IEE 2123 Circuitos Eléctricos
Prof. David Watts, PUC

Clase 08 Repaso de ctos. RL y RC e Introducción

Estudiar en casa!

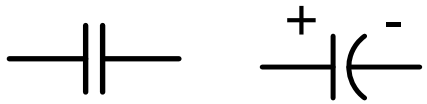
Contenidos:

1. Condensador
2. Inductancia
3. Circuitos con R, C y L
4. Circuitos de primer orden,
   - Formulación ecuación diferencial y solución.

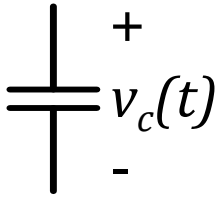
Capítulo 7 Dorf 6ª Edición

Profesor David Watts

1. Condensador

- **Descripción:** elemento pasivo que almacena energía.
- **Símbolo:** 

- **Relación voltaje carga:** el voltaje $v_c(t)$ es proporcional a la carga $Q(t)$ en el condensador.



$$Q(t) = Cv_c(t)$$

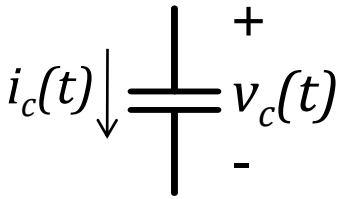
- **Unidades:** C es la capacidad del condensador, y se mide en Farad

$$[F] = \left[\frac{C}{V}\right]$$

1. Condensador

- **Relación voltaje corriente (para C fija):**

$$i_c(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = C\frac{dv_c(t)}{dt}$$



- **Continuidad:** $v_c(t)$ debe ser una función continua en el tiempo, o sea:

$$v_c(t^-) = v_c(t^+)$$

- **Régimen permanente dc:** el condensador actúa como circuito abierto, ya que se encuentra completamente cargado, o sea $i_c=0$.

1. Condensador

- **Voltaje en términos de la corriente:**

Demostración:

$$v_c(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i_c(t)dt + v_c(0)$$

$$Q(t) = \int_0^t i_c(t)dt + Q(0)$$

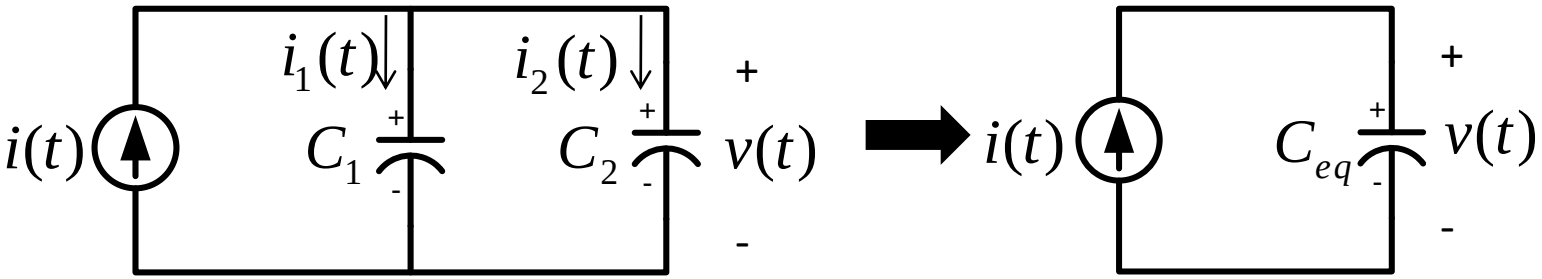
$$v_c(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i_c(t)dt + \frac{Q(0)}{C} = \frac{1}{C}\int_0^t i_c(t)dt + v_c(0)$$

- **Almacenamiento de energía:**

$$w(t) = \frac{Q(t)v(t)}{2} = \frac{Cv(t)^2}{2} \Rightarrow \Delta w = \frac{Cv_{final}^{\ 2}}{2} - \frac{Cv_{inicial}^{\ 2}}{2}$$

