10 Sistemas Trifásicos balanceados*

1. Introducción
2. Sistemas trifásicos y la potencia instantánea
3. Conexiones trifásicas y solución de circuitos

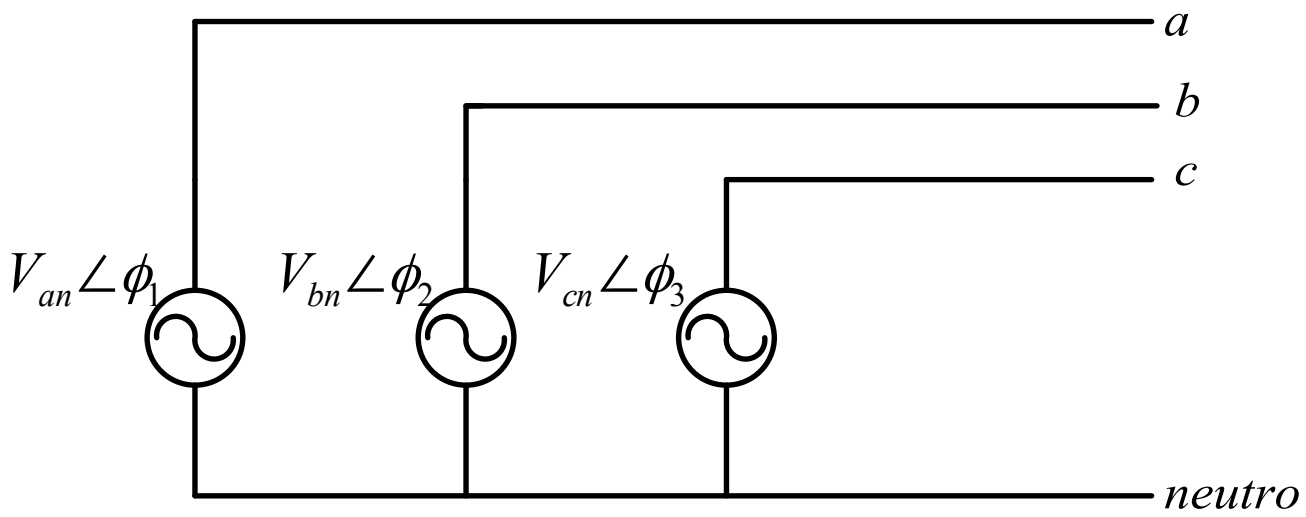
Bibliografía

Capítulo 12 Dorf 6ª Edición

**Notas basadas en los apuntes del Prof. Dr. David Watts*

10.1 Introducción

- **Circuito Trifásico:** extensión del caso monofásico de CA, su función forzante es un sistema de 3 voltajes cuya frecuencia y magnitud son iguales, y sus ángulos de fase son diferentes:



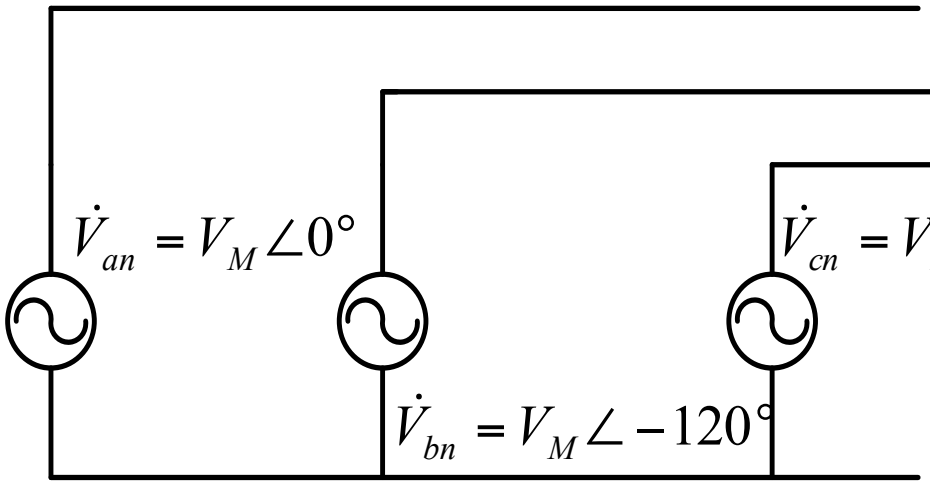
$$|V_{an}| = |V_{bn}| = |V_{cn}|$$

$$\phi_1 \neq \phi_2 \neq \phi_3$$

10.1 Introducción

- **Sistema trifásico de voltajes balanceado:** consta de tres voltajes sinusoidales que tienen la misma magnitud y frecuencia y cada voltaje está desfasado en 120° respecto a los otros dos.

