IEE2123 Circuitos Eléctricos
Profesor: David Wats

Tarea 14

Función de Transferencia, Diagrama de Bode y Filtros

Problema 1

Obtenga la función de transferencia de los circuitos de las figuras **??** y **??**. Determine qué tipo de función de transferencia corresponde considerando los estímulos de entrada y salida.

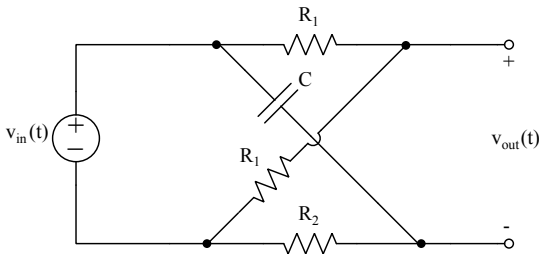


Figura 1: Circuito RC pregunta 1.a

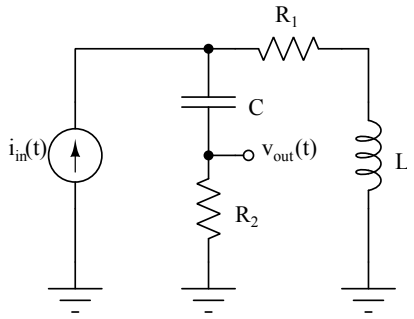


Figura 2: Circuito RLC pregunta 1.b

a. **Solución:** El circuito de la figura **??** puede ser redibujado tal como se puede apreciar en el circuito de la figura **??**.

Por divisor de voltaje se tiene que:

$$v_a = v_{in} \cdot \frac{R_1}{2R_1} = \frac{v_{in}}{2}$$

$$v_b = v_{in} \cdot \frac{R_2}{1/sC_2 + R_2}$$

Por lo tanto:

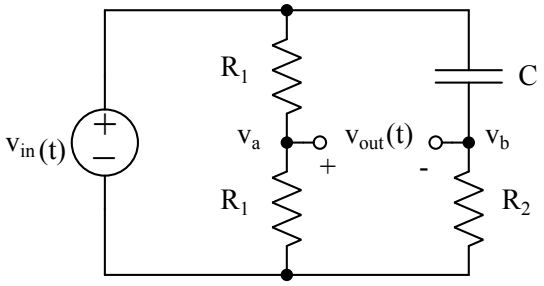


Figura 3: Circuito RC redibujado pregunta 1.a

$$v_{out} = v_a - v_b = v_{in} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{R_2}{1/sC_2 + R_2} \right)$$

Luego, la función de transferencia está dada por:

$$\frac{v_{out}}{v_{in}} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1 - sCR_2}{1 + sCR_2} \right)$$

Esta función de transferencia corresponde a una función de **Ganancia de Voltaje**.

b. **Solución:** Similarmente al caso anterior, el circuito de la figura **??** puede ser redibujado tal como se puede apreciar en el circuito de la figura **??**.

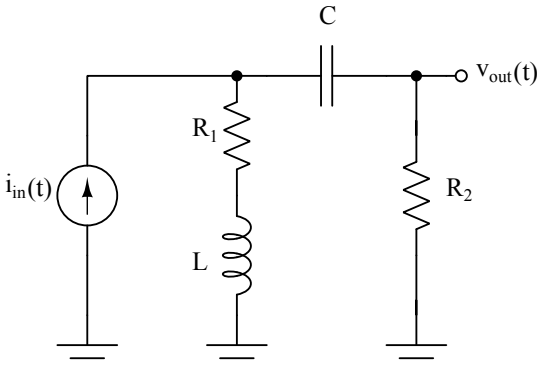


Figura 4: Circuito RLC redibujado pregunta 1.b

Por divisor de corriente se puede obtener que la corriente que pasa por el resistor R_2 está dado por:

$$i_{R_2} = i_{in} \cdot \frac{R_1 + sL}{(R_1 + sL) + (1/sC + R_2)}$$

Luego, el voltaje de salida v_{out} está dado por:

$$v_{out} = i_{R_2} \cdot R_2 = i_{in} \cdot R_2 \cdot \frac{R_1 + sL}{(R_1 + sL) + (1/sC + R_2)}$$

Por ende, la función de transferencia es:

$$\frac{v_{out}}{i_{in}} = R_2 \cdot \frac{R_1 + sL}{(R_1 + sL) + (1/sC + R_2)}$$

$$\frac{v_{out}}{i_{in}} = R_1 R_2 \cdot \frac{1 + sL/R_1}{R_1 + R_2 + sL + 1/sC}$$

Esta función de transferencia corresponde a una función de **Transimpedancia**.

