**ESCUELA DE INGENIERIA**
**DEPARTAMENTO DE INGENIERIA ELECTRICA**
**IEE 2123**
**Circuitos Eléctricos**
**Segundo Semestre 2025**

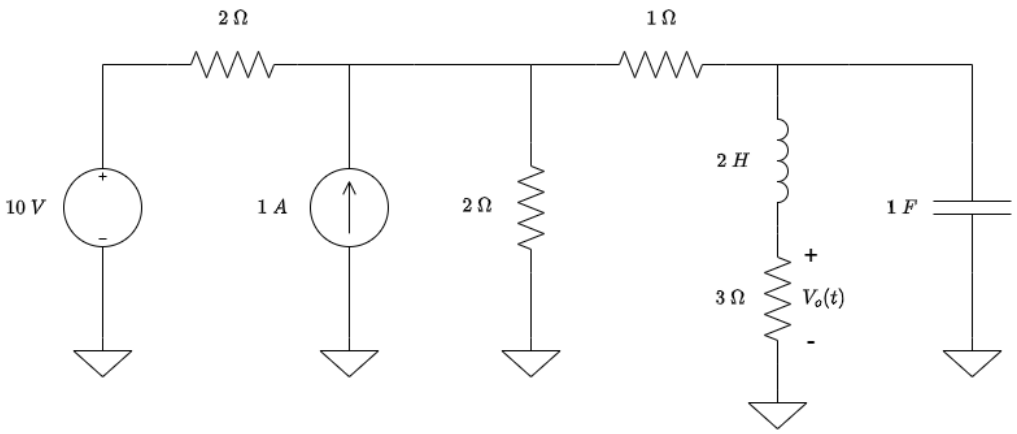
# Tarea 6

Fecha Entrega: Miércoles 15 de Octubre hasta las 18:00 Hrs.

- La tarea debe ser entregada en un archivo `.pdf` y cargada en el cuestionario de Canvas habilitado, antes del plazo. El formato del archivo debe ser `T6_Apellido_Nombre.pdf`
- Debe indicar claramente su desarrollo en cada ejercicio, puesto que problemas sin desarrollos no serán considerados corregidos.
- Tareas con algún problema en blanco no serán consideradas y obtendrán la nota mínima
- Las tareas deben ser entregas en en algún editor de texto como Word o LaTeX. En particular, se recomienda LaTeX(Overleaf) por su facilidad para manejar ecuaciones.
- Libros, papers o cualquier material usado debe ser referenciado apropiadamente. Material no debidamente referenciado será penalizado mediante descuentos en la nota.
- Esta tarea tiene como objetivos la revisión de ciertos temas específicos vistos en clases, los cuales son indicados en el apartado "Tema de la Tarea". La utilización de métodos distintos a los solicitados en cada ejercicio no está permitido, y resultarán en la no corrección del ejercicio.
- En caso de utilizar herramientas de inteligencia artificial, estas solo deben emplearse como apoyo en la búsqueda de información o en la redacción, sin incluir directamente en las respuestas una reproducción literal del contenido generado. Además, no se debe proporcionar a la IA la pregunta ni una variación de esta como instrucción directa. **En el caso de usar IA sin la debida citación, se asignará nota 1.0 en la tarea.**
- Se atenderán dudas mediante Foro en Canvas UC, el cual estará habilitado hasta 1 día antes de la fecha de entrega de la tarea.

## Problema 1 (12 pts)

Considere el siguiente circuito, para el cual se asumen condicionales iniciales nulas para el inductor (corriente cero) y capacitor (voltaje cero):




Basado en lo anterior, y **sin usar transformada de Laplace**, se pide que:

(a) Encuentre la ecuación diferencial que describe a $V_o(t)$ para $t \geq 0$ [4 pts]

(b) Resuelva la ecuación diferencial y determine $V_o(t)$ para $t \geq 0$ [8 pts]

**Solución (12 pts):**

a) En primer lugar, para simplificar el circuito se emplea transformación de fuentes para convertir la fuente de voltaje en una de corriente, como se muestra a continuación:

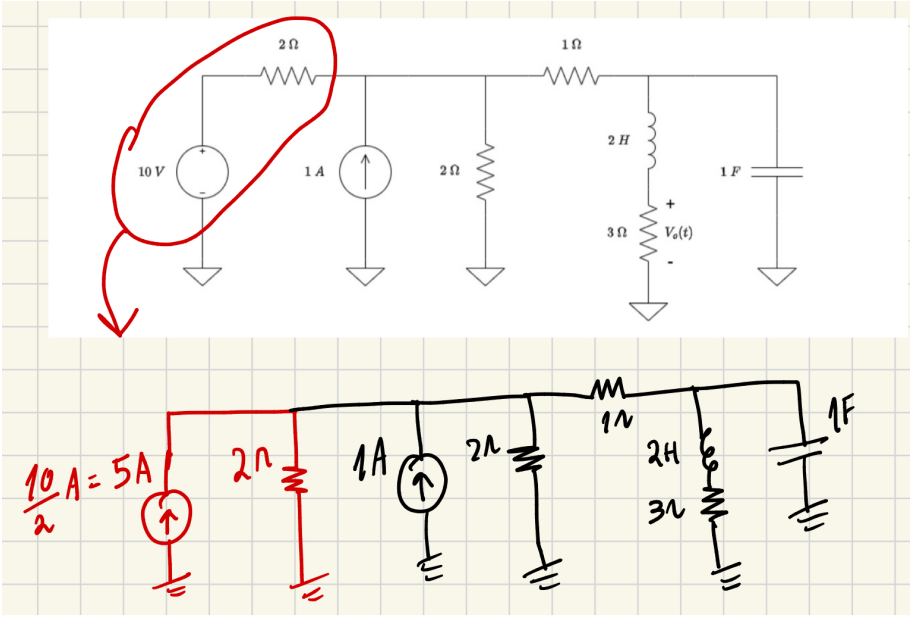



Figura 1: Transformación de fuentes.