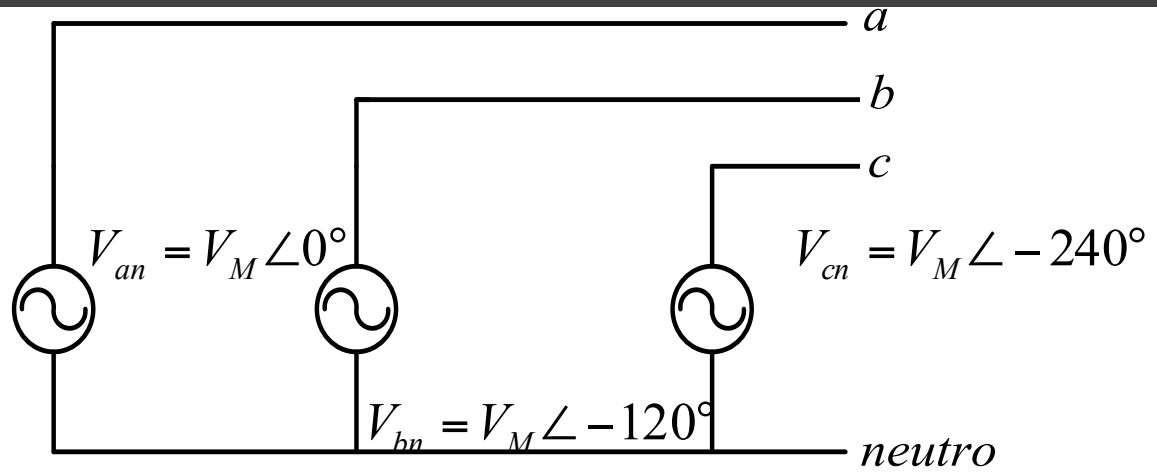
- Si las cargas son tales que las corrientes producidas por los voltajes están también balanceadas ➡ **circuito trifásico balanceado.**

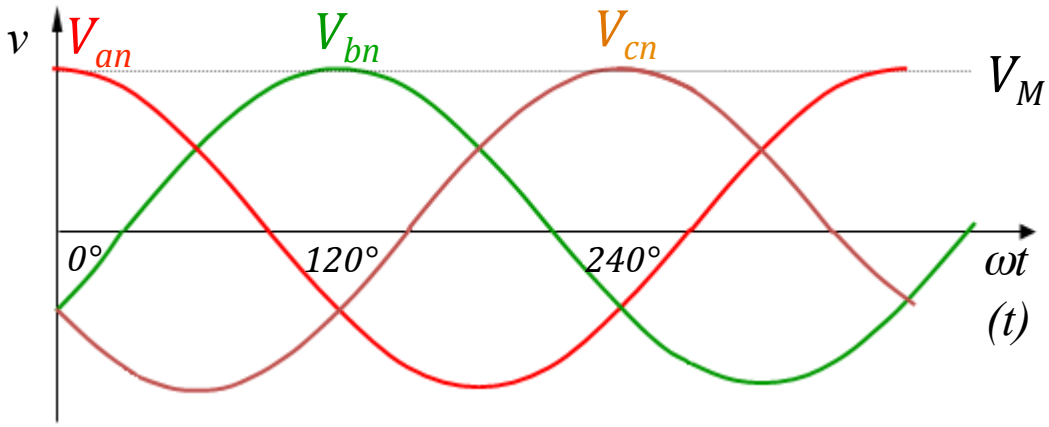


$$|\dot{V}_{an}| = |\dot{V}_{bn}| = |\dot{V}_{cn}|$$

$$\dot{V}_{an} + \dot{V}_{bn} + \dot{V}_{cn} = 0$$

10.1 Introducción





Dominio del tiempo

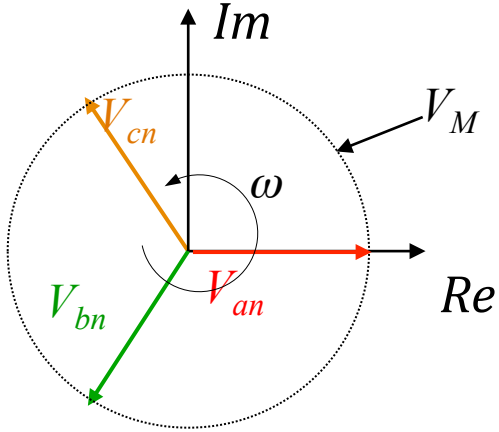
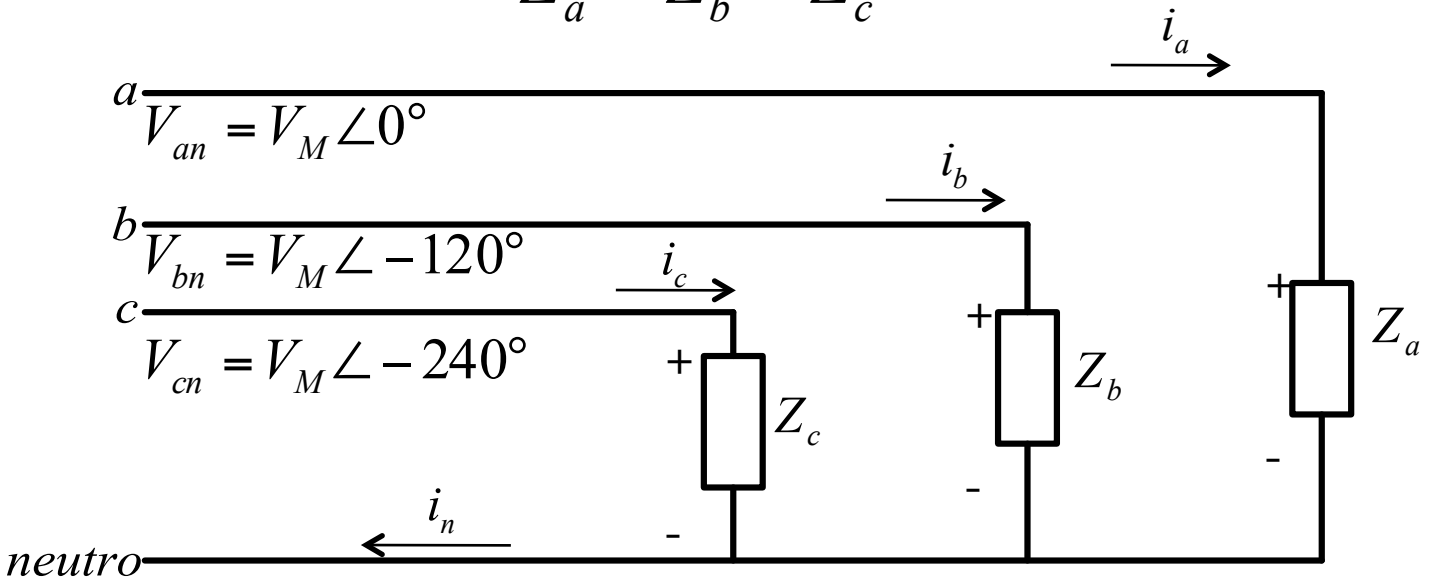