1.1. Conexiones:
Paralelo.

- **Conexión en paralelo de condensadores:**



$$C_1 + C_2 = C_{eq}$$

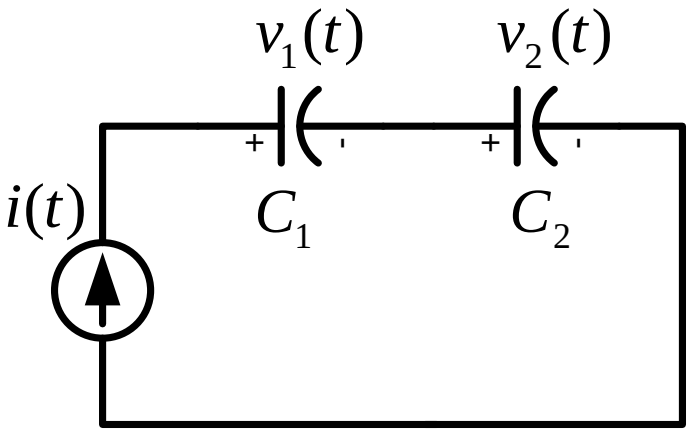
Demostración:

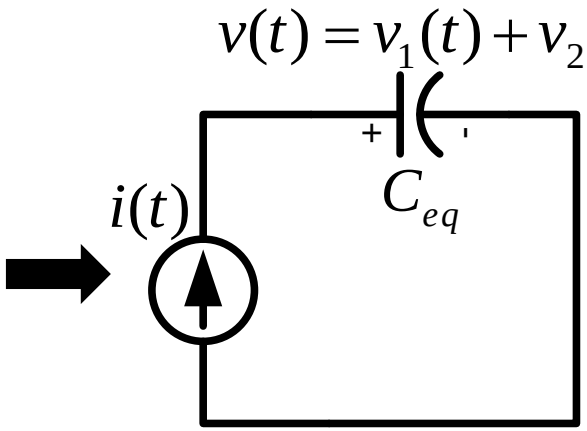
$$i = i_1 + i_2 = C_1 \frac{dv(t)}{dt} + C_2 \frac{dv(t)}{dt} = (C_1 + C_2)\frac{dv(t)}{dt}$$

$$C_1 + C_2 = C_{eq}$$

1.1. Conexiones:
Serie.

- **Conexión en serie de condensadores**:





$$\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{C_{eq}}$$

Demostración:

$$i(t) = C_1 \frac{dv_1(t)}{dt} = C_2 \frac{dv_2(t)}{dt} \Rightarrow \frac{dv_1(t)}{dt} = \frac{i(t)}{C_1}; \frac{dv_2(t)}{dt} = \frac{i(t)}{C_2}$$

$$i(t) = C_{eq} \frac{dv(t)}{dt} = C_{eq} \frac{d\left(v_1(t) + v_2(t)\right)}{dt} = C_{eq} \frac{dv_1(t)}{dt} + C_{eq} \frac{dv_2(t)}{dt}$$

$$i(t) = C_{eq} \frac{i(t)}{C_1} + C_{eq} \frac{i(t)}{C_2} \Rightarrow \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{C_{eq}}$$

2. Inductancia

- **Descripción:** cable enrollado alrededor de cierto tipo de forma. El flujo de corriente a través del conductor enrollado crea un campo magnético en el interior del cuerpo sobre el cual está enrollado.

- **Símbolo:** 

- **Relación voltaje corriente**: el voltaje $v_L(t)$ es proporcional a la tasa de cambio de la corriente $i_L(t)$.

$$v_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt}$$

- **Unidades**: L corresponde la inductancia y se mide en Henry.

$$[H] = \left[\frac{Vs}{A}\right]$$

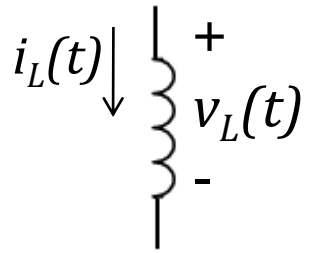
2. Inductancia

- **Régimen permanente:** la inductancia actúa como corto circuito, ya que las derivadas temporales son nulas, luego $V_L=0$.