Problema 2

a. Bosqueje los diagrama de Bode de fase y magnitud para las siguientes funciones de transferencia. En cada diagrama, marque claramente la información relevante (frecuencias de corte y puntos intermedios notables, además de rotular bien los ejes del gráfico). [1]

1. $H(s) = \frac{100s}{(s+1)(s+10)(s+50)}$
   Solución: Normalizando la función de transferencia se obtiene:

$$H(s) = \frac{1}{5} \cdot \frac{s}{(1+s)(1+s/10)(1+s/50)}$$

   El diagrama de Bode de esta función de transferencia se puede visualizar en la figura **??**, graficado usando el software GNU Octave.

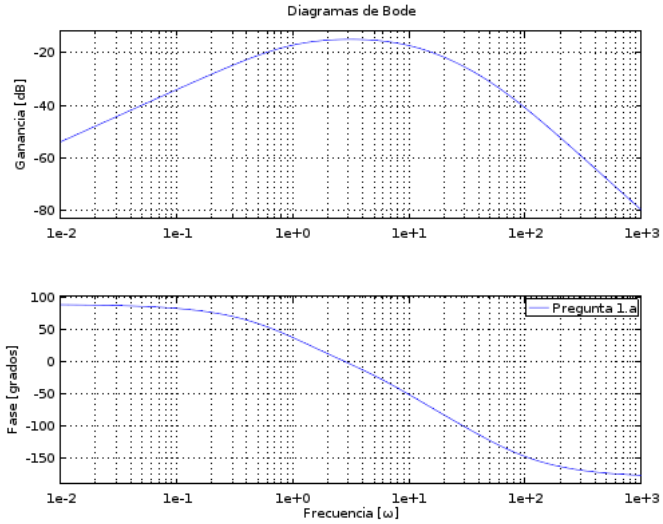


Figura 5: Diagrama de Bode de la función de transferencia del problema 2.a.1

2. $H(s) = \frac{8(s+1)^2}{-s^3(0{,}1s+1)}$
   Solución: Normalizando la función de transferencia se obtiene:

$$H(s) = -8 \cdot \frac{(1+s)^2}{s^3(1+s/10)}$$

   El diagrama de Bode de esta función de transferencia se puede visualizar en la figura **??**, graficado usando el software GNU Octave.
3. $H(s) = 10^4 \frac{s+1}{s(-s^2+110s+10^3)}$
   Solución: Normalizando la función de transferencia se obtiene:

$$H(s) = 10 \cdot \frac{s+1}{s(1+110/10^3 s - s^2)}$$

   El diagrama de Bode de esta función de transferencia se puede visualizar en la figura **??**, graficado usando el software GNU Octave.

[1] Cabe destacar que el diagrama tiene que ser dibujado ya sea a mano o en algún programa que permita bosquejarlo. No se aceptan soluciones finales graficadas en *softwares* de computación científica como Matlab/Octave, SciLab o Maple.