Diagrama fasorial

10.1 Introducción

- **Sistema de cargas balanceado**

$$Z_a = Z_b = Z_c$$



- Fuente de tensión y carga balanceada:

$$i_a + i_b + i_c = i_n = 0$$

10.1 Introducción

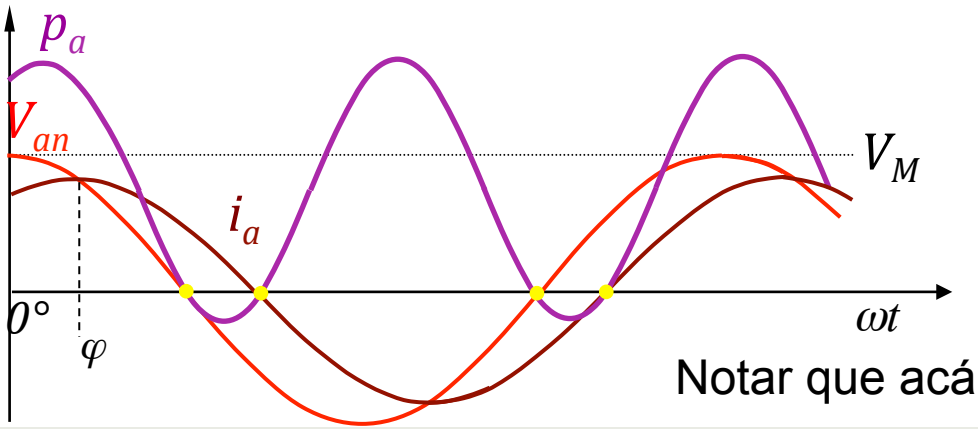
- **Potencia monofásica instantánea:** oscilante o pulsante

$$p_a(t) = v_{an}(t) \cdot i_a(t) = V_M \cos(\omega t) \cdot I_M \cos(\omega t - \varphi)$$

$$p_a(t) = \frac{V_M \cdot I_M}{2}\left[\cos(\varphi) + \cos(2\omega t + \varphi)\right]$$

$$\boxed{p_a(t) = V_{RMS} \cdot I_{RMS} \cos(\varphi) + V_{RMS} \cdot I_{RMS} \cos(2\omega t + \varphi)}$$

Dependiente del tiempo y de la frecuencia con media nula (oscilante)



Notar que acá V_m e I_m son Peak

10.1 Introducción

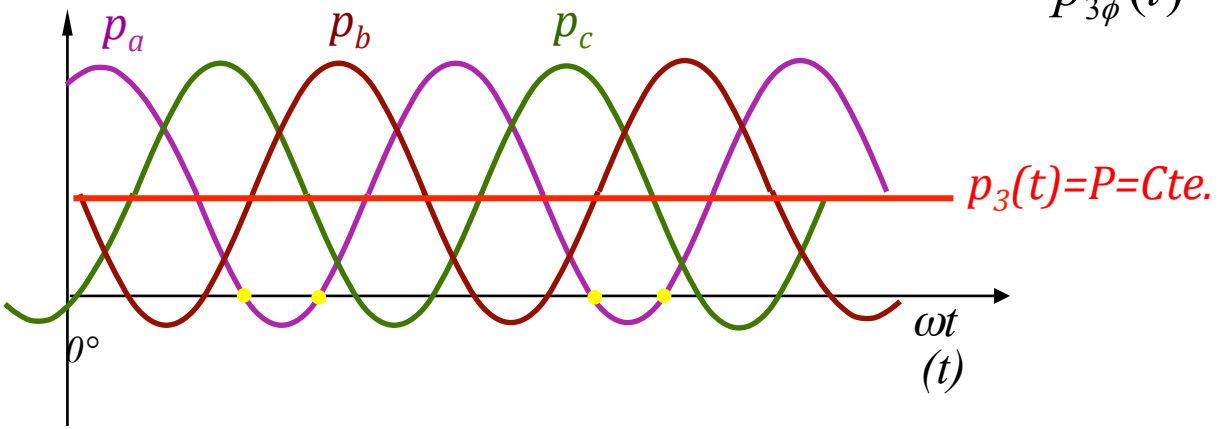
- **Potencia trifásica instantánea:** no oscilante o constante