- **Relación voltaje corriente:**

$$v_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt}$$

$$i_L(t) = \frac{1}{L}\int_0^t v_L(t)dt + i_L(0)$$



- **Continuidad:** $i_L(t)$ debe ser una función continua en el tiempo, o sea:

$$i_L(t^-) = i_L(t^+)$$

2. Inductancia

- **Almacenamiento de energía:**

$$p(t) = v(t)i(t) = Li_L(t)\frac{di_L(t)}{dt}$$

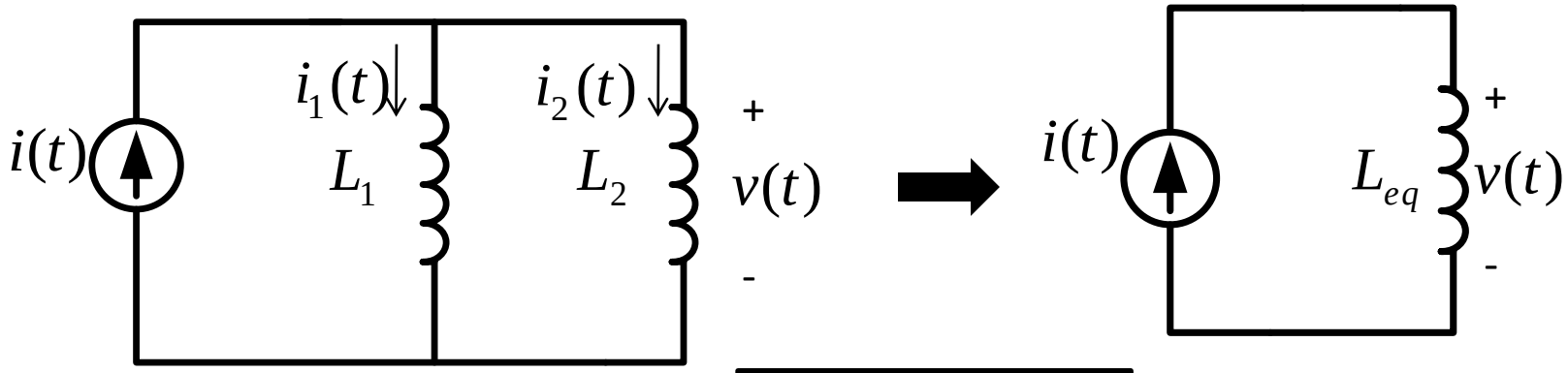
$$w(t) = \int_{t_0}^{t} p(u)du = \int_{t_0}^{t} Li_L(u)\frac{di_L(u)}{du}du = \int_{i_L(t_0)}^{i_L(t)} Li_L di_L$$

$$w(t) = \frac{Li(t)^2}{2}$$

$$\Delta w_{f-i} = \frac{Li_{final}^{\ 2}}{2} - \frac{Li_{inicial}^{\ 2}}{2}$$

2.1. Conexiones:
Paralelo.

- **Conexión en paralelo de inductancias:**



Demostración:

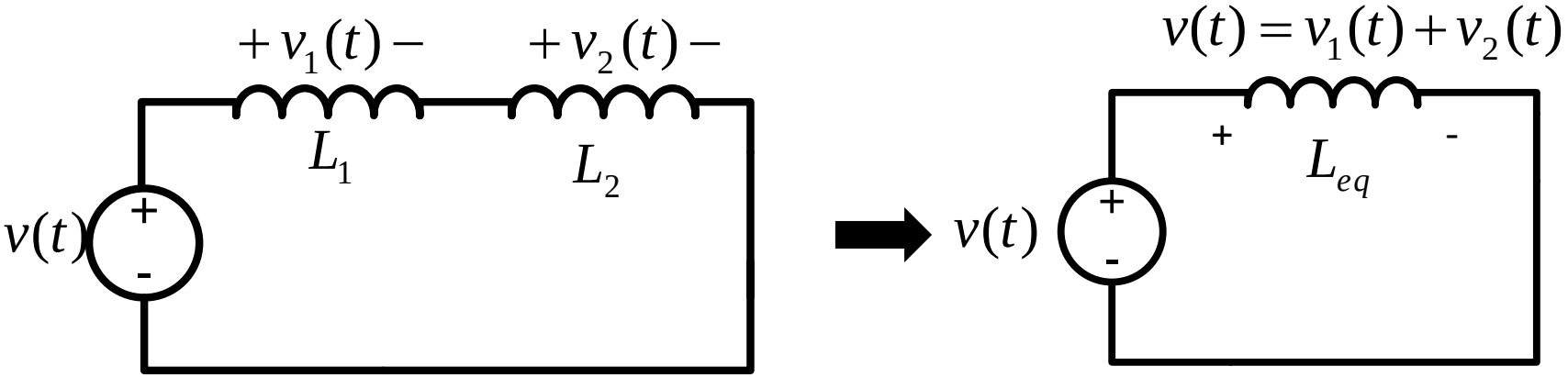
$$\boxed{\frac{1}{L_1}+\frac{1}{L_2}=\frac{1}{L_{eq}}}$$