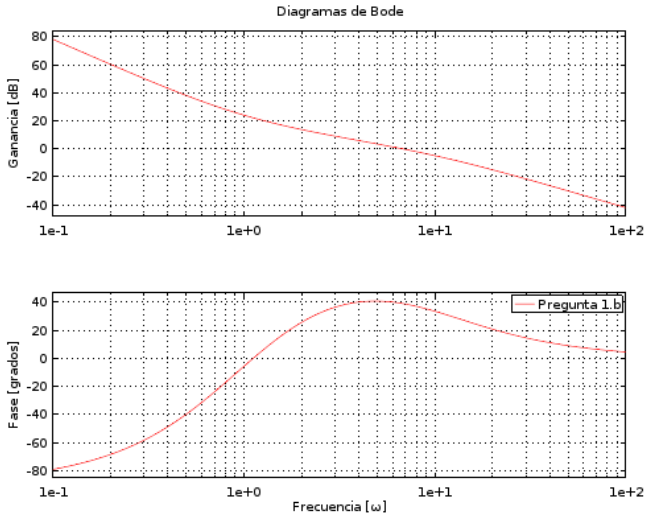


Figura 6: Diagrama de Bode de la función de transferencia del problema 2.a.2

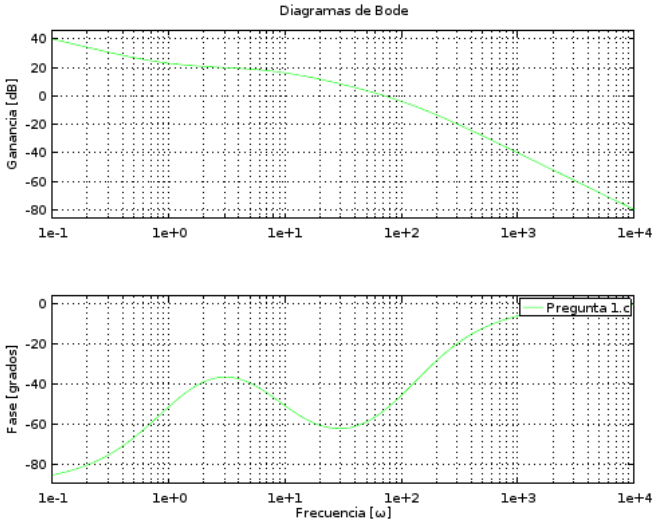


Figura 7: Diagrama de Bode de la función de transferencia del problema 2.a.3

b. A partir de los siguientes diagramas de magnitud de Bode, determine la función de transferencia que entrega este gráfico. [2] **Nota:** Considere que el comportamiento de las frecuencias bajas se mantiene invariante cuando $f \to 0$

   i. Ver diagrama de la figura **??**.

   Solución: Dado que el diagrama de magnitud se mantiene en $0dB$ para frecuencias bajas, existe un polo simple en $\omega_p = 10$, un cero simple en $\omega_z = 100$ y en $\omega_z = 1000$ y finalmente otro polo simple en $\omega_p = 10000$. Luego la función de transferencia debe tener la forma:

[2] **Hint:** Primero obtenga la función de transferencia no normalizada (por ejemplo, si un polo está en $\omega = \alpha$, la forma no normalizada sería $\frac{1}{(s+\alpha)}$). Luego, aplique la información entregada en el gráfico para obtener el valor de la constante que la acompaña. **Es una muy buena práctica corroborar el resultado de su función de transferencia estimada utilizando un *software* de computación científica.**

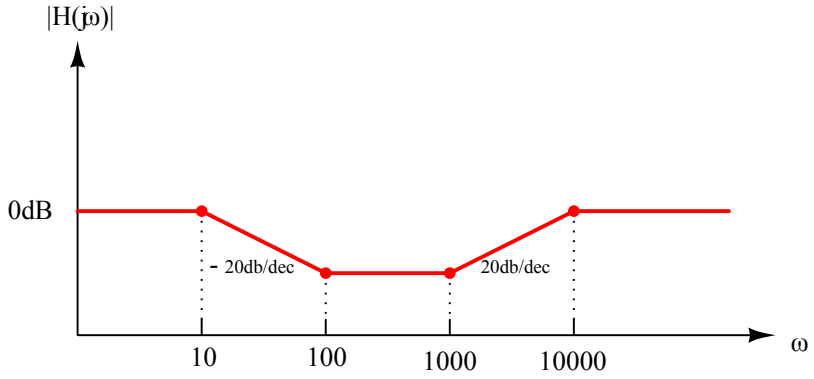


Figura 8: Diagrama de bode pregunta 2.b.i

$$H(s) = K \cdot \frac{(100+s)(1000+s)}{(10+s)(10000+s)}$$

Luego, como $0dB = 20log_{10}(|H(j\omega)|)$ cuando $H(j\omega) = 1$ para $\omega \ll 10$, entonces:

$$H(j\omega)\big|_{\omega\to 0} = K \cdot \frac{(100)(1000)}{(10)(10000)} = 1$$

Por ende, $K = 1$ con lo cual resulta:

$$H(s) = \frac{(100+s)(1000+s)}{(10+s)(10000+s)}$$

II. Ver diagrama de la figura **??**.

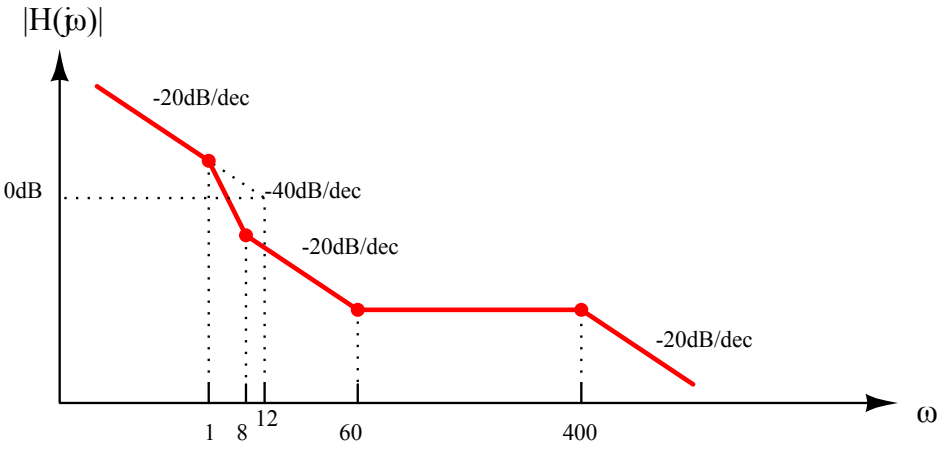


Figura 9: Diagrama de bode pregunta 2.b.ii

Solución: Dado que el diagrama de magnitud se mantiene decayendo a $20dB/dec$ de manera invariante desde las frecuencias bajas, se concluye la existencia de un polo en el origen. Además, dado que lo prosigue una caída de $40dB/dec$ se concluye la existencia de un polo simple en $\omega_p = 1$, seguido de un cero simple en $\omega_z = 8$, otro cero simple en $\omega_z = 60$ y finalmente un polo simple en $\omega_p = 400$.

Con esta información, la función de transferencia debe tener la forma:

$$H(s) = K \cdot \frac{(8+s)(60+s)}{s(1+s)(400+s)}$$

Nótese que si el polo en el origen continuara, entregaría $0dB$ cuando $\omega = 12$. Esto se debe a que existe una constante K que hace que la recta de respuesta en frecuencia del polo en el origen suba, de modo que intersecte en $\omega = 12$ en vez de $\omega = 1$. Luego, la respuesta en frecuencia de esta función de transferencia estaría dada por $H_p(j\omega) = \frac{K}{j\omega}$. Transformándolos a decibeles de obtiene que:

$$20log_{10}(|H_p(j\omega)|)\Big|_{\omega=12} = 0$$

Esto se cumple cuando $|H_p(j\omega)| = 1$. Luego:

$$|H_p(j\omega)|\Big]_{\omega=12} = \frac{K}{12} = 1$$

Por lo tanto, $K = 12$, con lo cual la función de transferencia resulta:

$$H(s) = 12 \cdot \frac{(8+s)(60+s)}{s(1+s)(400+s)}$$

iii. Ver diagrama de la figura **??**.

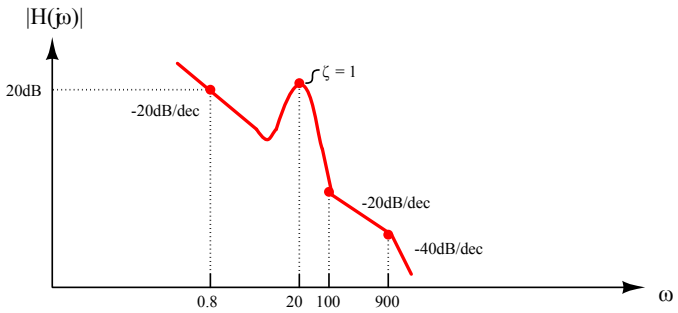


Figura 10: Diagrama de bode pregunta 2.b.iii

Solución: Dado que el diagrama de magnitud se mantiene decayendo a $20dB/dec$ de manera invariante desde las frecuencias bajas, se concluye la existencia de un polo en el origen, seguido de un polo cuadrático en $\omega_p = 20$ con $\zeta = 1$, seguido de dos ceros simples en $\omega_z = 100$ y un polo simple $\omega_p = 900$.
Para el caso del polo cuadrático, su función de transferencia no normalizada es de la forma:

$$H_p(j\omega) = s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2$$

Evaluando para $\omega_0 = 20$ y $\zeta = 1$, se tiene:

$$H_p(j\omega) = s^2 + 40s + 400$$

Con esta información, la función de transferencia debe tener la forma:

$$H(s) = K \cdot \frac{(100+s)^2}{s(400+40s+s^2)(900+s)}$$

Como en $\omega = 0{,}8$ se tiene que $20log_10(|H(j\omega)|) = 20dB$, entonces $|H(j\omega)|\big]_{\omega \ll 0,8} = 10$. Dado que la frecuencia ω es despreciable en los términos acompañados con polos/ceros de frecuencias grandes se tiene que:

$$|H(j\omega)|\big]_{\omega \ll 0,8} = 10 = K \cdot \frac{(100)^2}{0{,}8(400)(900)}$$

Luego $K \approx 288$, con lo cual la función de transferencia resulta:

$$H(s) = 288 \cdot \frac{(100+s)^2}{s(400+40s+s^2)(900+s)}$$

Problema 3

Considere los circuitos de las figuras **??** y **??**.

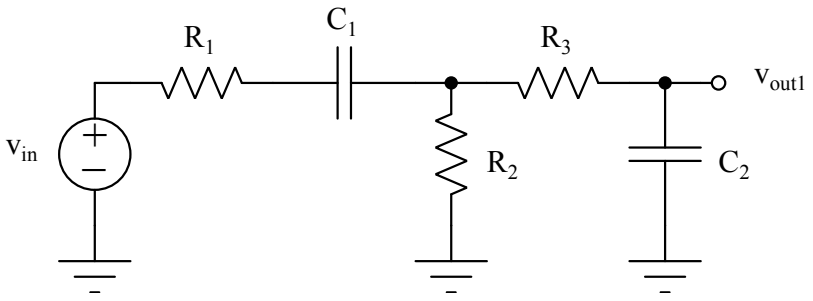


Figura 11: Filtro RC conectado en cascada

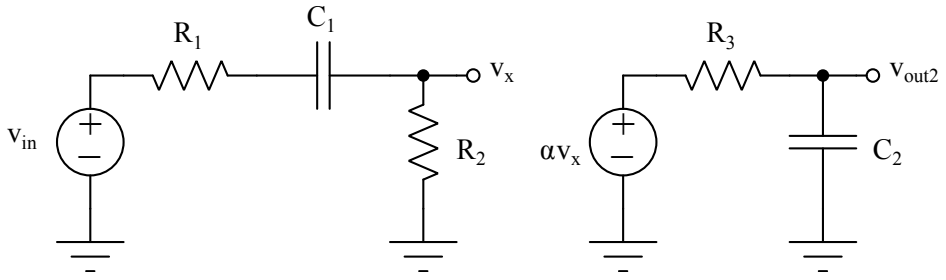


Figura 12: Filtro RC como buffer

a. Obtenga la función de transferencia $F_1(s) = \frac{v_{out1}}{v_{in}}$ para el circuito de la figura **??**. [3]

Solución: Llamemos v_x al nodo en el cual se conecta C_1, R_2 y R_3. Por divisor de tensión se tiene que:

$$v_{out} = v_x \cdot \frac{1/sC_2}{1/sC_2 + R_3} = v_x \cdot \frac{1}{1 + sR_3C_2}$$

Donde:

$$v_x = v_{in} \cdot \frac{R_2 \parallel (R_3 + 1/sC_2)}{R_1 + 1/sC_1 + R_2 \parallel (R_3 + 1/sC_2)}$$

Por lo tanto:

$$v_{out} = v_{in} \cdot \frac{R_2 \parallel (R_3 + 1/sC_2)}{R_1 + 1/sC_1 + R_2 \parallel (R_3 + 1/sC_2)} \cdot \frac{1}{1 + sR_3C_2}$$