Se puede notar que se tienen 2 fuentes de corriente en paralelo, las cuales se suman ($5A + 1A = 6A$); y 2 resistencias en paralelo, donde se obtiene el equivalente ($2\Omega // 2\Omega = 1\Omega$). Luego, se transforma la fuente de corriente en una de voltaje:

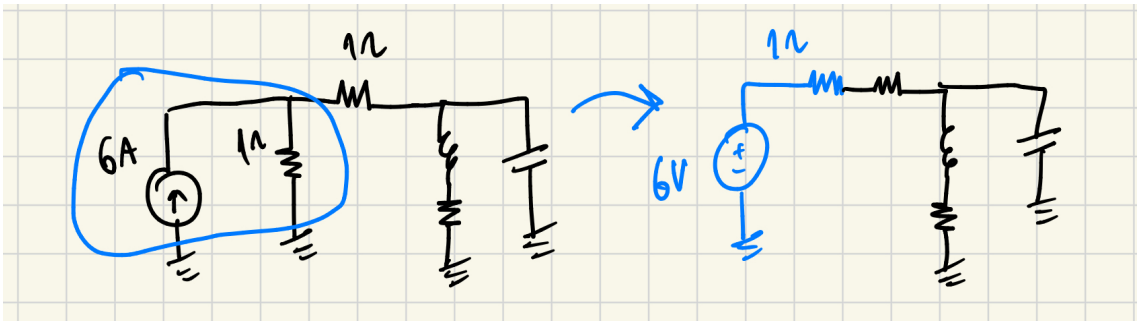



Figura 2: Transformación de fuentes.

Finalmente, el circuito simplificado se resume a continuación:

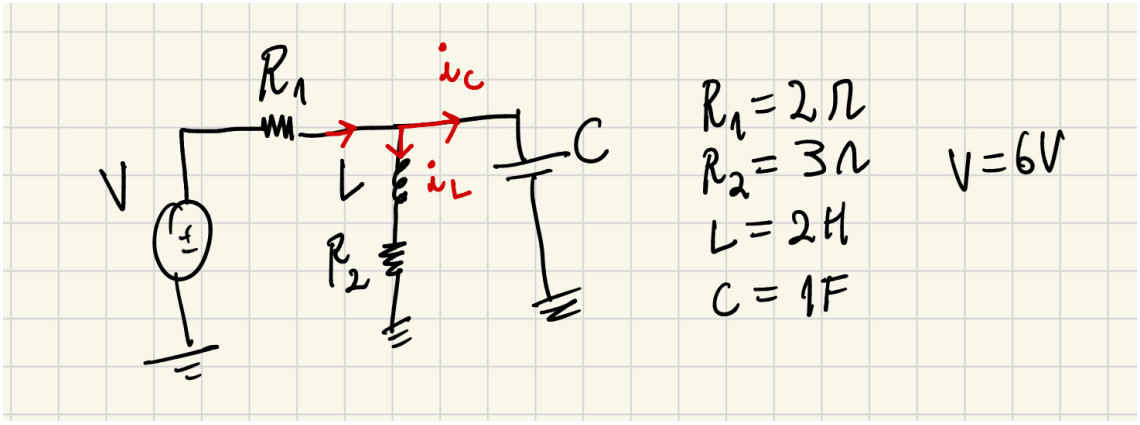



Figura 3: Circuito simplificado.

Por método de mallas, se tienen las siguientes ecuacioens:

$$V - R_1(i_c + i_L) - v_L - R_2 i_L = 0$$
$$v_L + R_2 i_L = v_c$$

Luego, se incorporan las ecuaciones del inductor y capacitor, estas son:

$$v_L = L\frac{di_L}{dt} \quad i_c = C\frac{dv_c}{dt}$$

Reemplazando:

$$V - R_1(C\frac{dv_c}{dt} + i_L) - L\frac{di_L}{dt} - R_2 i_L = 0$$
$$L\frac{di_L}{dt} + R_2 i_L = v_c$$

De este sistema se busca obtener la ecuación diferencial de $i_L(t)$, ya que es directamente relacionable con $V_o(t)$ ($V_o(t) = R_2 i_L(t)$). Por lo tanto, basta con reemplazar $v_c$ en la primera ecuación:

$$V(t) - R_1(C(L\frac{d^2 i_L}{dt^2} + R_2\frac{di_L}{dt}) + i_L) - L\frac{di_L}{dt} - R_2 i_L = 0$$
$$V(t) = R_1 LC\frac{d^2 i_L}{dt^2} + R_1 R_2 C\frac{di_L}{dt} + R_1 i_L + L\frac{di_L}{dt} + R_2 i_L$$
$$V(t) = R_1 LC\frac{d^2 i_L}{dt^2} + (L + R_1 R_2 C)\frac{di_L}{dt} + (R_1 + R_2) i_L$$

Se reemplaza $i_L(t) = V_o/R_2$ en la ecuación diferencial:

$$V(t) = \frac{R_1 LC}{R_2}\frac{d^2 V_o}{dt^2} + (\frac{L + R_1 R_2 C}{R_2})\frac{dV_o}{dt} + (\frac{R_1 + R_2}{R_2})V_o$$

Finalmente, se obtiene la ecuación diferencial reemplazando los valores de la Figura 3:

$$6 = \frac{4}{3}\frac{d^2V_o}{dt^2} + \frac{8}{3}\frac{dV_o}{dt} + \frac{5}{3}V_o$$

- 1 pto por simplificación correcta del circuito, ya sea por transformación de fuentes o equivalente de Thevenin/Norton
- 2 pto por ecuaciones correctas, ya sea por método de mallas/nodos
- 1 pts por ecuación diferencial correcta

b) **Solución homogénea:**

$$\frac{4}{3}r^2 + \frac{8}{3}r^2 + \frac{5}{3} = 0$$

$$r = -1 \pm \frac{1}{2}j$$

Se tiene respuesta subamortiguada:

$$V_{oH}(t) = e^{-t}(k_1\cos(\tfrac{1}{2}t) + k_2\sin(\tfrac{1}{2}t))$$

**Solución particular:**

Como $V(t) = 6$ es una constante, se propone $V_{op} = \alpha$ que se reemplaza en la EDO:

$$6 = \frac{4}{3}\cdot 0 + \frac{8}{3}\cdot 0 + \frac{5}{3}\alpha$$

$$V_{op} = \alpha = \frac{3\cdot 6}{5} = \frac{18}{5}$$

**Solución general:**

$$V_o(t) = V_{oH}(t) + V_{op}(t)$$

$$V_o(t) = \frac{18}{5} + e^{-t}(k_1\cos(\tfrac{1}{2}t) + k_2\sin(\tfrac{1}{2}t))$$