$$i = i_1 + i_2 = \frac{1}{L_1}\int_0^t v(t)dt + i_1(0) + \frac{1}{L_2}\int_0^t v(t)dt + i_2(0)$$

$$i = \left(\frac{1}{L_1}+\frac{1}{L_2}\right)\int_0^t v(t)dt + i(0) = \frac{1}{L_{eq}}\int_0^t v(t)dt + i(0) \Rightarrow \frac{1}{L_1}+\frac{1}{L_2}=\frac{1}{L_{eq}}$$

2.1. Conexiones:
Serie.

- **Conexión en serie de inductancias:**



$$L_1 + L_2 = L_{eq}$$

Demostración:

$$v(t) = v_1(t) + v_2(t) = L_1 \frac{di(t)}{dt} + L_2 \frac{di(t)}{dt} = (L_1 + L_2)\frac{di(t)}{dt} = L_{eq}\frac{di(t)}{dt}$$

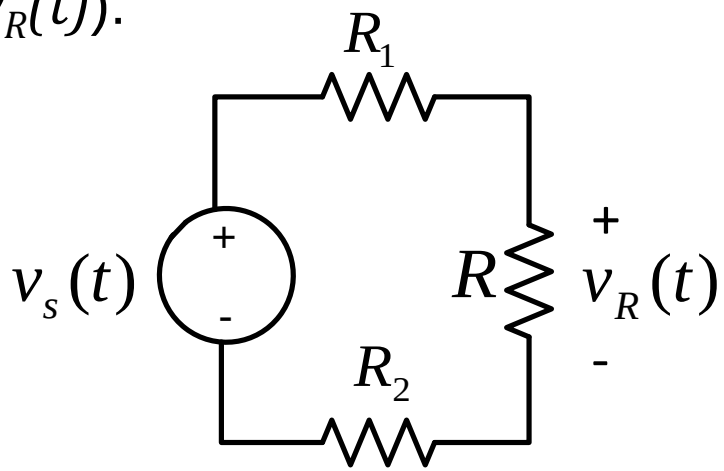
$$L_1 + L_2 = L_{eq}$$

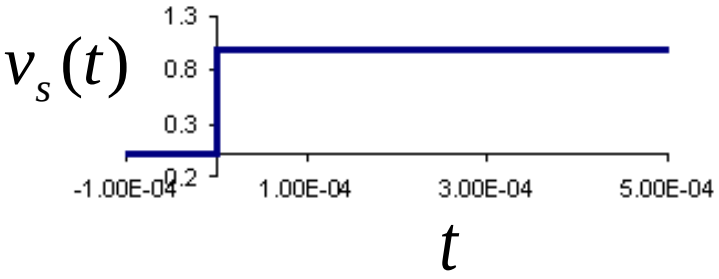
3. Circuitos con R, C y L

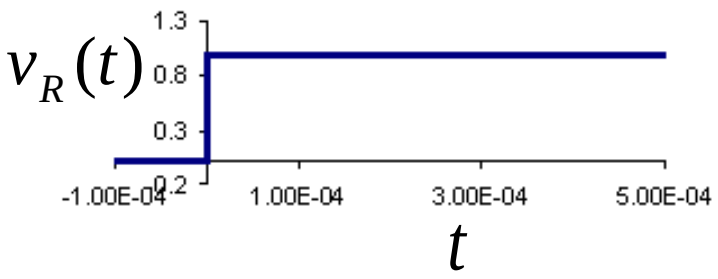
- **Comportamiento dinámico:**
  - Los circuitos con elementos almacenadores de energía tienen un **comportamiento muy distinto** a los circuitos con sólo fuentes y resistencias.
  - Se requiere un **análisis dinámico en el tiempo** ya que los elementos como condensadores e inductancias no tienen un comportamiento estático como las resistencias.
- **Solución:**
  - En el nuevo marco de los circuitos RC o RL, éstos se pueden representar mediante sistemas de **ecuaciones diferenciales lineales**.

