Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Eléctrica
IEE2123 – Circuitos Eléctricos
Profesor Álvaro Lorca
Segundo Semestre 2018

Interrogación 2 - Solución

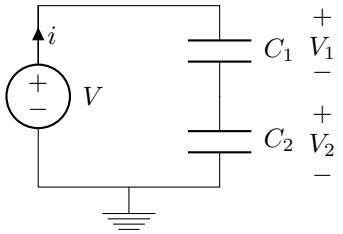
Instrucciones

- Poner nombre y número de lista en cada hoja.
- Resolver cada Problema en un conjunto diferente de hojas.
- No se permite utilizar apuntes de ningún tipo. Sí se permite el uso de calculadora científica.
- Justifique adecuadamente todas sus respuestas.
- No se puede hacer preguntas. Si hay un error en el enunciado, explique por qué. Si hay algo ambiguo, explique por qué y determine un supuesto razonable para poder responder.
- Tiempo: dos horas.

Problema 1 (15 puntos)

(a) (3 puntos) Demuestre matemáticamente que dos capacitores en serie tienen una capacitancia equivalente igual al paralelo de sus respectivas capacitancias.

Solución: Tomemos como base el siguiente circuito:



Del circuito podemos inferir las siguientes ecuaciones:

$$i = i_1 = i_2 \tag{1}$$

$$V = V_1 + V_2 \tag{2}$$

Por otro lado sabemos que:

$$\frac{dv_n}{dt} = \frac{i}{c_n} \tag{3}$$

Derivamos de (2) y obtenemos:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV_1}{dt} + \frac{dV_2}{dt} \tag{4}$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{i_1}{C_1} + \frac{i_2}{C_2} \tag{5}$$

Dividimos por i y obtenemos lo pedido:

$$C_{eq} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)^{-1} = C_1 || C_2 \tag{6}$$

(b) (3 puntos) Demuestre matemáticamente que la energía almacenada en el tiempo t por un inductor de inductancia L y corriente $i_L(t)$ está dada por $L\, i_L(t)^2/2$. Hint: integre la potencia absorbida por el inductor.
Solución:

- Asumimos que en $t = 0$ se tiene energía nula.
- Sabemos que el voltaje de un inductor es $V_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt}$
- Sabemos que la ecuación de potencia está dada por $P = V \cdot I$

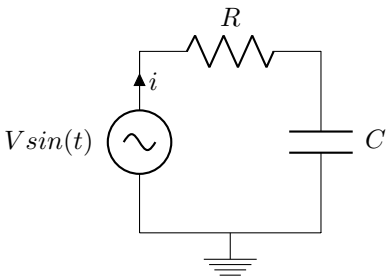
Para calcular la energía integramos la potencia:

$$E = \int_0^t P\, dt \tag{7}$$

$$E = \int_0^t i_L(t)\, L\frac{di}{dt}\, dt \tag{8}$$

$$E = \frac{1}{2}\, L(i_L(t))^2 \tag{9}$$

(c) (3 puntos) Considere un circuito RC en que la fuente de voltaje entrega un voltaje igual a $V\sin(t)$, para todo $t \geq 0$. Además, el capacitor tiene una capacitancia C y el resistor una resistencia R. Encuentre y justifique la ecuación diferencial que modela el voltaje del capacitor para todo $t \geq 0$. Además, responda lo siguiente: ¿Qué forma funcional tiene la diferencia de voltaje que observa el resistor después de mucho tiempo? (No es necesario que encuentre dicha función de forma explícita, solamente que explique qué forma tiene.) Justifique su respuesta.
Solución: Tomemos como base el siguiente circuito:



Por LVK tenemos las siguientes ecuaciones:

$$V sin(t) = V_R + V_C \tag{10}$$

$$V sin(t) = R\, i_c(t) + V_C(t) \tag{11}$$

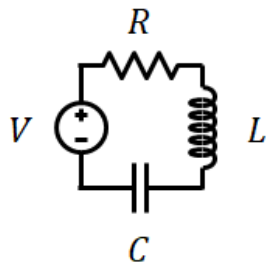
$$\tag{12}$$

Sabemos que en un capacitor la corriente está definida como $i_c = C\frac{dV_c(t)}{dt}$, con eso reemplazamos:

$$\frac{dv_c(t)}{dt} + \frac{1}{RC} \cdot v_c(t) = \frac{V}{RC} \cdot sin(t) \tag{13}$$

Luego de mucho tiempo el voltaje del resistor va a tender a ser sinusoidal, ya que depende de la corriente que pasa por este es dependiente del capacito. Este en el infinito va a tener un régimen permanente (solución particular) que es una combinación de senos y cosenos debido a la fuente.