$$p_{3\phi}(t) = p_a(t) + p_b(t) + p_c(t)$$

$$p_{3\phi}(t) = \frac{3}{2} V_M I_M \cos(\theta) = 3 V_{RMS} I_{RMS} \cos(\theta) = 3 p_{1\phi}$$

¡No depende del tiempo!

$$p_{3\phi}(t) = P = cte.$$



10.1 Introducción

- **Demostración**

$$V_{an}(t) = V_M \cos(\omega t)$$
$$V_{bn}(t) = V_M \cos(\omega t - 120°)$$
$$V_{cn}(t) = V_M \cos(\omega t + 120°)$$

$$i_{an}(t) = I_M \cos(\omega t - \theta)$$
$$i_{bn}(t) = I_M \cos(\omega t - \theta - 120°)$$
$$i_{cn}(t) = I_M \cos(\omega t - \theta + 120°)$$

$$p_{3\varphi}(t) = p_a(t) + p_b(t) + p_c(t)$$

- Reemplazando

$$p_{3\phi}(t) = V_M I_M [\cos(\omega t)\cos(\omega t - \theta) + \cos(\omega t - 120°)\cos(\omega t - \theta - 120°) + \cos(\omega t + 120°)\cos(\omega t - \theta + 120°)]$$

- Utilizamos

$$2\cos(\alpha)\cos(\beta) = \cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)$$

10.1 Introducción

- Luego

$$p_{3\phi}(t) = \frac{V_M I_M}{2}[\cos(\theta) + \cos(2\omega t - \theta) + \cos(\theta) + \cos(2\omega t - \theta - 240°)$$
$$+ \cos(\theta) + \cos(2\omega t - \theta + 240°)]$$

Además

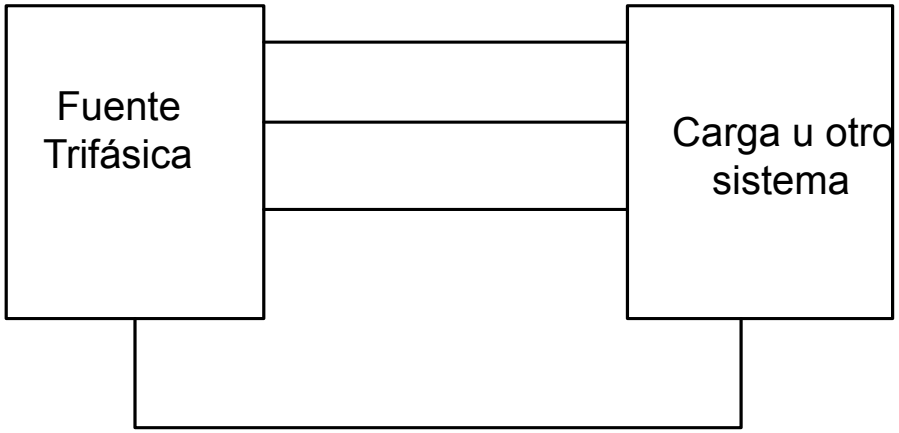
$$\cos(2\omega t - \theta) + \cos(2\omega t - \theta - 240°) + \cos(2\omega t - \theta + 240°) = 0$$

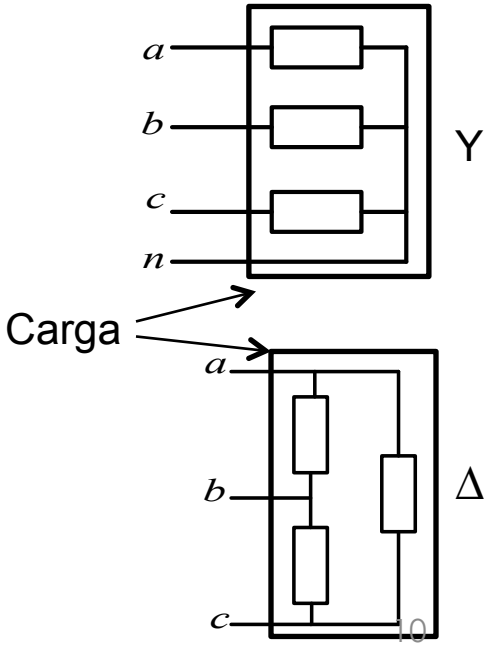
Por lo tanto

$$\boxed{p_{3\phi}(t) = \frac{3}{2} V_M I_M \cos(\theta) = 3 V_{RMS} I_{RMS} \cos(\theta) = 3 p_{1\phi}}$$