Para encontrar $k_1$ y $k_2$ se emplean las condiciones iniciales. Para $V_o(0)$ se tendrá condición nula por enunciado. Para $V_o'(0)$ también se tiene condición inicial nula, ya que debido a la existencia del inductor, la resistencia no puede cambiar instantáneamente de voltaje.

$$V_o(0) = \frac{18}{5} + k_1 = 0 \rightarrow k_1 = -\frac{18}{5}$$

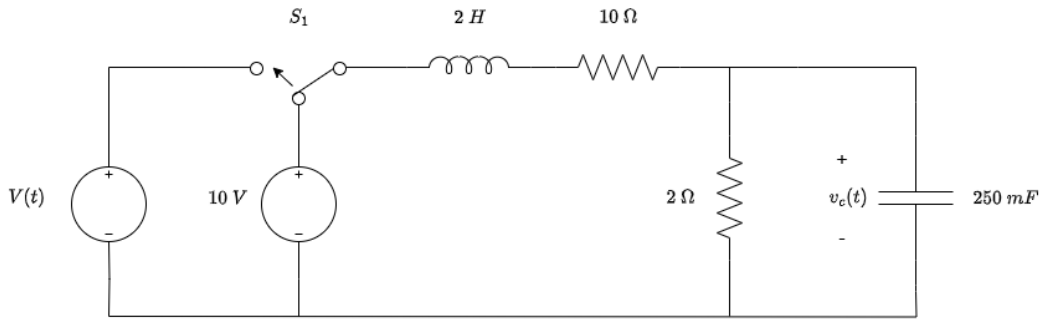
$$\frac{dV_o}{dt}(0) = -k_1 + \frac{1}{2}k_2 = 0 \rightarrow k_2 = -\frac{36}{5}$$

$$V_o(t) = \frac{18}{5} - e^{-t}(\frac{18}{5}\cos(\frac{1}{2}t) + \frac{36}{5}\sin(\frac{1}{2}t))$$

- 3 pts por solución homogénea
- 3 pts por solución particular
- 2 pts por solución general

## Problema 2 (12 pts)

Para el siguiente circuito, asuma que el switch $S_1$ llevaba mucho tiempo en su posición inicial, hasta que en $t = 0$ cambia de posición según como indica la flecha. Ademas, considere $V(t) = u(t) \cdot e^{-0,5\,t}$ [V], donde $u(t)$ es la función escalón unitario.




Basado en lo anterior, se pide que:

(a) Encuentre la ecuación diferencial que describe el voltaje del capacitor para $t \geq 0$ [4 pts]

(b) Determine el voltaje del capacitor a través del tiempo para $t \geq 0$ [8 pts]

**Solución (12 pts):**

a) Se tiene el siguiente circuito en el dominio de Laplace:

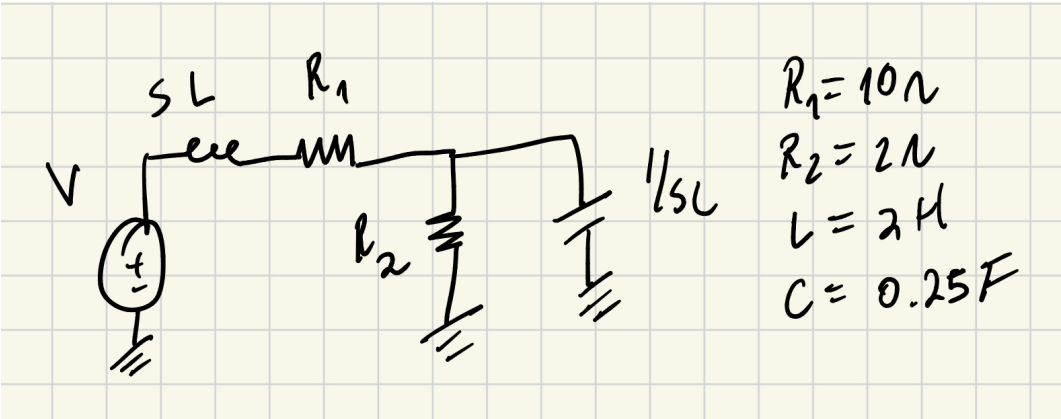



Figura 4: Circuito dominio Laplace.

Se realiza el equivalente paralelo entre $R_2$ y $\frac{1}{sC}$:

$$R_2 // \frac{1}{sC} = \frac{R_2}{1 + sR_2C}$$

El voltaje $v_c$ estará dado por el divisor de voltaje entre el equivalente anterior y $sL + R_1$:

$$v_c = V \cdot \frac{\frac{R_2}{1 + sR_2C}}{\frac{R_2}{1 + sR_2C} + sL + R_1}$$

$$v_c = V \cdot \frac{R_2}{R_2 + sL + R_1 + s^2R_2LC + sR_1R_2C}$$

$$v_c = V \cdot \frac{1}{(\frac{R_1 + R_2}{R_2}) + s(\frac{L}{R_2} + R_1C) + s^2LC}$$

$$V = v_C((\frac{R_1 + R_2}{R_2}) + s(\frac{L}{R_2} + R_1C) + s^2LC)$$

La ecuación anterior se escribe en el dominio del tiempo:

$$V(t) = LC\frac{d^2v_c}{dt^2} + (\frac{L}{R_2} + R_1C)\frac{dv_c}{dt} + (\frac{R_1 + R_2}{R_2})v_c$$

Por tanto, para $t > 0$:

$$e^{-0,5t} = 0{,}5\frac{d^2v_c}{dt^2} + 3{,}5\frac{dv_c}{dt} + 6v_c$$

- 2 pts por simplificación del circuito
- 2 pts por ecuación diferencial correcta

b) En primer lugar, se calculan las condiciones iniciales. Para $t < 0$, como $S_1$ lleva mucho tiempo en su posición inicial, el inductor se aproxima como cortocircuito y el capacitor como circuito abierto:

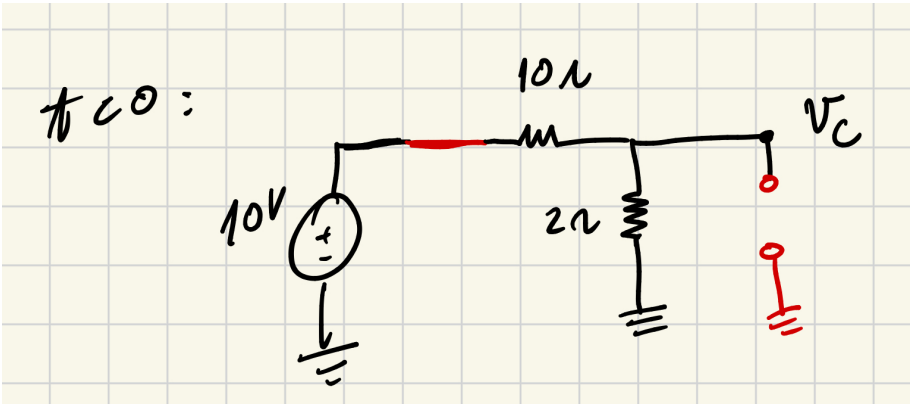



Figura 5: Circuito $t < 0$.