3. Circuitos con R, C y L:
Ejemplo caso **estático**.

- A continuación tenemos un ejemplo de un circuito sin condensadores ni inductancias y el comportamiento de una de sus variables ($v_R(t)$):

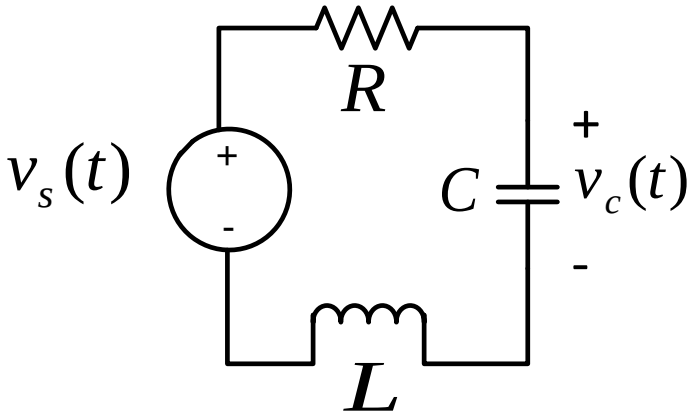


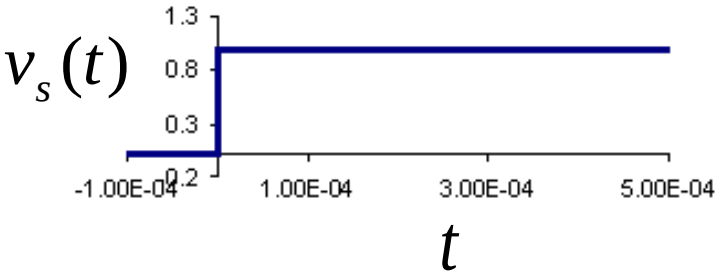


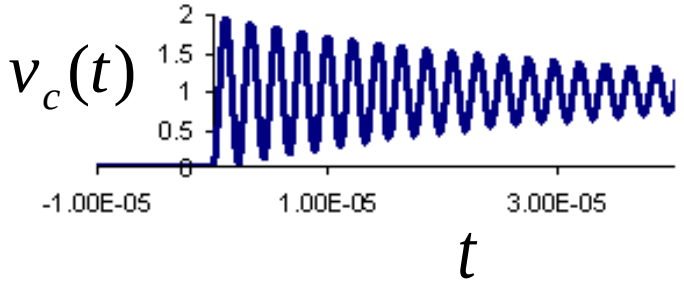


3. Circuitos con R, C y L:
Ejemplo caso **dinámico**.

- A continuación tenemos un ejemplo de un circuito con elementos almacenadores de energía y el comportamiento de una de sus variables ($v_c(t)$):







3.1. Modelamiento matemático

- **Ecuación diferencial:**

  - Cada voltaje o corriente en un circuito con elementos L o C corresponde a la solución de una ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes:

$$a_n \frac{d^n v(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} v(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_0 v(t) = f(t)$$

  - Los valores a_n dependen de los valores de los componentes del circuito.
  - $f(t)$ depende de los valores de los componentes del circuito y de las fuentes.

- **Orden:** un circuito de orden n (n elementos almacenadores de energía irreducibles) es descrito por un sistema de ecuaciones diferenciales de orden n.

3.1. Modelamiento matemático

- **Solución:**
  - La solución del sistema diferencial está dada por:

$$v(t) = v_h(t) + v_p(t)$$

  - $V_p(t)$ es la solución **particular o forzada**, dada por la forma algebraica de las fuentes.
  - $V_h(t)$ la solución **homogénea o natural**, dada por los valores de las componentes del circuito y por sus interconexiones.

3.1. Modelamiento matemático

- **Condiciones iniciales:**

  - Para encontrar completa la solución del sistema es necesario contar con condiciones iniciales que nos permitan calcular las constantes de integración de la solución de la ecuación diferencial.