(d) (3 puntos) Considere el circuito RLC en serie especificado en la Figura siguiente. Asuma que la fuente de voltaje entrega un voltaje V constante para todo $t \geq 0$. Encuentre y justifique la ecuación diferencial que modela la corriente a través del inductor para todo $t \geq 0$.



Solución: Calculamos la impedancia equivalente

$$Z_{eq} = \frac{sCR + s^2LC + 1}{sC}$$

Aplicando Ley de Ohm ($V = I \cdot R$)

$$i(s) = \frac{sC}{sCR + s^2LC + 1} \cdot V$$
$$LCs^2i(s) + CRsi(s) + i(s) = sCV$$
$$LC\frac{d^2i(t)}{dt^2} + CR\frac{di(t)}{dt} + i(t) = C\frac{dV(t)}{dt}$$

Tenemos que $V(t) = cte$ por lo que $C\frac{dV(t)}{dt} = 0$. Con ello la ecuación diferencial nos queda de la siguiente forma:

$$\frac{d^2i(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{LC} \cdot i(t) = 0$$

(e) (3 puntos) Calcule la impedancia equivalente del resistor, el inductor, y el capacitor, en el circuito RLC en serie especificado en la Figura de arriba. Exprese dicha impedancia equivalente en coordenadas polares (magnitud y ángulo).
Solución: Sabemos que los elementos en fasorial son correspondientes $L \rightarrow j\omega L$ y $C \rightarrow \frac{1}{j\omega C} = \frac{-j}{\omega C}$ Con ello la impedancia equivalente queda definida como:

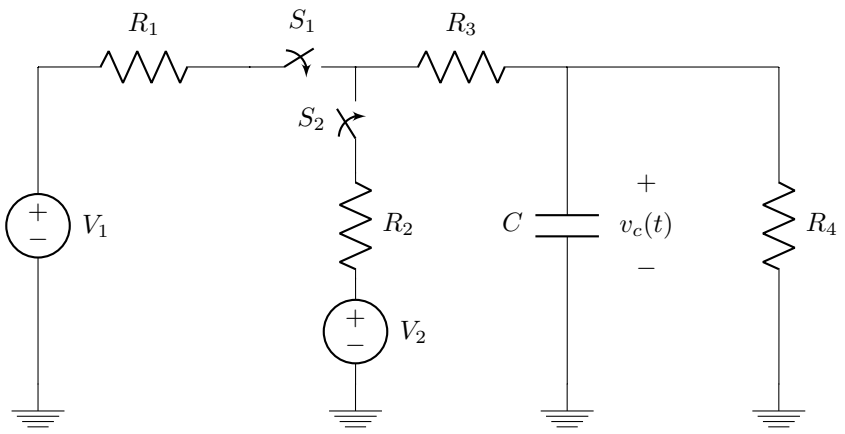
$$Z_{eq} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}$$
$$Z_{eq} = \frac{\omega RC - j + j\omega^2 LC}{\omega C}$$
$$Z_{eq} = R + j\Big(\omega L - \frac{1}{\omega C}\Big) = R + j\Big(\frac{\omega^2 LC - 1}{\omega C}\Big)$$

La equivalencia en coordenadas polares es la siguiente:

$$Z_{eq} = \sqrt{R^2 + \Big(\frac{\omega^2 LC - 1}{\omega C}\Big)^2} \angle\, tan^{-1}\Big(\frac{\omega^2 LC - 1}{\omega C}\Big)$$

Problema 2 (15 puntos)

En el circuito siguiente considere los valores de los voltajes $V_1 = 8V$ y $V_2 = 12V$, las resistencias $R_1 = 0.5k\Omega$, $R_2 = 0.5\Omega$, $R_3 = 0.5\Omega$ y $R_4 = 1k\Omega$. Considere que el voltaje inicial del capacitor es de $3V$. Además se sabe que el switch S_1 se cierra cuando $t = 2s$ y S_2 se cierra cuando $t = 4s$.



