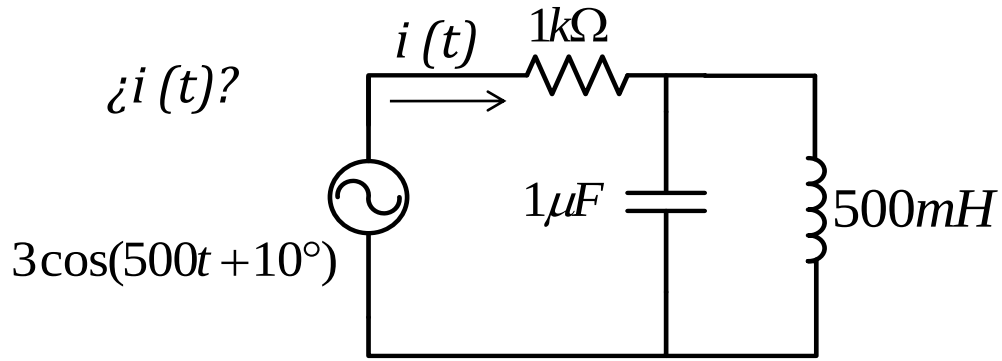
- **Paso 3:**

$$i(t) = 0{,}09\cos(5t - 48°)\,A_{peak}$$

5.1. Ejemplos:
Ejemplo 4

- **Paso 1:**





- **Paso 2:**

$$Z_{eq} = R + C \,//\, L = 1000 + \frac{(-j2000)(j250)}{j250 - j2000} = 1040\angle 15{,}9°$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{V}}{Z_{eq}} = \frac{3\angle 10°}{1040\angle 15{,}9°} = 2{,}88\angle -5{,}9° mA_{peak}$$

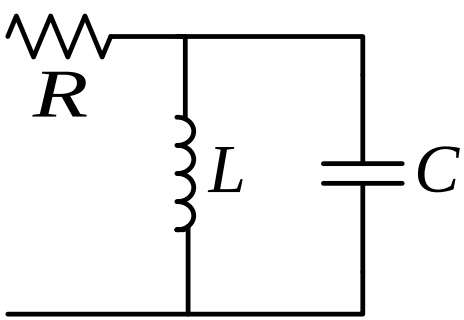
- **Paso 3:**

$$i(t) = 2{,}88\cos(500t - 5{,}9°) mA_{peak}$$

5.1. Ejemplos:
Ejemplo 5, filtro pasa banda

- **Paso 1 y 2:**

¿$\left|Z_{eq}(\omega)\right|$?



$$Z_{eq} = Z_R + \left(Z_C \,//\, Z_L\right) = R + \left(\frac{1}{j\omega C} \,//\, j\omega L\right)$$

$$Z_{eq} = R + \frac{\frac{1}{j\omega C}\left(j\omega L\right)}{\frac{1}{j\omega C} + j\omega L} = R + \frac{j\omega L}{1-\omega^2 LC}$$

$$\left|Z_{eq}(\omega)\right| = \sqrt{R^2 + \left(\frac{\omega L}{1-\omega^2 LC}\right)^2}$$

Tomamos, a modo de ejemplo:

$$R = 1k\Omega;\ C = 120\mu F;\ L = 600mH$$

5.1. Ejemplos:
Ejemplo 6, Ejemplos con nodos, mallas, Th-No …

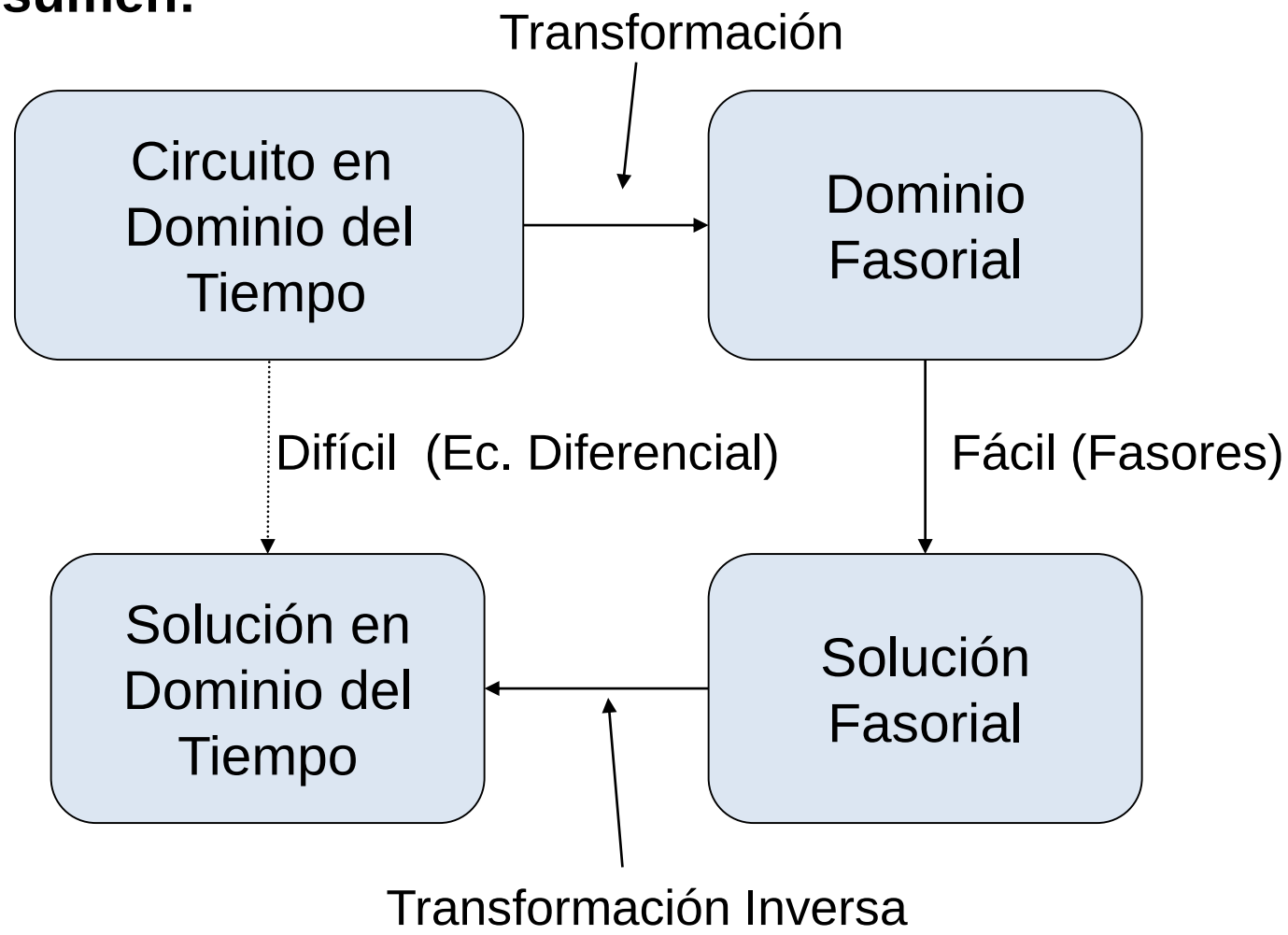
- Resolver en la pizarra ejemplos mas complejos utilizando todas las técnicas.
- Buenos ejemplos resueltos utilizando el Libro **Nilsson – Riedel, Nilsson Riedel**

  - Métodos de nodos
  - Métodos de mallas
  - Thévenin y Norton, Pág. 329
  - Transformación de fuentes
  - ….

  - Link: https://cjitseee.files.wordpress.com/2012/12/electric-circuits-analysis.pdf