Por divisor de voltaje:

$$v_c(0) = 10V \cdot \frac{2}{2+10} = \frac{10}{6}\ [\text{V}]$$

Para la condición inicial de $v_c'(t)$ se debe analizar la corriente del capacitor, la cual sí puede variar instantáneamente. Por método de nodos en $t < 0$ se tiene que:

$$I_{R\ 10\Omega}(0^-) + I_{R\ 2\Omega}(0^-) + I_c(0^-) = 0; \quad I_c(0^-) = 0 \text{ (Capacitor cargado)}$$

En el instante $t > 0$, la corriente en la resistencia $10\Omega$ no cambia, debido a la presencia del inductor. Además, la corriente en la resistencia $2\Omega$ tampoco cambia, debido al capacitor en paralelo. Por tanto:

$$I_{R\ 10\Omega}(0^+) + I_{R\ 2\Omega}(0^+) + I_c(0^+) = 0; \quad I_c(0^+) = 0$$
$$\frac{dv_c}{dt}(t=0) = \frac{I_c(0^+)}{C} = 0$$

**Nota: Este es un caso particular en el que $\frac{dv_c}{dt}(t=0)$, sin embargo, puede darse el caso en que esto no se cumpla.**

**Solución homogénea:**

$$0{,}5r^2 + 3{,}5r + 6 = 0$$
$$r_1 = -3 \quad r_2 = -4$$

Se tiene respuesta sobreamortiguada:

$$v_{cH}(t) = k_1 e^{-3t} + k_2 e^{-4t}$$

**Solución particular:**

Como $V(t) = e^{-0{,}5t}$ se propone $v_{cp}(t) = \alpha e^{-0{,}5t}$, la cual se reemplaza en la ecuación diferencial:

$$e^{-0{,}5t} = 0{,}5 \cdot 0{,}25\alpha e^{-0{,}5t} + 3{,}5 \cdot -0{,}5\alpha e^{-0{,}5t} + 6\alpha e^{-0{,}5t} = 4{,}375\alpha e^{-0{,}5t}$$

$$\alpha = \frac{1}{4{,}375} = \frac{8}{35}$$

$$v_{cp}(t) = \frac{8}{35}e^{-0{,}5t}$$

**Solución general:**

$$v_c(t) = v_{cH}(t) + v_{cp}(t)$$

$$v_c(t) = \frac{8}{35}e^{-0{,}5t} + k_1 e^{-3t} + k_2 e^{-4t}$$

Para encontrar $k_1$ y $k_2$ se emplean las condiciones iniciales calculadas con anterioridad:

$$v_c(0) = \frac{8}{35} + k_1 + k_2 = \frac{10}{6}$$

$$\frac{dv_c}{dt}(0) = -\frac{4}{35} - 3k_1 - 4k_2 = 0$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$k_1 = \frac{88}{15} \quad k_2 = -\frac{31}{7}$$

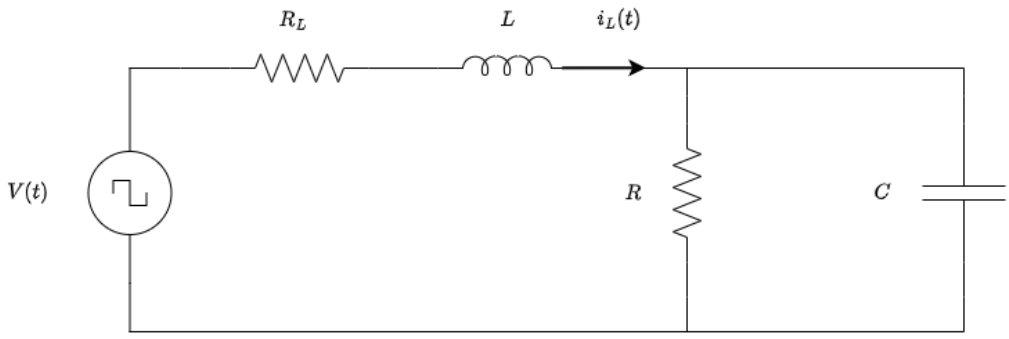
Finalmente:

$$v_c(t) = \frac{8}{35}e^{-0{,}5t} + \frac{88}{15}e^{-3t} - \frac{31}{7}e^{-4t}$$

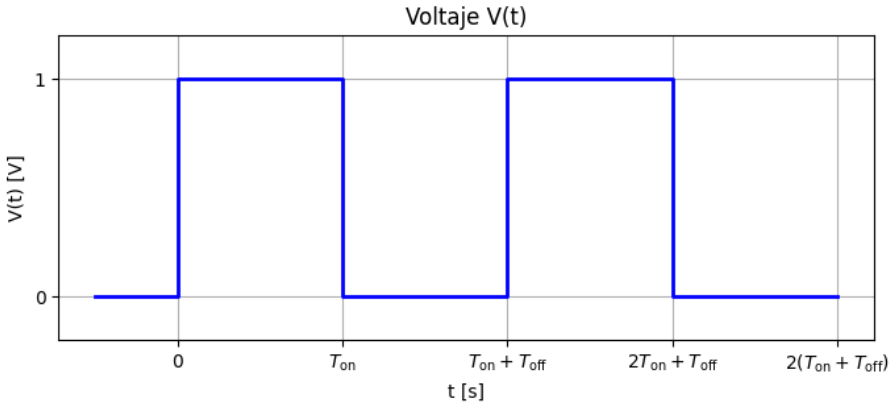
- 2 pts por condiciones iniciales
- 2 pts por solución homogénea
- 2 pts por solución particular
- 2 pts por solución general