10.2 Sistemas trifásicos balanceados. Ejemplos

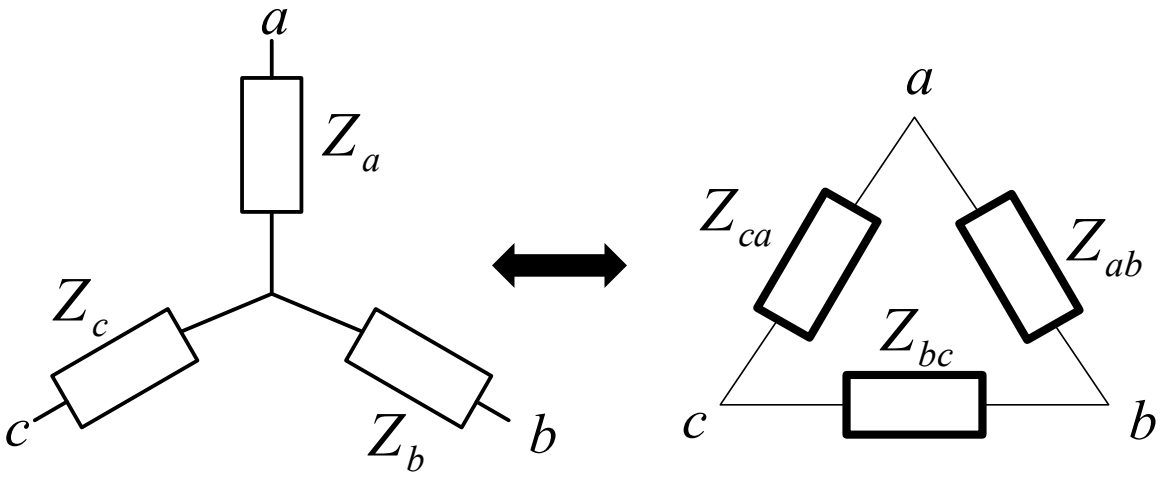
- Interconexión de sistemas





10.2 Conexiones trifásicas. Carga Y-Δ

- Equivalencia entre impedancias conectads en Y-Δ



Carga balanceada:

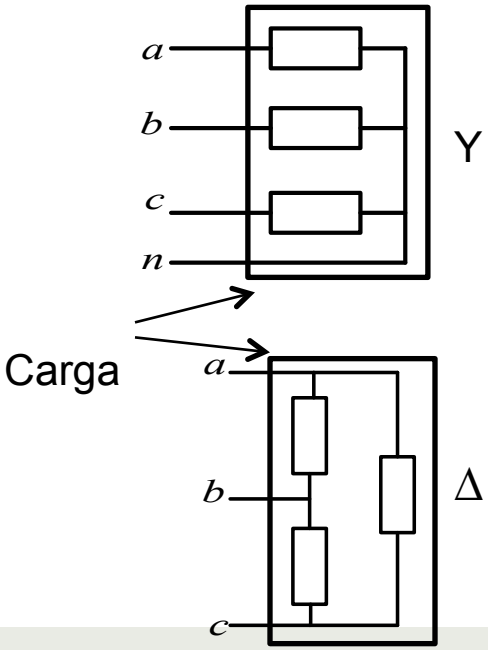
$$Z_Y = \frac{1}{3} Z_\Delta$$

$$Z_\Delta = 3 \cdot Z_Y$$

$$\mathbf{Z}_a = \frac{Z_{ab} \cdot Z_{ca}}{Z_{ab} + Z_{bc} + Z_{ca}} \qquad \mathbf{Z}_{ab} = \frac{Z_a \cdot Z_b + Z_b \cdot Z_c + Z_c \cdot Z_a}{Z_c}$$

$$\mathbf{Z}_b = \frac{Z_{ab} \cdot Z_{bc}}{Z_{ab} + Z_{bc} + Z_{ca}} \qquad \mathbf{Z}_{bc} = \frac{Z_a \cdot Z_b + Z_b \cdot Z_c + Z_c \cdot Z_a}{Z_a}$$

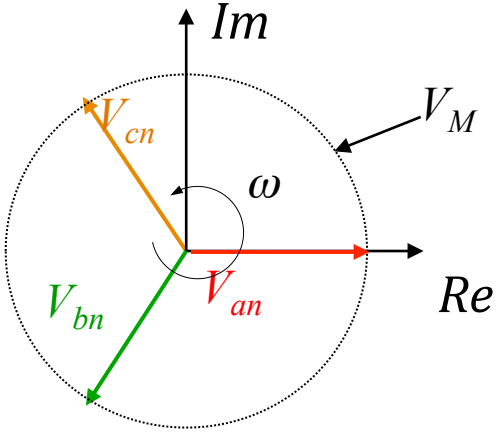
$$\mathbf{Z}_c = \frac{Z_{bc} \cdot Z_{ca}}{Z_{ab} + Z_{bc} + Z_{ca}} \qquad \mathbf{Z}_{ca} = \frac{Z_a \cdot Z_b + Z_b \cdot Z_c + Z_c \cdot Z_a}{Z_b}$$