  - Estas condiciones iniciales **requieren continuidad**, y están dadas por:

    - Condensadores → $v_c(t_0^-) = v_c(t_0^+)$

    - Inductancias → $i_L(t_0^-) = i_L(t_0^+)$

    - Fuentes → Valores iniciales en las fuentes.

3.2. Régimen transitorio y permanente

- **Régimen permanente:** es la respuesta del circuito cuando ha transcurrido un intervalo de tiempo muy grande. Esta respuesta permanece en el tiempo.
  - Condensadores en dc → Circuito abierto
  - Inductancias en dc → Corto circuito
- **Régimen transitorio (~transiente):** Es la respuesta del circuito antes de alcanzar el régimen permanente (período de tiempo inicial).

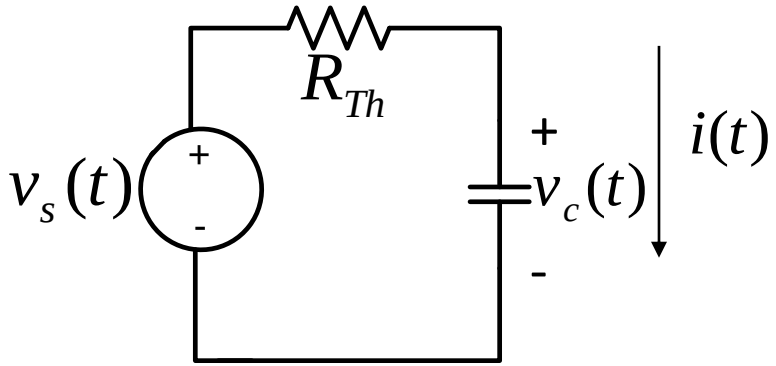
4. Circuitos de primer orden

- **Circuitos RC y RL:** cualquier circuito con un solo componente almacenador de energía* y cualquier número de fuentes y resistencias es un circuito de primer orden (circuito RC o RL)

- **Variables de interés:** cualquier voltaje o corriente del circuito corresponde a la solución de una ecuación diferencial lineal de primer orden.

*o que se pueda reducir a uno.

4.1. Circuito RC en serie



$v_c(t) = ¿?$

LVK:

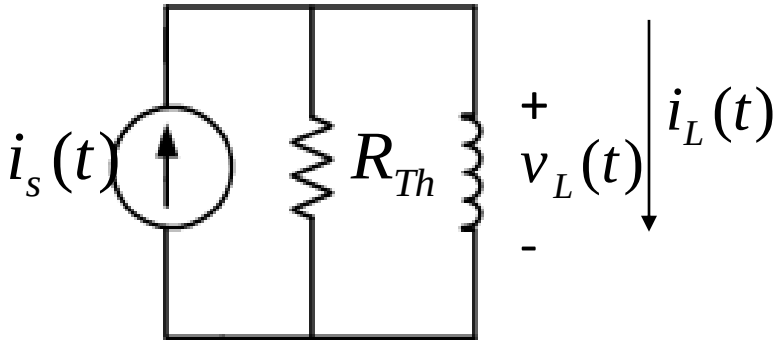
$$v_s(t) = R_{Th} i(t) + v_c(t) \quad ; \quad i(t) = C \frac{dv_c(t)}{dt}$$

$$\frac{dv_c(t)}{dt} + \frac{1}{R_{Th}C} v_c(t) = \frac{1}{R_{Th}C} v_s(t)$$

Ec. Dif. en $v_C(t)$

Notar que podemos obtener otras ecuaciones diferenciales para otras variables pero estas no sirven ya que no son continuas.