## Problema 3 (12 pts)

Considere el siguiente circuito alimentado por una fuente de voltaje $V(t)$:




donde $V(t)$ tiene forma de onda cuadrada, de acuerdo a la siguiente figura ($T_{on} = T_{off} = 1$ [s])




Basado en lo anterior, se pide que:

(a) Determine las ecuaciones diferenciales que describen la corriente $i_L(t)$ en el intervalo de tiempo $t \in [0, T_{on} + T_{off}]$ [6 pts]

(b) Considere los valores $R_L = 0{,}1\Omega$, $L = 10mH$, $R = 1\Omega$ y $C = 20mF$. Encuentre la solución numérica de la ecuación diferencial para $t \in [0, T_{on}]$. Asuma condiciones iniciales nulas para $t = 0$ [2 pts]

(c) Con los resultados del ítem anterior, encuentre la solución numérica de la ecuación diferencial para $t \in [T_{on}, T_{on} + T_{off}]$. Asuma que la derivada de la corriente del inductor es cero para $t = T_{on}$ [2 pts]

(d) En base a los resultados anteriores, construya un gráfico mostrando la respuesta $i_L(t)$ para $t \in [0, 2(T_{on} + T_{off})]$. Compare dicha respuesta con la respuesta $i_L^*(t)$ que se obtendria si es que los valores de $L$ y $C$ fueran despreciables (i.e., aproximadamente cero) [2pts]

**Solución (12 pts):**

a) Se analiza el circuito en el dominio de Laplace. Se realiza el equivalente paralelo entre $R$ y $\frac{1}{sC}$:

$$R//\frac{1}{sC} = \frac{R}{1+sRC}$$

Por ley de Ohm:

$$V = i_L(R_L + sL + \frac{R}{1+sRC})$$

$$V(1+sRC) = i_L(R_L + sRR_LC + sL + s^2RLC + R)$$

$$V + VsRC = i_Ls^2RLC + i_Ls(RR_LC + L) + i_L(R_L + R)$$

En el dominio del tiempo:

$$V(t) + RC\frac{dV}{dt} = RLC\frac{d^2i_L}{dt^2} + (RR_LC + L)\frac{di_L}{dt} + (R_L + R)i_L$$

Para $t \in [0, T_{on}]$ $V(t) = 1$ y $V'(t) = 0$:

$$1 = RLC\frac{d^2i_L}{dt^2} + (RR_LC + L)\frac{di_L}{dt} + (R_L + R)i_L$$

Para $t \in [T_{on}, T_{on} + T_{off}]$ $V(t) = 0$ y $V'(t) = 0$:

$$0 = RLC\frac{d^2i_L}{dt^2} + (RR_LC + L)\frac{di_L}{dt} + (R_L + R)i_L$$

- 3 pts por ecuación diferencial $t \in [0, T_{on}]$
- 3 pts por ecuación diferencial $t \in [T_{on}, T_{on} + T_{off}]$

b) Reemplazando los valores, se tiene la siguiente ecuación diferencial:

$$0{,}0002\frac{d^2i_L}{dt^2} + 0{,}012\frac{di_L}{dt} + 1{,}1i_L = 1$$

Con respecto a las condiciones iniciales, por enunciado $i_L(0) = 0$. Para determinar $i'_L(0)$ se debe estudiar como varía instantáneamente el voltaje del inductor $v_L$. Se tiene la siguiente ecuación de malla justo en el instante de cambio en el escalón de voltaje ($V(t) = 1$ [V]):

$$1\text{ [V]} - R_Li_L(0^+) - v_L(0^+) - v_c(0^+) = 0$$

Como $i_L(0^+) = 0$ (propiedad del inductor) y $v_c(0^+) = 0$ (propiedad capacitor), se puede concluir que:

$$v_L(0^+) = 1\text{ [V]} \rightarrow \frac{di_L}{dt}(0) = \frac{v_L(0^+)}{L} = \frac{1\text{ V}}{0{,}01\text{ H}} = 100\text{ [A/s]}$$

**Solución homogénea:**

$$0{,}0002r^2 + 0{,}012r + 1{,}1 = 0$$

$$r = -30 \pm 67{,}82j$$

Se tiene respuesta subamortiguada:

$$i_{LH}(t) = e^{-30t}(k_1 \cos(67{,}82t) + k_2 \sin(67{,}82t))$$

**Solución particular:**

Como $V(t) = 1$, se propone $i_{Lp} = \alpha$ que se reemplaza en la EDO:

$$0{,}0002 \cdot 0 + 0{,}012 \cdot 0 + 1{,}1\alpha = 1 \rightarrow \alpha = \frac{1}{1{,}1}$$

$$i_{Lp}(t) = \frac{1}{1{,}1}$$

**Solución general:**

$$i_L(t) = i_{LH}(t) + i_{Lp}(t)$$

$$i_L(t) = \frac{1}{1{,}1} + e^{-30t}(k_1 \cos(67{,}82t) + k_2 \sin(67{,}82t))$$

Para determinar los valores de $k_1$ y $k_2$ se deben usar las condiciones iniciales para $t = 0$:

$$i_L(0) = \frac{1}{1{,}1} + k_1 = 0 \rightarrow k_1 = -\frac{1}{1{,}1} \approx -0{,}909$$

$$\frac{di_L}{dt}(0) = -30k_1 + 67{,}82k_2 = 100 \rightarrow k_2 \approx 1{,}072$$

$$i_L(t) = \frac{1}{1{,}1} + e^{-30t}(-0{,}909 \cos(67{,}82t) + 1{,}072 \sin(67{,}82t)) \quad t \in [0, 1]$$

- 1 pto por condiciones iniciales
- 1 pto por solución de la ecuación diferencial

c) Reemplazando los valores, se tiene la siguiente ecuación diferencial:

$$0{,}0002\frac{d^2 i_L}{dt^2} + 0{,}012\frac{di_L}{dt} + 1{,}1i_L = 0$$

Ahora se deben encontrar las condiciones iniciales para $t = 1$ segundo. Por enunciado, podemos aproximar que $i_L(1)$ es constante (ver $i_L(t)$ ítem anterior). Por lo tanto:

$$i_L(1) = \frac{1}{1{,}1}$$

Para determinar $i_L'(1)$ se debe estudiar como varía instantáneamente el voltaje del inductor $v_L$. Se tiene la siguiente ecuación de malla justo en el instante de cambio en el escalón de voltaje ($V(t) = 0$ [V]):

$$0 \text{ [V]} - v_{R_L}(1^+) - v_L(1^+) - v_c(1^+) = 0$$

Por divisor de voltaje (antes del cambio del escalón):

$$v_{R_L}(1^+) = \frac{1}{11} \text{ V} \quad v_{R_L}(1^+) = \frac{10}{11} \text{ V}$$