Con lo cual se obtiene la función de transferencia:

$$F_1(s) = \frac{R_2 \parallel (R_3 + 1/sC_2)}{R_1 + 1/sC_1 + R_2 \parallel (R_3 + 1/sC_2)} \cdot \frac{1}{1 + sR_3C_2}$$

[3] Utilice expresiones de baja entropía. Es decir, por ejemplo, si tiene que escribir el operador paralelo ($\parallel$), déjelo en esos términos.

b. Obtenga las funciones de transferencia $F_x(s) = \frac{v_x}{v_{in}}$ $F_2(s) = \frac{v_{out2}}{v_{in}}$ para el circuito de la figura **??**.

Solución: Aplicando divisor de voltaje se obtiene rápidamente que:

$$v_x = v_{in} \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2 + 1/sC_1}$$

Luego, la función de transferencia $F_x(s)$ está dada por:

$$F_x(s) = \frac{R_2}{R_1 + R_2 + 1/sC_1}$$

Similarmente:

$$v_{out} = \alpha v_x \cdot \frac{1/sC_2}{1/sC_2 + R_3}$$

Evaluando el valor obtenido de v_x:

$$v_{out} = \alpha \cdot v_{in} \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2 + 1/sC_1} \cdot \frac{1/sC_2}{1/sC_2 + R_3}$$

Con lo cual la función de transferencia $F_2(s)$ es:

$$F_2(s) = \alpha \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2 + 1/sC_1} \cdot \frac{1}{1 + sR_3C_2}$$

c. Si es que $\alpha = 1$, ¿$F_1(s) = F_2(s)$? Fundamente su respuesta.

Solución: Haciendo $\alpha = 1$, se obtiene que:

$$F_2(s) = \frac{R_2}{R_1 + R_2 + 1/sC_1} \cdot \frac{1}{1 + sR_3C_2}$$

Tal como se puede apreciar, las funciones $F_1(s) \neq F_2(s)$ ya que al conectar las configuraciones en cascada existen corrientes que no están contempladas para el caso del *buffer* en el circuito de la figura **??**. En este último caso se evita ese problema ya que no existen "fugas" de corriente en la primera parte del circuito. Nótese, además, que con este comportamiento es posible calcular las funciones de transferencia de cada uno de los circuitos y simplemente multiplicarlas, obteniendo la función de transferencia final (a diferencia del circuito de la figura **??** en el que no se puede llegar y multiplicar de la misma manera debido al capacitor C_2 en serie con el resistor R_2 que están conectados al nodo v_x).

d. Considere $R_1 = R_2 = 10k\Omega$, $R_3 = 2{,}5k\Omega$, $C_1 = 1\mu F$, $C_2 = 10nF$ y $\alpha = 3$. Determine las funciones de transferencia normalizadas para $F_1(s)$, $F_2(s)$ y $F_x(s)$.

Solución: Evaluando las funciones de transferencia se obtiene que:

$$F_1(s) = \frac{20000s}{3s^2 + 40250s + 2000000}$$

$$F_2(s) = \frac{60000s}{(s + 50)(s + 40000)}$$

$$F_x(s) = \frac{1}{2} \cdot \frac{s}{s+50}$$

Normalizándolos:

$$F_1(s) = \frac{1}{100} \cdot \frac{s}{\frac{3}{2000000}s^2 + \frac{40250}{2000000}s + 1}$$

$$F_2(s) = \frac{3}{100} \cdot \frac{s}{(\frac{s}{50}+1)(\frac{s}{40000}+1)}$$

$$F_x(s) = \frac{1}{100} \cdot \frac{s}{\frac{s}{50}+1}$$

e. Obtenga los diagramas de Bode de las funciones de transferencia obtenidas en el punto anterior en función de ω utilizando la herramienta computacional MATLAB® ó GNU Octave ó Scilab (adjunte los pantallazos de los resultados de su programa con las respectivas etiquetas de eje). [4] ¿A qué tipos de filtros corresponden?