4.2. Circuito RL en paralelo



$$i_L(t) = ¿?$$

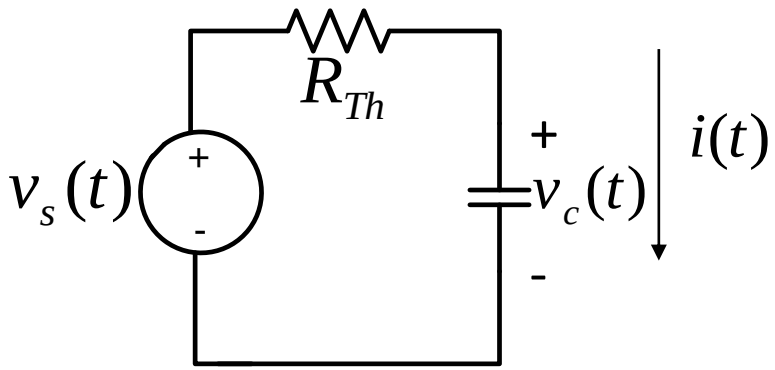
Haciendo nodos:

$$i_s(t) = \frac{v_L(t)}{R_{Th}} + i_L(t) \quad ; \quad v_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt}$$

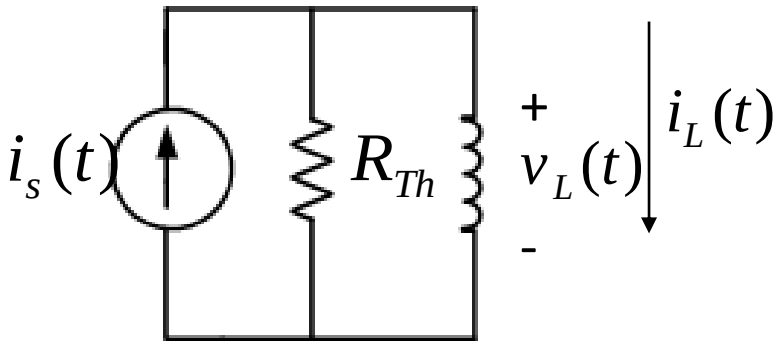
$$\frac{di_L(t)}{dt} + \frac{R_{Th}}{L} i_L(t) = \frac{R_{Th}}{L} i_s(t)$$ Ec. Dif. En $i_L(t)$

4.3 Circuito RC Serie y RL en paralelo

RC Serie



RL Paralelo



$$v_s(t) = R_{Th} i(t) + v_c(t) \quad ; \quad i(t) = C \frac{dv_c(t)}{dt}$$

$$\frac{dv_c(t)}{dt} + \frac{1}{R_{Th}C} v_c(t) = \frac{1}{R_{Th}C} v_s(t)$$

Ec. Dif. en $v_C(t)$

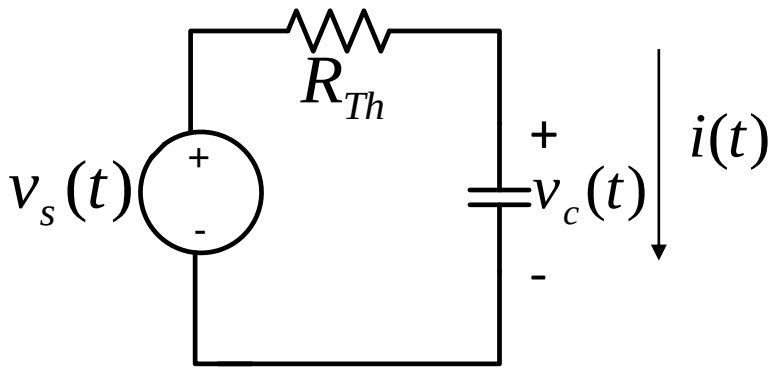
$$i_s(t) = \frac{v_L(t)}{R_{Th}} + i_L(t) \quad ; \quad v_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}$$