Por lo tanto:

$$v_L(1^+) = -1 \text{ [V]}$$

$$v_L(1^+) = -1 \text{ [V]} \rightarrow \frac{di_L}{dt}(1) = \frac{v_L(0^+)}{L} = \frac{-1 \text{ V}}{0{,}01 \text{ H}} = -100 \text{ [A/s]}$$

**Solución general (equivalente a la homogénea):**

$$0{,}0002r^2 + 0{,}012r + 1{,}1 = 0$$

$$r = -30 \pm 67{,}82j$$

Se tiene respuesta subamortiguada:

$$i_L(t) = e^{-30t}(k_1 \cos(67{,}82t) + k_2 \sin(67{,}82t))$$

Para determinar los valores de $k_1$ y $k_2$ se deben usar las condiciones iniciales para $t = 1$:

$$i_L(1) = e^{-30}(k_1 \cos(67{,}82) + k_2 \sin(67{,}82)) = \tfrac{1}{1{,}1}$$

$$\frac{di_L}{dt}(1) = e^{-30}\Big[(-30k_1 + 67{,}82k_2)\cos(67{,}82) + (-30k_2 - 67{,}82k_1)\sin(67{,}82)\Big] = -100$$

Finalmente, resolviendo el sistema, se obtiene:

$$i_L(t) = -e^{-30t}\Big(8{,}38 \cdot 10^{12}\cos(67{,}82t) + 1{,}25 \cdot 10^{13}\sin(67{,}82t)\Big) \quad t \in [1, 2]$$

- 1 pto por condiciones iniciales
- 1 pto por solución de la ecuación diferencial

d) Se puede notar que para $V(t) = 1$ [V] se tiene una respuesta subamortiguada que se estabiliza en 1/1,1 [A], en cambio para $V(t) = 0$ [V] se tiene una respuesta subamortiguada que se estabiliza en 0 [A]. Estos valores de corriente corresponden a los que se observarían instantáneamente si los valores de $L$ y $C$ fueran despreciables, es decir, la corriente $i_L^*(t)$. A continuación, se muestra gráficamente la comparación de corrientes en `LTspice`:

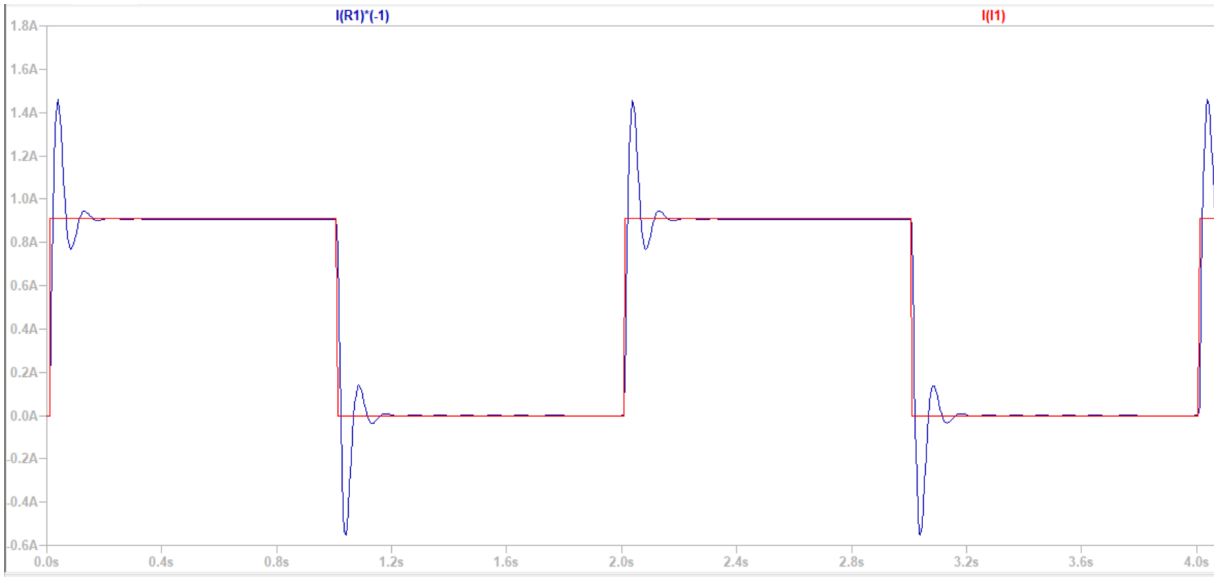
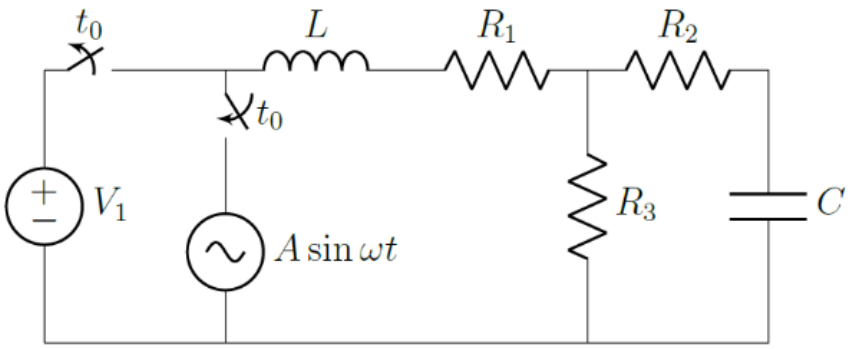



Figura 6: En color azul se muestra $i_L(t)$ y en rojo $i_L^*(t)$.