(a) (2 puntos) Determine el valor de C para que el voltaje del capacitor en $t = 2s$ alcance el 63% de su valor inicial.

Solución: Se puede ver que, para $t \leq 2$, el único resistor que influye es R4, por lo cual el capacitor se descargará solo con R4. Por otro lado, se ve que el 63% de 3 volts son ≈1,89 volts.
Además, desde las ecuaciones vistas en clases, es fácil recordar que la ecuación para un capacitor y una resistencia es la mostrada en (14).

$$v = 3 \cdot e^{\frac{-t}{1000 \cdot C}} \tag{14}$$

Luego, se incluye toda esta información en la ecuación (14), resultando (15)

$$1.89 = 3 \cdot e^{\frac{-2}{1000 \cdot C}} \tag{15}$$

Desde (15) se despeja C, obteniéndose que $C = 0.0043F$.

(b) (3 puntos) Después de que se cierra S_1, indique el tiempo que transcurre hasta que el voltaje del capacitor alcanza el 90% de carga.

Solución: En primer lugar, se conjetura que el capacitor sí alcanzará a cargarse antes de que el switch 2 se active, es decir, el capacitor alcanzará el voltaje deseado antes de 2 segundos.

El circuito entre $t = 2$ y $t = 4$ es el de la pregunta 2a, pero al cual se le ha agregado la resistencia R_1 y R_3, que ahora están en serie con la fuente V_1.

El primer paso es calcular la resistencia equivalente que "ve" el capacitor. Se constata que la resistencia que ve el capacitor es el paralelo entre $R_4(1000\Omega)$ y la suma de R_1 y R_3 (500.5Ω). El valor de dicha resistencia equivalente se ve en (16)

$$R_{eq} = \frac{500.5 \cdot 1000}{500.5 + 1000} \tag{16}$$

Por otro lado, se ve que el voltaje que alcanzará el capacitor después de mucho tiempo (el voltaje entre los bornes del capacitor cuando este esté completamente cargado) será de $5.3316V$, y el 90% de ello es 4.7984.

Con todos los antecedentes anteriores, y recordando la ecuación del capacitor, se tiene que el voltaje del capacitor vendrá dado por (17).

$$v = (5.3316 - 1.89) \cdot \left(1 - e^{\frac{-t}{333.555\Omega \cdot 0.0043F}}\right) + 1.89 \tag{17}$$

Entonces, si en la ecuación (17) se establece que el voltaje debe ser de 4.7984V, y se despeja la variable t, se puede llegar a la ecuación (18)

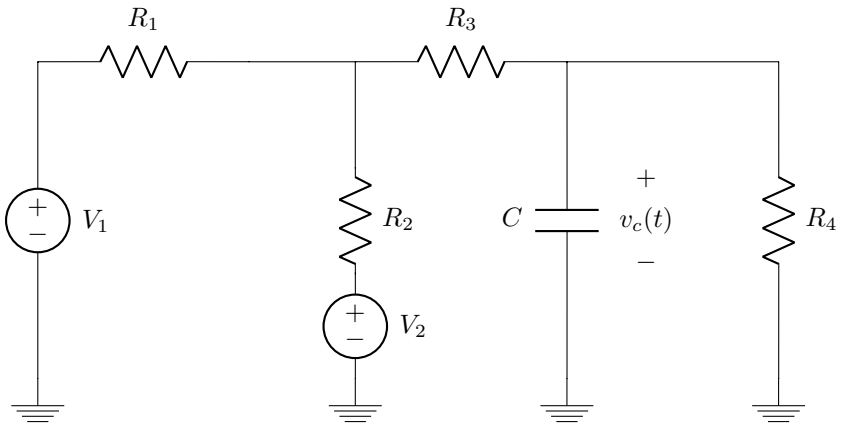
$$-t = 333.555 \cdot 0.0043 \cdot ln\left(1 - \frac{4.7984 - 1.89}{5.3316 - 1.89}\right) \tag{18}$$

Y desde (18), se obtiene que el capacitor se cargará hasta el 90% de su carga total en 2.6747 segundos contando desde los 2 segundos (es decir, llegará hasta el 90% en $t = 4.6747$).