10.2 Conexiones trifásicas. Secuencias fases

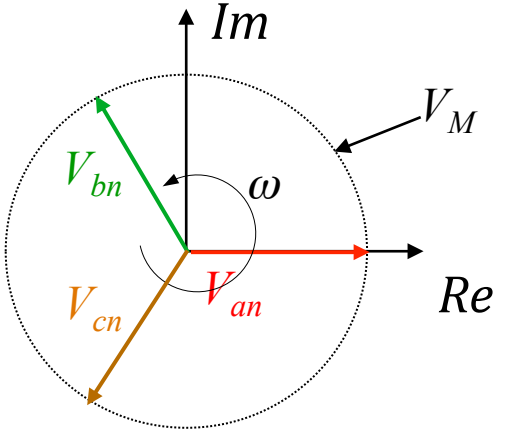
- Secuencia de fases positiva: abc, V_{bn} retrasa a V_{an} en 120°, y V_{cn} retrasa en 240° a V_{an}.

$$V_{an}(t) = V_M \angle 0°$$
$$V_{bn}(t) = V_M \angle -120°$$
$$V_{cn}(t) = V_M \angle 120°$$



- Secuencia de fases negativa: acb, V_{bn} adelanta a V_{an} en 120°, y V_{cn} retrasa en 120° a V_{an}.

$$V_{an}(t) = V_M \angle 0°$$
$$V_{bn}(t) = V_M \angle 120°$$
$$V_{cn}(t) = V_M \angle -120°$$



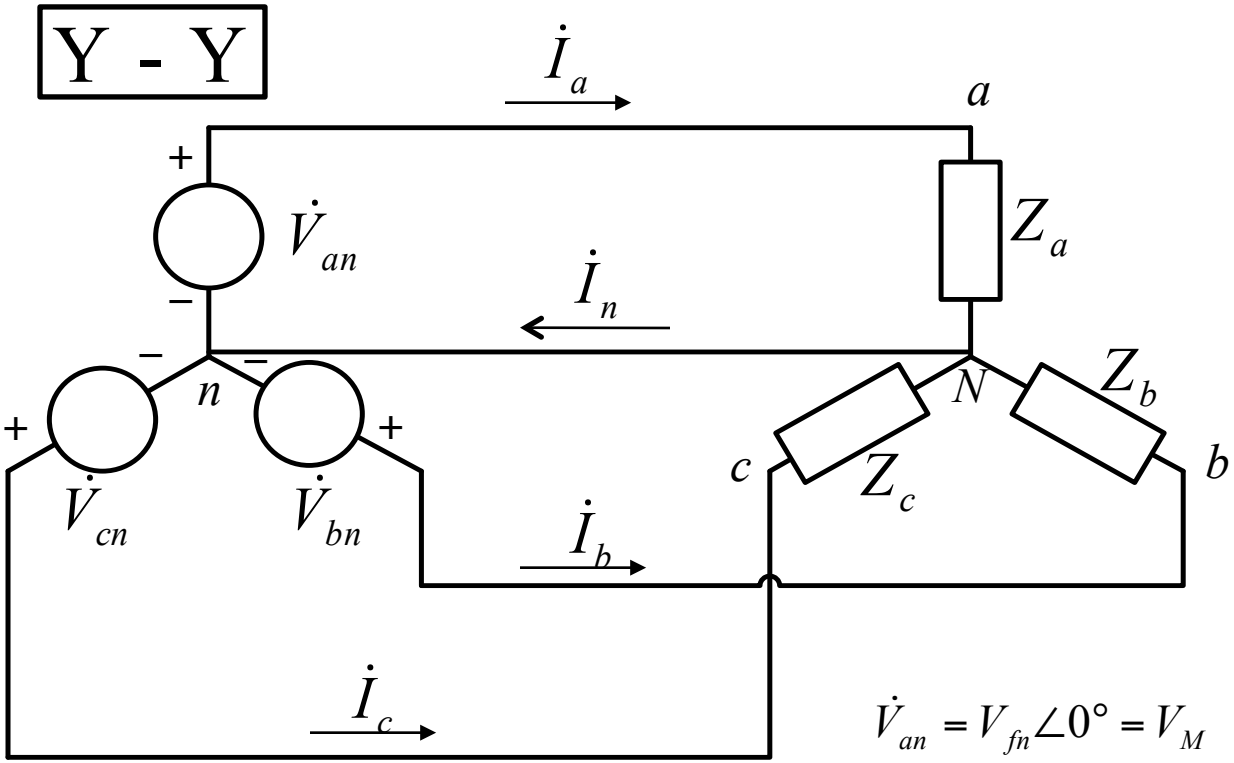
10.2 Conexiones trifásicas. Fuente-carga

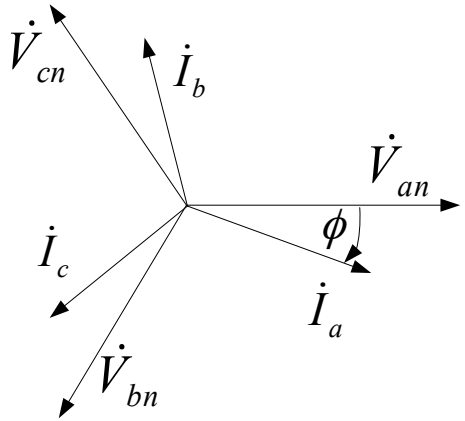
- **Conexiones Simples:** Dado que las fuentes y las cargas pueden conectarse en estrella o en delta, los circuitos trifásicos pueden conectarse en múltiples combinaciones, en el caso mas simple de una carga y una fuente estas son las siguientes:

$$Y - Y \qquad Y - \Delta \qquad \Delta - Y \qquad \Delta - \Delta$$

- Estudiaremos el caso Y-Y y $\Delta - \Delta$, ya que bastan para deducir los demás.
- Después se estudia el caso de múltiples cargas.
- *Como se conectarían múltiples cargar?*