- 1pto gráfico $i_L(t)$
- 1pto gráfico $i_L^*(t)$

## Problema 4 (12 pts)

Considere el siguiente circuito, el cual lleva mucho tiempo siendo alimentado por una fuente DC ($V_1$), y que repentinamente en $t_0 = 0$ empieza a ser alimentado por una fuente AC con forma $A\sin(\omega\, t)$




Basado en lo anterior, se pide que:

(a) Determine las condiciones iniciales (en $t_0 = 0$) del voltaje del capacitor $v_c(t)$ [2 pts]

(b) Determine la ecuación diferencial que modela el voltaje del capacitor $v_c(t)$ para $t \geq 0$ [6 pts]

(c) Determine el coeficiente de amortiguación $\zeta$ y la frecuencia natural del sistema $\omega_o$ [4 pts]

**Solución (12 pts):**

a) Para $t < 0$, como la fuente DC lleva conectada mucho tiempo, el inductor se puede aproximar como cortocircuito y el capacitor como circuito abierto como se muestra a continuación:

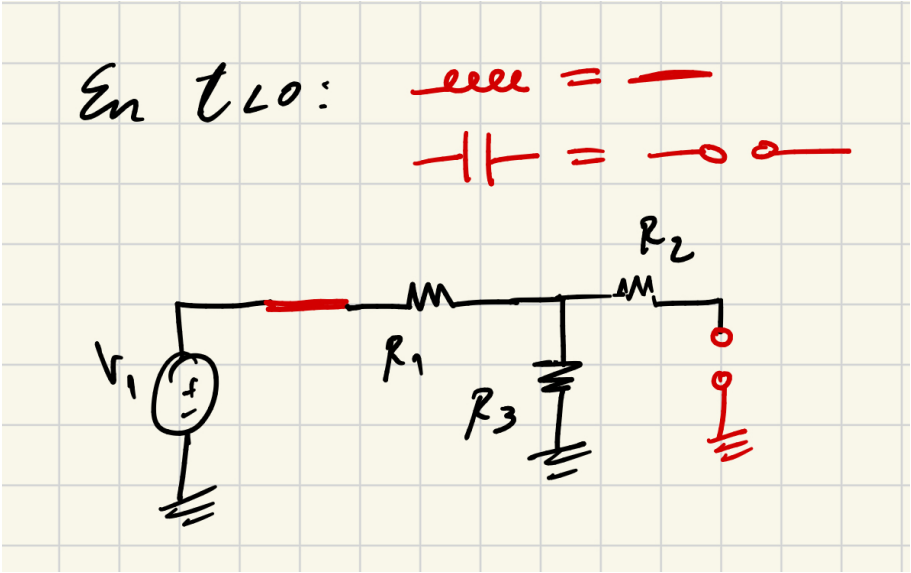



Figura 7: Circuito simplificado $t < 0$.

Por divisor de voltaje:

$$v_c(0) = V_1 \frac{R_3}{R_1 + R_3}$$

La derivada inicial del voltaje del capacitor se obtiene de la corriente del capacitor:

$$i_C = C\frac{dv_c}{dt}$$

Si se calcula usando $i_L(0^+) = i(0^+)$ y la relación de nodos, se obtiene por la malla derecha:

$$i_c(0^+) = \frac{R_3\, i(0^+) - v_C(0^+)}{(R_2 + R_3)}$$

Sustituyendo $i(0^+) = \frac{V_1}{R_1+R_3}$ y $v_C(0^+) = \frac{V_1 R_3}{R_1+R_3}$, resulta:

$$i_c = 0 \rightarrow \frac{dv_c}{dt}(0) = 0$$

**Nota: Este es un caso particular en el que $\frac{dv_c}{dt}(t = 0)$, sin embargo, puede darse el caso en que esto no se cumpla.**

- 1 pto primera condición inicial
- 1 pto segunda condición inicial

b) Se obtiene la ecuación diferencial mediante método de mallas:

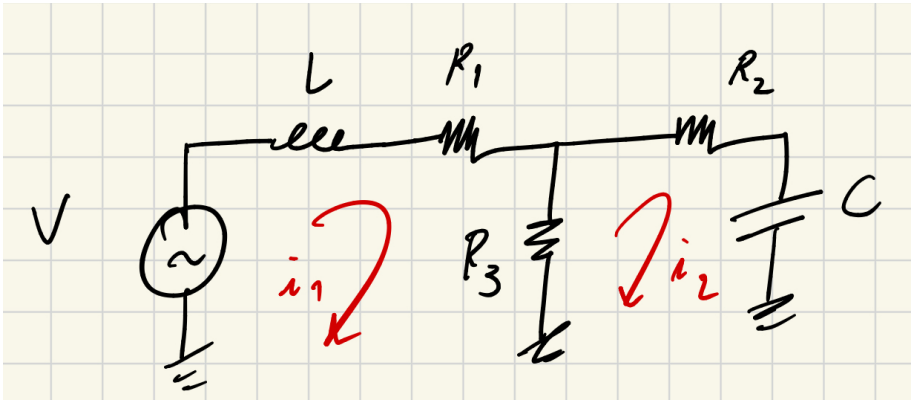



Figura 8: Mallas ecuación diferencial.

Se tienen las siguientes ecuaciones de malla:

$$V(t) - v_L - R_1 i_1 - R_3(i_1 - i_2) = 0$$

$$R_3(i_1 - i_2) = R_2 i_2 + v_c$$

Se recuerdan las relaciones útiles del inductor y capacitor:

$$i_2 = C\frac{dv_c}{dt} \quad v_L = L\frac{di_1}{dt}$$

Reemplazando:

$$V(t) - L\frac{di_1}{dt} - R_1 i_1 - R_3(i_1 - C\frac{dv_c}{dt}) = 0$$

$$R_3(i_1 - C\frac{dv_c}{dt}) = R_2 C\frac{dv_c}{dt} + v_c$$

Podemos despejar $i_1$ de la segunda ecuación y reemplazarla en la primera:

$$i_1 = \frac{1}{R_3}v_c + \frac{R_2 + R_3}{R_3}C\frac{dv_c}{dt}$$

$$V(t) = L(\frac{1}{R_3}\frac{dv_c}{dt} + (\frac{R_2 + R_3}{R_3})C\frac{d^2v_c}{dt^2}) + (R_1 + R_3)(\frac{1}{R_3} + (\frac{R_2 + R_3}{R_3})C\frac{dv_c}{dt}) - R_3 C\frac{dv_c}{dt}$$