Se ve que la carga no es suficientemente rápida, y antes de llegar al voltaje deseado, entrará en acción el switch 2, haciendo que el nuevo voltaje final sea distinto. Por ello, se calcula el voltaje del capacitor al llegar a los 4 segundos (justo antes de que se active el switch 2); usando la ecuación (17), se llega a (19).

$$v(t = 4) = 4.4782\ V \tag{19}$$

Luego se plantea el circuito que después de $t = 4$ segundos, el cual resulta como en la siguiente figura.



Ahora se plantean las ecuaciones del circuito de la figura anterior, y se despeja el voltaje del nodo del capacitor. Las ecuaciones del circuito son las mostradas en (20) y (21)

$$\frac{v_1 - 8}{500} + \frac{v_1 - 12}{0.5} + \frac{v_1 - v_2}{0.5} = 0 \tag{20}$$

$$\frac{v_2 - v_1}{0.5} + \frac{v_2}{1000} = v_2 \cdot s \cdot 0.0043 = 0 \tag{21}$$

El sistema de ecuaciones definido por (20) y (21) puede resolverlo despejando las variables, pero aquí se usará la Regla de Cramer para esto. Para ello se comienza por reordenar las ecuaciones, resultando (22) y (23).

$$4.002 \cdot v_1 - 2 \cdot v_2 = 24.016 \tag{22}$$

$$-2 \cdot v_1 + (2.001 + s \cdot 0.0043) \cdot v_2 = 0 \tag{23}$$

Aplicando la Regla de Cramer se llega a (24).

$$v_2 = \frac{2 \cdot 24.016}{4.002 \cdot (2.001 + s \cdot 0.0043) - 4} = \frac{11.984}{1 + s \cdot 0.0043} \tag{24}$$

Por tanto, se tendrá que la ecuación temporal que describe el voltaje del capacitor será (25).

$$v(t) = (11.984 - 4.47) \cdot \left(1 - e^{\frac{-t}{0.0043}}\right) + 4.47 \tag{25}$$

Desde la misma ecuación (25) se ve que el valor final del capacitor será de 11.984 volts, por tanto el 90% de él será 10.78 volts. Partiendo desde (25), pero despejando t para cuando el voltaje sea 10.78, se obtiene $t = 0.006$ segundos. Hay que notar que este valor puede ser aproximado, pues no se usaron tantos decimales en la respuesta como para tener una resolución temporal mejor.

Lo anterior implica que el sistema completo alcanzará el 90% de su valor final en $t = 4.006$ segundos.

(c) (10 puntos) En base a los parámetros entregados/calculados anteriormente, encuentre una expresión para el voltaje del capacitor $v_c(t)$ para todo $t \geq 0$.

Solución: Se ve desde las preguntas anteriores que:

- Para $t \geq 0$ y $t \leq 2$:

$$v(t) = 3 \cdot e^{\frac{-t}{1000 \cdot 0.0043}}$$

- Para $t \geq 2$ y $t \leq 4$:

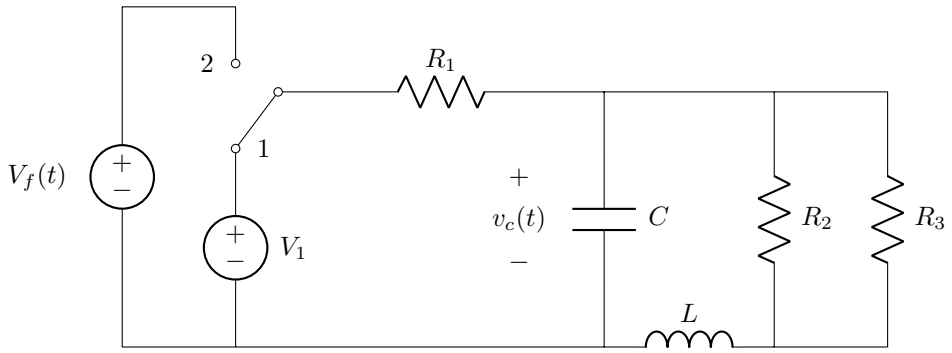
$$v(t) = (5.3316 - 1.89) \cdot \left(1 - e^{\frac{-t}{333.555 \cdot 0.0043}}\right) + 1.89$$

- Para $t \geq 4$:

$$v(t) = (11.984 - 4.47) \cdot \left(1 - e^{\frac{-t}{0.0043}}\right) + 4.47$$

Problema 3 (15 puntos)

En el circuito que se muestra a continuación se sabe que el switch cambia de estar conectado al nodo 1 a estar conectado al nodo 2 en $t = 0s$.