10.2 Conexiones trifásicas. Fuente-carga





$$\dot{V}_{an} = V_{fn}\angle 0° = V_M$$

$$\dot{V}_{bn} = V_{fn}\angle -120° = V_M\left[-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

Circuito balanceado ⟶

$$\dot{V}_{cn} = V_{fn}\angle 120° = V_M\left[-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

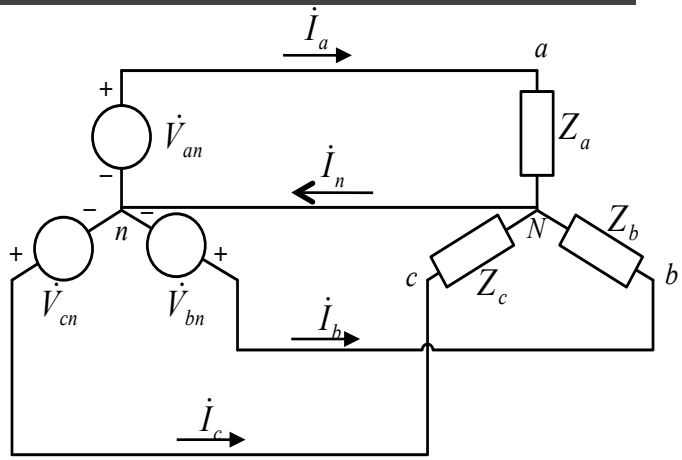
10.2 Conexiones trifásicas. Fuente-carga

¿ Cuanto vale V_{ab}?

$$\dot{V}_{ab} = \dot{V}_{an} - \dot{V}_{bn} = V_{fn}\angle 0^o - V_{fn}\angle -120^o$$

$$= V_{fn} - V_{fn}\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}\,j}{2}\right) = V_{fn}\left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}\,j}{2}\right)$$

$$\longrightarrow \boxed{\dot{V}_{ab} = V_{fn}\,\sqrt{3}\,\angle 30^o}$$



Análogamente:

$$\dot{V}_{ab} = V_{ff}\angle 30^o$$

$$\dot{V}_{bc} = V_{ff}\angle -90^o$$

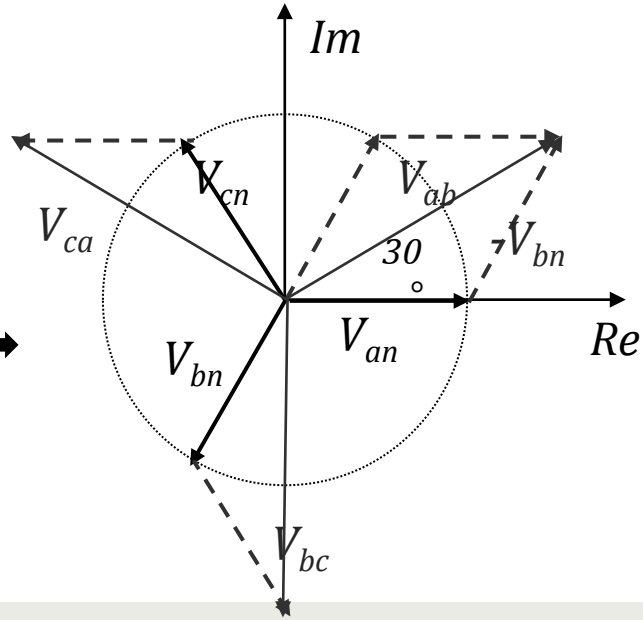
$$\dot{V}_{ca} = V_{ff}\angle -210^o$$

$$V_{ff} = V_{fn}\,\sqrt{3}$$

→ Fase-fase

¡Gráficamente era evidente!

Chile: 380/220V



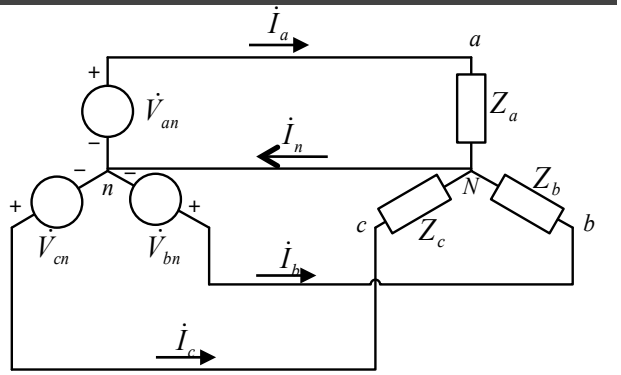
10.2 Conexiones trifásicas. Fuente-carga