Reordenando los términos:

$$V(t) = \frac{R_2 + R_3}{R_3}LC\frac{d^2v_c}{dt^2} + (\frac{L}{R_3} + \frac{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}{R_3}C)\frac{dv_c}{dt} + \frac{R_1 + R_3}{R_3}v_c$$

$$A\sin(\omega t) = \frac{R_2 + R_3}{R_3}LC\frac{d^2v_c}{dt^2} + (\frac{L}{R_3} + \frac{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}{R_3}C)\frac{dv_c}{dt} + \frac{R_1 + R_3}{R_3}v_c$$

- 6 pts por desarrollo y resultado correcto. Desarrollo con Laplace es válido

c) Se lleva la ecuación diferencial a forma estándar dividiendo por $\frac{R_2+R_3}{R_3}LC$:

$$\frac{R_3}{(R_2+R_3)LC}A\sin(\omega t)=\frac{d^2v_c}{dt^2}+\frac{R_3}{(R_2+R_3)LC}(\frac{L}{R_3}+\frac{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3}{R_3}C)\frac{dv_c}{dt}+\frac{R_3}{(R_2+R_3)LC}(\frac{R_1+R_3}{R_3})v_c$$

$$f(t)=\frac{d^2y}{dt^2}+2\zeta\omega_0\frac{dy}{dt}+\omega_0^2y$$

Por lo tanto:

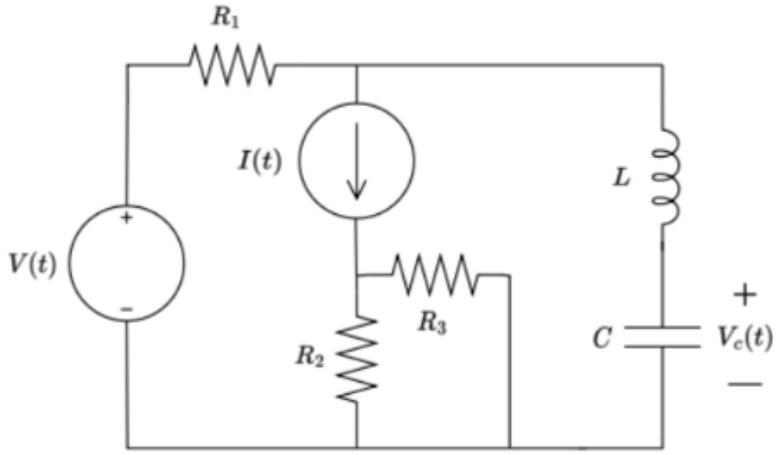
$$\omega_0=\sqrt{\frac{R_3}{(R_2+R_3)LC}(\frac{R_1+R_3}{R_3})}=\sqrt{\frac{R_1+R_3}{LC(R_2+R_3)}}$$

$$\zeta=\frac{1}{2\omega_0}\frac{R_3}{(R_2+R_3)LC}(\frac{L}{R_3}+\frac{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3}{R_3}C)$$

- 2 pts por llevar la ecuación diferencial a su forma estándar
- 1 pto por coeficiente de amortiguamiento
- 1 pto por frecuencia natural

## Problema 5 (12 pts)

Considere el siguiente circuito, el cual esta siendo alimentado por una fuente de voltaje $V(t) = \sin(2\pi f \cdot t)$ [V], y una fuente de corriente $I(t) = 2\sin(2\pi f \cdot t)$ [A], con $f = 50$ [Hz].




Considerando condiciones iniciales nulas para el inductor y capacitor, se pide que:

(a) Encuentre la ecuación diferencial que modela el voltaje del capacitor $V_c(t)$ a lo largo del tiempo para $t \geq 0$ [4 pts]

(b) Obtenga la frecuencia natural $\omega_0$ y coeficiente de amortiguación $\zeta$ asociados [4 pts]

(c) Suponiendo $R_1 = R_2 = R_3 = 2\Omega$, $L = 2mH$ y $C = 5mF$, encuentre las raíces del polinomio característico del sistema y determine el tipo de respuesta de este (i.e., sobreamortiguada, críticamente amortiguada o subamortiguada) [4 pts]

**Solución (12 pts):**

a) Se utiliza el método de mallas en el dominio de Laplace, definiendo las corrientes $i_1$ e $i_2$ en sentido horario, y considerando que $V_c = i_2 \cdot \frac{1}{Cs}$.

Supermalla 1-2:

$$-V(t) + R_1 \cdot i_1 + L \cdot s \cdot i_2 + \frac{1}{Cs} \cdot i_2 = 0$$
$$i_1 - i_2 = I(t)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene:

$$i_2 = \frac{C \cdot s \cdot \big( - I(t) \cdot R_1 + V(t) \big)}{s^2 \cdot C \cdot L + s \cdot C \cdot R_1 + 1}$$

Luego, $V_c(t)$ es:

$$V_c(t) = \frac{-I(t) \cdot R_1 + V(t)}{1 + s \cdot C \cdot R_1 + s^2 \cdot C \cdot L}$$

Multiplicando:

$$V_c(t) \cdot \big(1 + s \cdot C \cdot R_1 + s^2 \cdot C \cdot L\big) = -I(t) \cdot R_1 + V(t)$$

Y la EDO resultante es:

$$\frac{1}{CL} V_c(t) + \frac{R_1}{L} \frac{dV_c(t)}{dt} + \frac{d^2 V_c(t)}{dt^2} = \frac{-I(t) \cdot R_1 + V(t)}{CL}$$

- 3 pts ecuaciones con algún método
- 1 pto por ecuación diferencia correcta

b) A partir de la ecuación diferencial:

$$\frac{R_1}{L} = 2\zeta\omega_0, \quad \frac{1}{CL} = \omega_0^2$$

De esta forma:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{CL}}, \quad \zeta = \frac{R_1}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}$$

- 2 pts por valor correcto de $\omega_0$
- 2 pts por valor correcto de $\zeta$

c) Se tiene el siguiente polinomio característico:

$$\frac{1}{CL} + \frac{R_1}{L} r + r^2 = 0$$

Resolviendo:

$$r_1 = -887{,}298, \quad r_2 = -112{,}702$$

Las raíces son reales y distintas, por lo que la respuesta es sobreamortiguada.

- 1 pto por plantear polinomio característico
- 1 pto por raíces del polinomio característico
- 2 pts por conclusión del tipo de respuesta