Para el desarrollo del problema considere los valores $V_1 = 10V$, $R_1 = 4\Omega$, $R_2 = 18\Omega$, $R_3 = 9\Omega$, $C = 0.25F$ y $L = 1H$.

(a) (10 puntos) Sin utilizar la Transformada de Laplace, determine la ecuación diferencial y condiciones de borde que permitirían calcular la variable $v_c(t)$ para $t \geq 0$. Luego, utilice la Transformada de Laplace para determinar dicha ecuación diferencial.

Solución: Sin transformada de Laplace:
Primero buscamos las condiciones iniciales.
para $t < 0s$ V_1 está conectada, por lo que el voltaje en el capacitor está dado por un divisor de voltaje

$$V_c(0) = V_1 \frac{R_2||R_3}{R_2||R_3 + R_1} = 6V \tag{26}$$

y la segunda condición necesaria:

$$i_L(0) = \frac{V_c(0)}{R_2||R_3} = 1A. \quad Luego \quad V_c^{'}(0) = 0 \tag{27}$$

Sabemos que:

$$V_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt} \quad y \quad i_c(t) = C\frac{dV_c(t)}{dt}$$

Para la primera malla tenemos:

$$V_f(t) = i_1(t)R_1 + V_c(t) \tag{28}$$

Por otro lado, por nodos, tenemos que la corriente del capacitor mas la del inductor es la corriente de la primera malla:

$$i_1 = i_L + i_c$$

Reemplazando y despejando $i_l(t)$

$$V_f(t) = i_c(t)R_1 + i_L(t)R_1 + V_c(t)$$

$$V_f(t) = R_1 C\frac{dV_c(t)}{dt} + i_L(t)R_1 + V_c(t)$$

$$i_L(t) = \frac{V_f(t)}{R_1} - C\frac{dV_c(t)}{dt} - \frac{V_c(t)}{R_1} \tag{29}$$

Ahora, para la segunda malla:

$$V_c(t) = i_L(t)R_1||R_2 + V_L(t)$$

$$V_c(t) = i_L(t)R_1||R_2 + L\frac{di_L(t)}{dt} \tag{30}$$

reemplazamos $i_L(t)$ de 29 en la ecuación 30:

$$V_c(t) = R_3||R_2\left(\frac{V_f(t)}{R_1} - C\frac{dV_c(t)}{dt} - \frac{V_c(t)}{R_1}\right) + L\left(\frac{dV_f(t)}{R_1 dt} - C\frac{d^2V_c(t)}{dt^2} - \frac{dV_c(t)}{R_1 dt}\right)$$

$$-CL\frac{d^2V_c(t)}{dt^2} - \frac{dV_c(t)}{dt}\left(\frac{L + R_1C(R_2||R_3)}{R_1}\right) - V_c\left(\frac{R_2||R_3}{R_1} + 1\right) + \frac{dV_f(t)}{dt}\frac{L}{R_1} + V_f(t)\left(\frac{R_2||R_3}{r_1}\right)$$

dividiendo por $L \cdot C$ y reemplazando los valores:

$$\frac{d^2V_c(t)}{dt^2} + 7\frac{dV_c(t)}{dt} + 10V_c(t) = \frac{dV_f(t)}{dt} + 6V_f(t) \tag{31}$$

Con transformada de Laplace:
Reduciendo parte del circuito, llegamos a una impedancia equivalente dada por

$$(R_3||R_2 + Ls)\,||\left(\frac{1}{Cs}\right) \tag{32}$$

Los bornes de esta impedancia están sometidos a $V_c(t)$. Por lo tanto con divisor de voltaje:

$$V_c = V_f \frac{(R_3||R_2 + Ls)\,||\left(\frac{1}{Cs}\right)}{(R_3||R_2 + Ls)\,||\left(\frac{1}{Cs}\right) + R_1} \tag{33}$$

$$V_c = V_f \frac{(R_3||R_2 + Ls)\left(\frac{1}{Cs}\right)}{(R_3||R_2 + Ls)\left(\frac{1}{Cs}\right) + R_1\left(R_2||R_3 + Ls + \frac{1}{Cs}\right)}$$

Reemplazando los valores llegamos a:

$$V_c = V_f \frac{6+s}{10+7s+s^2}$$

$$V_c s^2 + 7V_c s + 10V_c = V_f s + 6V_f \tag{34}$$

llegando a lo mismo calculado anteriormente.