$$\frac{di_L(t)}{dt} + \frac{R_{Th}}{L} i_L(t) = \frac{R_{Th}}{L} i_s(t)$$

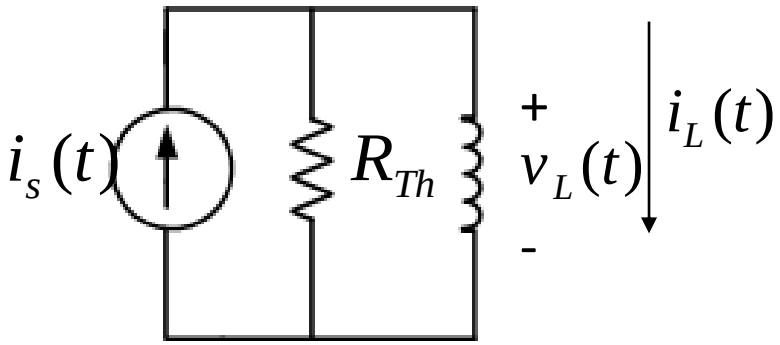
Ec. Dif. En $i_L(t)$

4.3 Circuito RC Serie y RL en paralelo

RC Serie



RL Paralelo



Ec. Dif. en $v_C(t)$

$$v_s(t) = R_{Th} i(t) + v_c(t) \quad ; \quad i(t) = C \frac{dv_c(t)}{dt}$$

$$\frac{dv_c(t)}{dt} + \frac{1}{R_{Th}C} v_c(t) = \frac{1}{R_{Th}C} v_s(t)$$

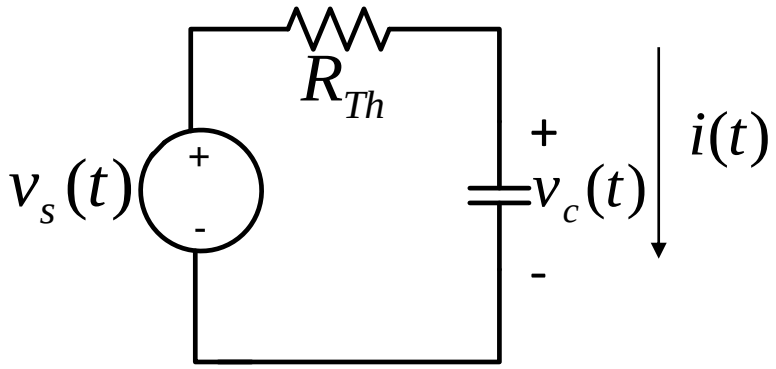
Ec. Dif. En $i_L(t)$

$$i_s(t) = \frac{v_L(t)}{R_{Th}} + i_L(t) \quad ; \quad v_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}$$

$$\frac{di_L(t)}{dt} + \frac{R_{Th}}{L} i_L(t) = \frac{R_{Th}}{L} i_s(t)$$

- Role de R
- Role de L,C
- Valor de Tau – Constante de Tiempo
- ¿Cómo es la solución? IL y VC,

4.3 Circuito RC Serie

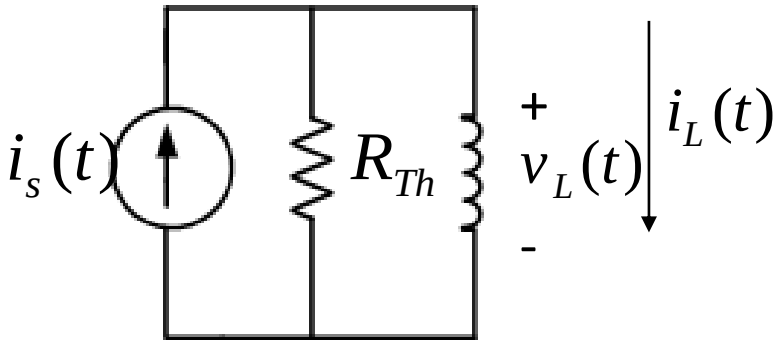


Ec. Dif. en $v_C(t)$

$$v_s(t) = R_{Th} i(t) + v_c(t) \quad ; \quad i(t) = C \frac{dv_c(t)}{dt}$$

$$\frac{dv_c(t)}{dt} + \frac{1}{R_{Th}C} v_c(t) = \frac{1}{R_{Th}C} v_s(t)$$

4.3 Circuito RC Serie y RL en paralelo



Ec. Dif. En $i_L(t)$

$$i_s(t) = \frac{v_L(t)}{R_{Th}} + i_L(t) \quad ; \quad v_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt}$$

$$\frac{di_L(t)}{dt} + \frac{R_{Th}}{L} i_L(t) = \frac{R_{Th}}{L} i_s(t)$$

IEE 2123 Circuitos Eléctricos
Prof. David Watts, PUC

Clase 08 Repaso de ctos. RL y RC e Introducción

Estudiar en casa!

Contenidos:

1. Condensador
2. Inductancia
3. Circuitos con R, C y L
4. Circuitos de primer orden,
   - Formulación ecuación diferencial y solución.

Capítulo 7 Dorf 6ª Edición