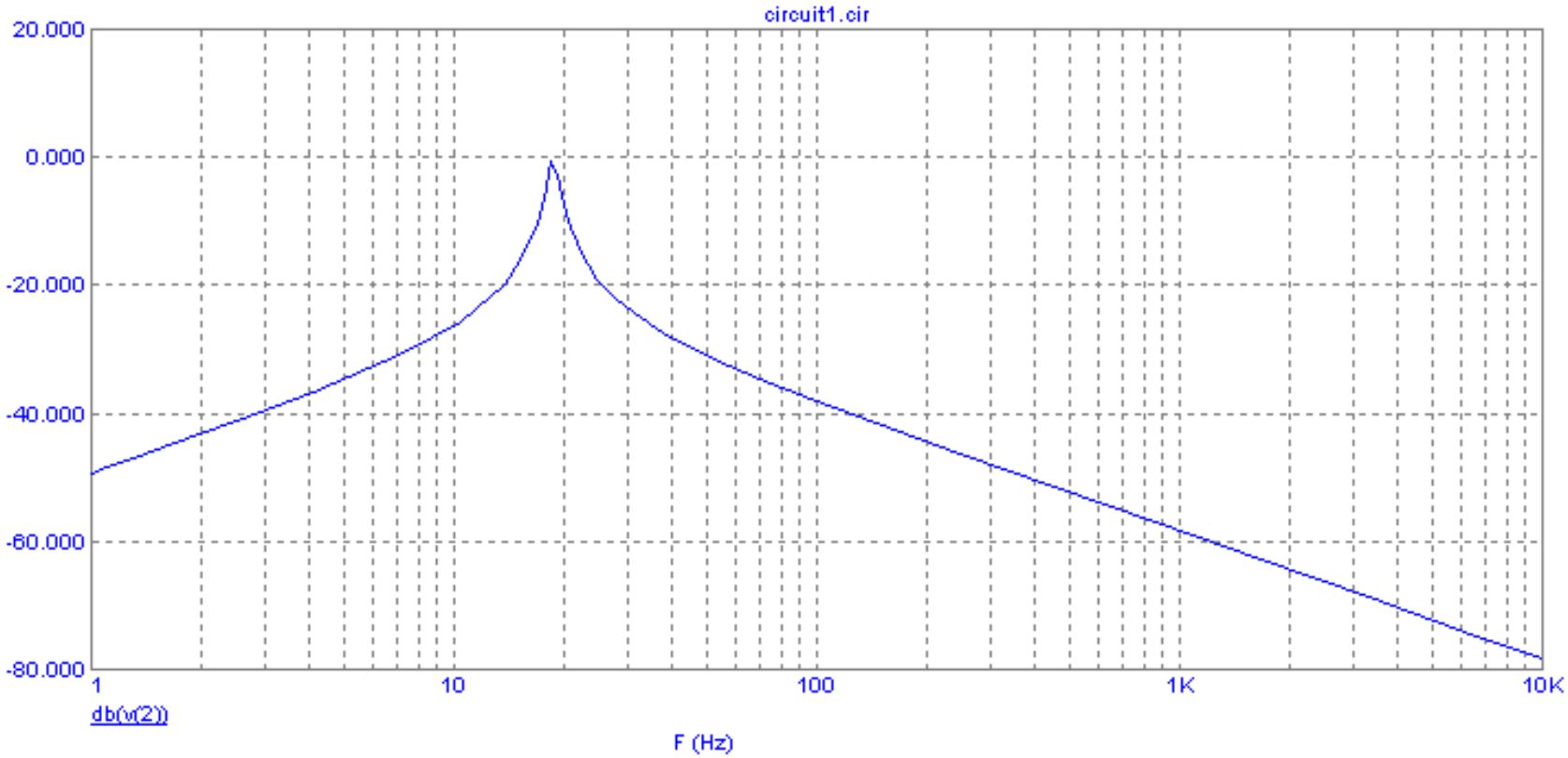
Resumen

En resumen:



5.1. Ejemplos:
Ejemplo 5, filtro pasa banda

- **Diagrama de Bode del filtro pasa banda:**



Apéndice

Identidades trigonométricas.

$$-\sin(\omega \cdot t) = \sin(\omega \cdot t \pm 180°)$$

$$-\cos(\omega \cdot t) = \cos(\omega \cdot t \pm 180°)$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 1 - 2\sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1$$