Solución: Utilizando el *software* de computación científica GNU Octave, se obtiene los diagramas de Bode de las funciones $F_1(s)$, $F_2(s)$ y $F_x(s)$ tal como se pueden apreciar en las figuras **??**, **??** y **??**. Es posible ver que tanto $F_1(s)$ como $F_2(s)$ actúan como filtros pasabanda, y $F_x(s)$ actúa como un filtro pasa altos.

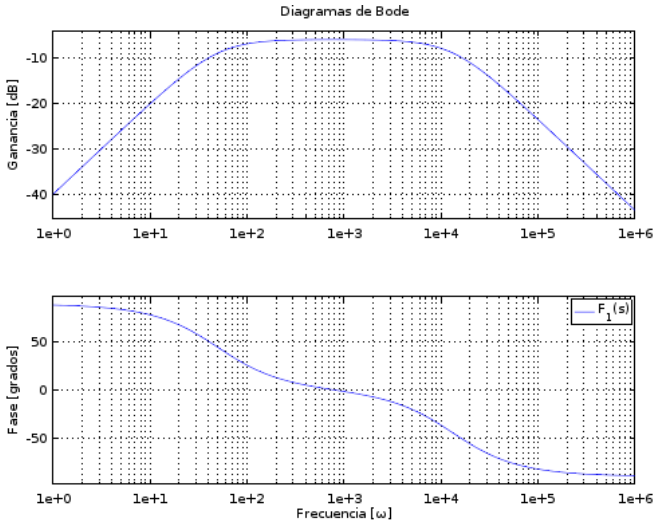


Figura 13: Diagrama de bode de la función de transferencia $F_1(s)$ realizado en el *software* GNU Octave

[4] **Hint:** Averigüe sobre las funciones *bode()* y *tf()* para el caso de MATLAB® o GNU Octave

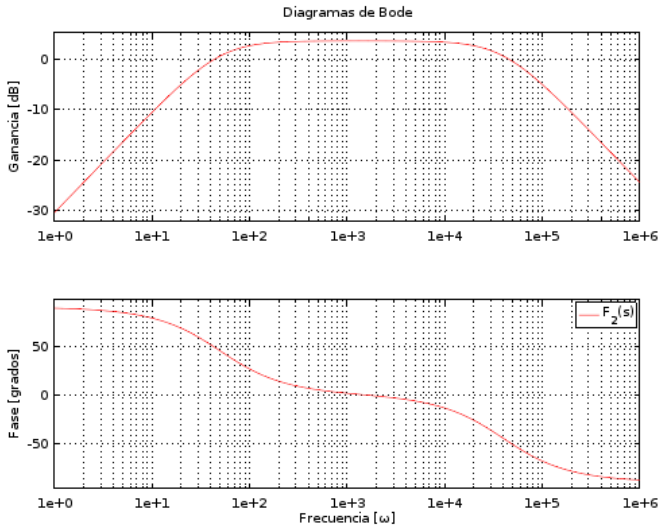


Figura 14: Diagrama de bode de la función de transferencia $F_2(s)$ realizado en el *software* GNU Octave

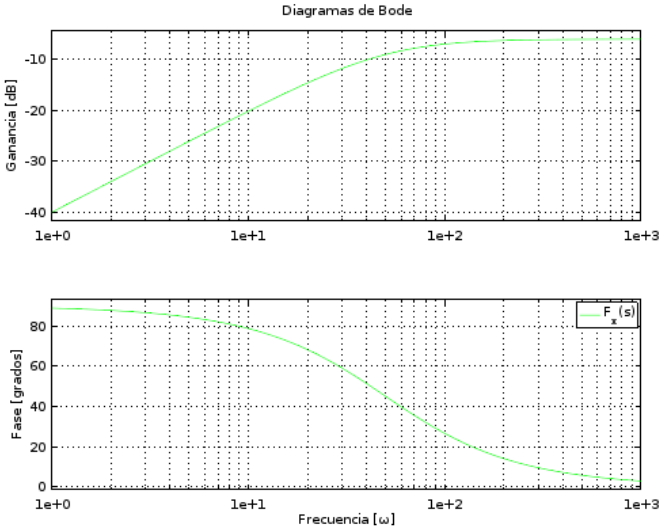


Figura 15: Diagrama de bode de la función de transferencia $F_x(s)$ realizado en el *software* GNU Octave