(b) (5 puntos) Calcule las frecuencias naturales e identifique el tipo de respuesta homogénea de $v_c(t)$. Hint: recuerde los coeficientes del polinomio característico.

Solución: Polinomio característico:

$$s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2 = 0 \tag{35}$$

Entonces:

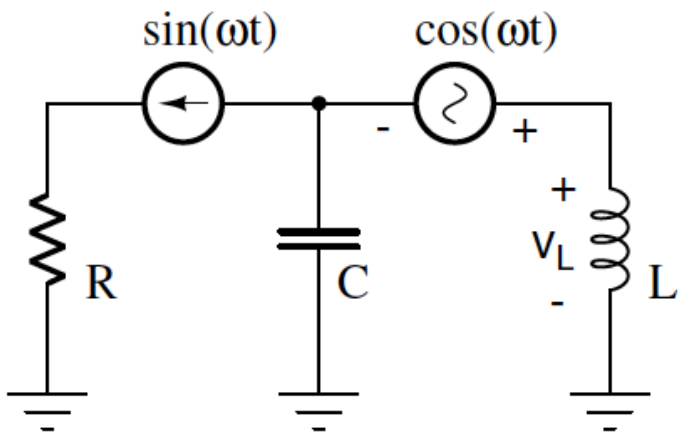
$$\omega_0^2 = 10 \quad \text{o} \quad \omega_0 = \sqrt{10} \tag{36}$$

$$2\zeta\omega_0 = 7 \quad \text{entonces} \quad \zeta = \frac{7}{2\sqrt{10}} = 1.106 > 1 \tag{37}$$

Por lo tanto es sobre-amortiguada.

Problema 4 (15 puntos)

Considere el circuito de la Figura más abajo y asuma que éste opera en régimen sinusoidal permanente.



(a) (10 puntos) Calcule el voltaje en el inductor como fasor en coordenadas rectangulares.

Solución: Para resolver esta pregunta, antes que todo, escribimos las fuentes de voltaje y corriente como fasores.

$$V = \cos(\omega t) = 1\angle 0^\circ = 1$$
$$I = \sin(\omega t) = \cos(\omega t - \pi/2) = 1\angle -90^\circ = -j$$

Luego, expresamos el condesador e inductor en términos de impedancia.

$$C \to \frac{1}{j\omega C}$$
$$L \to j\omega L$$

Para calcular el voltaje en el inductor, se realiza el método de superposición.

- Fuente de Voltaje encendida.
  Se realiza un divisor de voltaje.

$$V_L = V\frac{j\omega L}{\frac{1}{j\omega C} + j\omega L}$$

- Fuente de Corriente encendida.
  Se realiza un divisor de corriente.

$$V_L = -I\frac{\frac{1}{j\omega C}}{\frac{1}{j\omega C} + j\omega L} j\omega L$$

Luego, el voltaje obtenido es la suma de ambos. Reemplazando $V = 1$, $I = -j$, tenemos

$$V_L = -\frac{\omega L(\omega C + 1)}{1 - \omega^2 LC} \quad \text{(2 puntos)}$$

(b) (3 puntos) Calcule el voltaje en el inductor como fasor en coordenadas polares (magnitud y ángulo).

Solución: Para encontrar el resultado en coordenadas polares, es necesario analizar el signo del denominador (numerador positivo).

- Si $1 - \omega^2 LC > 0$:

$$|V_L| = \frac{\omega L(\omega C + 1)}{1 - \omega^2 LC}$$
$$\angle V_L = 180^\circ$$

- Si $1 - \omega^2 LC < 0$:

$$|V_L| = \frac{\omega L(\omega C + 1)}{-1 + \omega^2 LC}$$
$$\angle V_L = 0^\circ$$

(c) (2 puntos) Calcule el voltaje en el inductor en función del tiempo.

Solución: El voltaje en el inductor en función del tiempo es:

$$V_L = \frac{\omega L(\omega C + 1)}{|1 - \omega^2 LC|}\cos(\omega t + \phi)$$

Donde $\phi = 180^\circ$ ó 0° según las condiciones propuestas en (b).