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$$

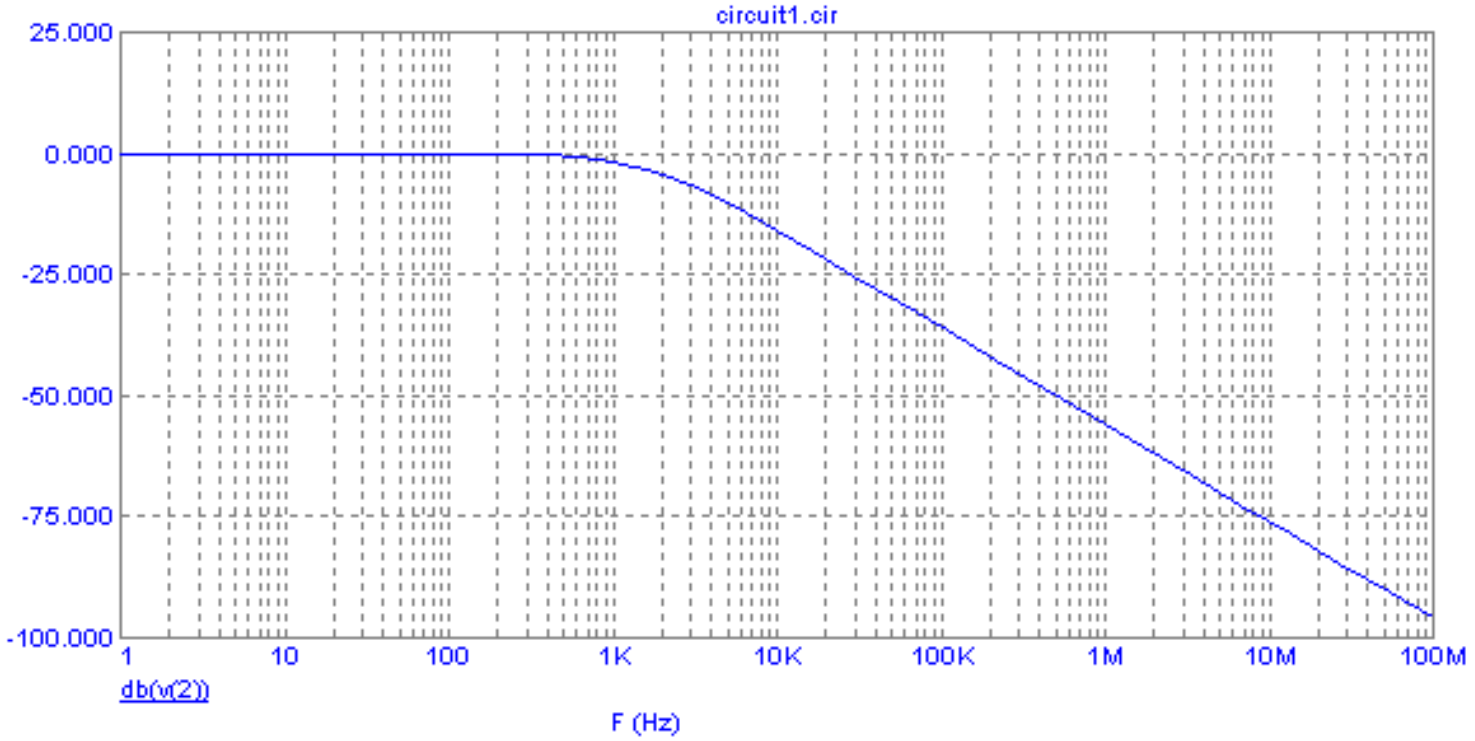
$$\cos(x)\sin(y) = \frac{1}{2}\left[\sin(x+y) - \sin(x-y)\right]$$

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\left[\cos(x-y) + \cos(x+y)\right]$$

$$\sin(x)\sin(y) = 2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

5.1. Ejemplos:
Ejemplo 1, filtro pasa bajos

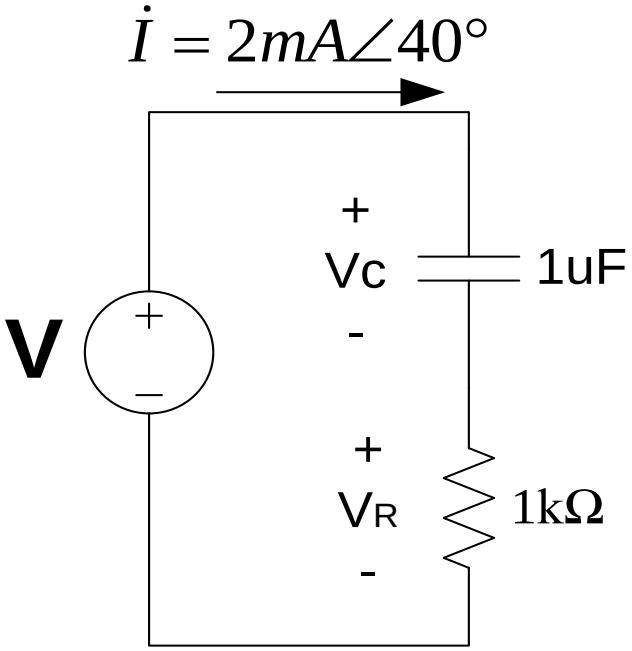
- **Diagrama de Bode del filtro pasa bajos:**



- Eje X: frecuencia
- Eje Y: $-20\log(|Z_{eq}|)$

Diagrama Fasorial
Ejemplo

- Ejemplo:
  - Dibuje en un diagrama fasorial los siguientes voltajes y verifique que LVK se cumple.



I = 2mA ∠ 40°
V_R = 2V ∠ 40°
V_C = 5.31V ∠ -50°
V = 5.67V ∠ -29.37°

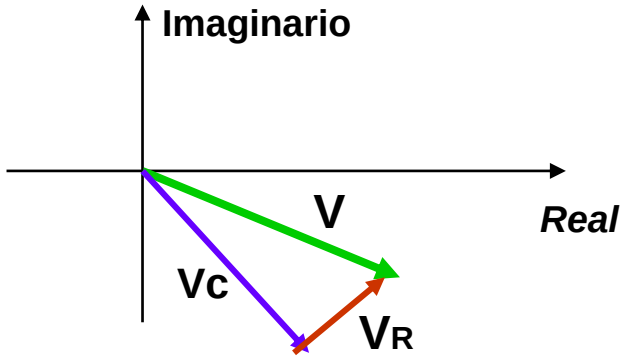
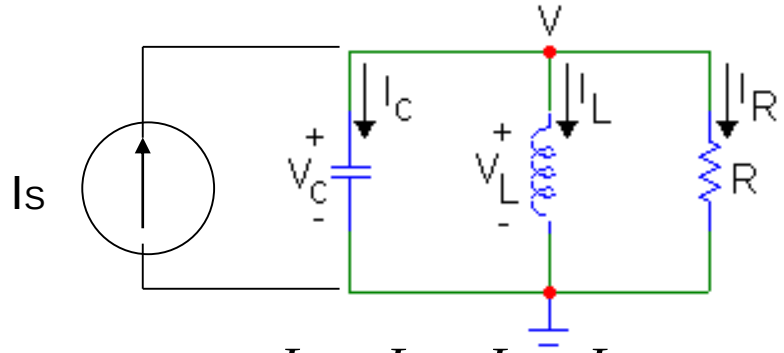


Diagrama Fasorial
Ejemplo

- Otro ejemplo: *Analizar el diagrama fasorial del siguiente circuito*



V: **fasor voltaje de referencia (con ángulo de fase 0º)**

Se miden todos los voltajes y corrientes c/r a V:

Se cumple: $I_S = I_R + I_L + I_C$

$$I_S = \frac{V}{R} + \frac{V}{j\omega L} + \frac{V}{1/j\omega C}$$

Como $V = V_M \angle 0°$, entonces: $I_S = \frac{V_M \angle 0°}{R} + \frac{V_M \angle -90°}{\omega L} + \omega C V_M \angle 90°$

El diagrama fasorial muestra la relación de fase entre V, I_R, I_L, I_C e I_S: Falta Trasladar!

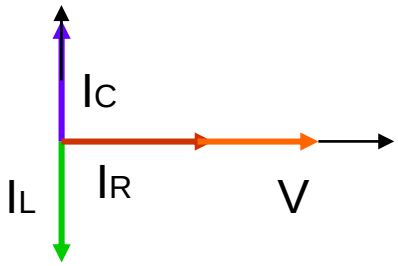


Diagrama Fasorial
Ejemplo

- Para valores pequeños de w, la magnitud de IL es mayor que la magnitud de IC.
- Para valores grandes de w IL < IC.
- La variación de w hace mover a IS en torno al lugar geométrico que pasa por el extremo de IR.

$$I_S = \frac{V}{R} + \frac{V}{j\omega L} + \frac{V}{1/j\omega C}$$

I_S esta en fase con V cuando $I_C = -I_L$

$$\omega L = 1/\omega C \rightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

- Observaciones:
  - Desde el punto de vista gráfico, los fasores se manipulan como vectores.
  - No se pierde generalidad asignando a V un ángulo de 0º. Si se asignara 30º, se rotaría el diagrama fasorial en 30º (ya que todo se mide c/r a V).