En el caso de las **corrientes**:

$$\dot{I}_a = \frac{\dot{V}_{an}}{Z_a} = \frac{V_{fn}\ \angle 0^\circ}{Z_a} = \frac{V_{fn}}{|Z_a|}\angle -\phi$$

$$\dot{I}_b = \frac{\dot{V}_{bn}}{Z_b} = \frac{V_{fn}\ \angle -120^\circ}{Z_b} = \frac{V_{fn}}{|Z_b|}\angle -120 -\phi$$

$$\dot{I}_c = \frac{\dot{V}_{cn}}{Z_c} = \frac{V_{fn}\ \angle 120^\circ}{Z_c} = \frac{V_{fn}}{|Z_c|}\angle -240 -\phi$$



En circuitos balanceados:

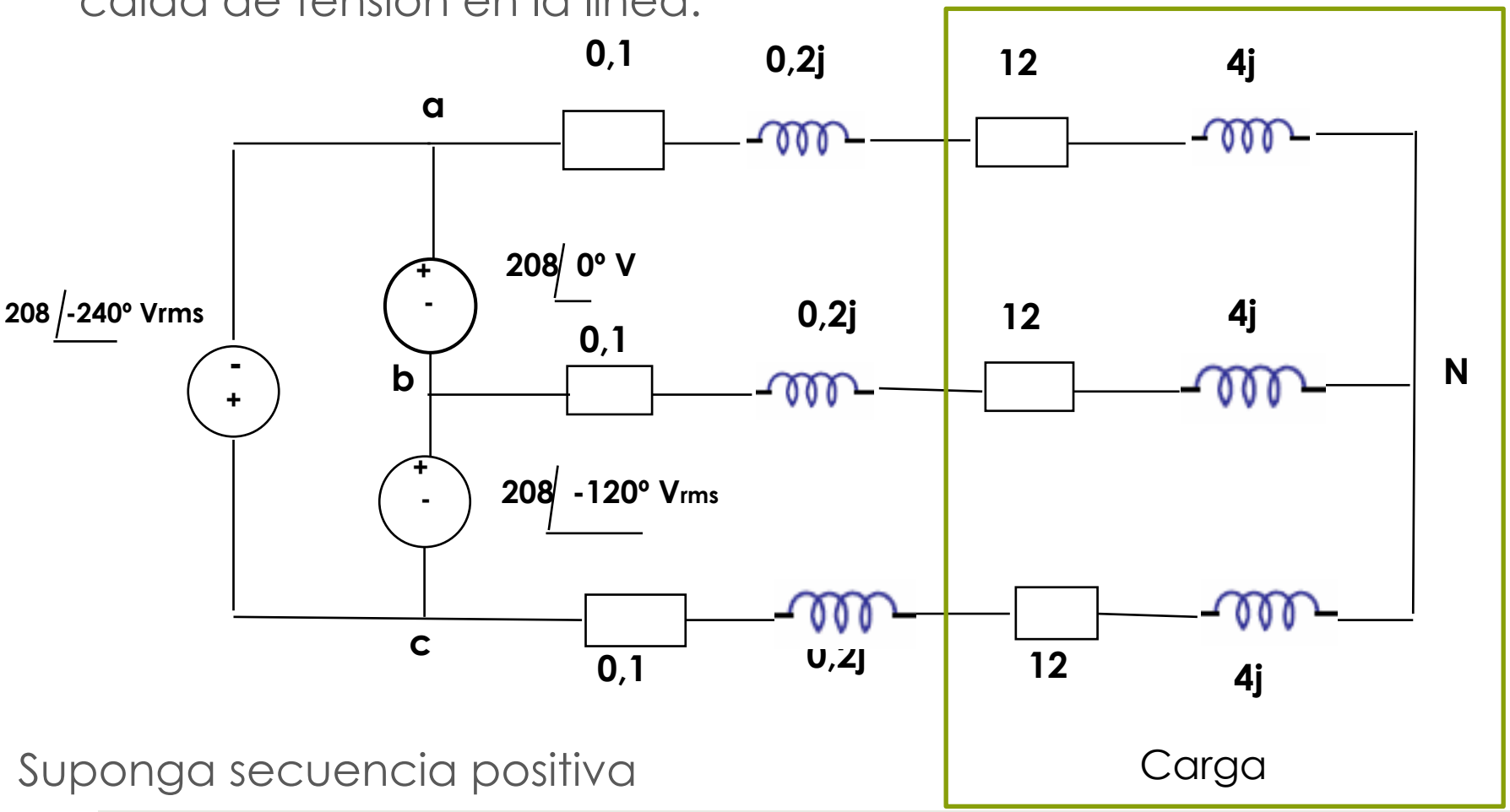
$$\dot{I}_a + \dot{I}_b + \dot{I}_c = \dot{I}_n = 0$$

$$V_{Nn} = 0$$

- En Y–Y la **corriente en la línea** que conecta la fuente con la carga es la **misma** que la **corriente de fase que fluye a través de la impedancia de carga Z_i**, con *i=a,b y c*.
- **Receta:** en un circuito balanceado se puede analizar **una fase** y con la **secuencia** de fases se determinan las demás.
- **Ojo:** Que pasa si el conductor neutro tiene impedancia Z_0?

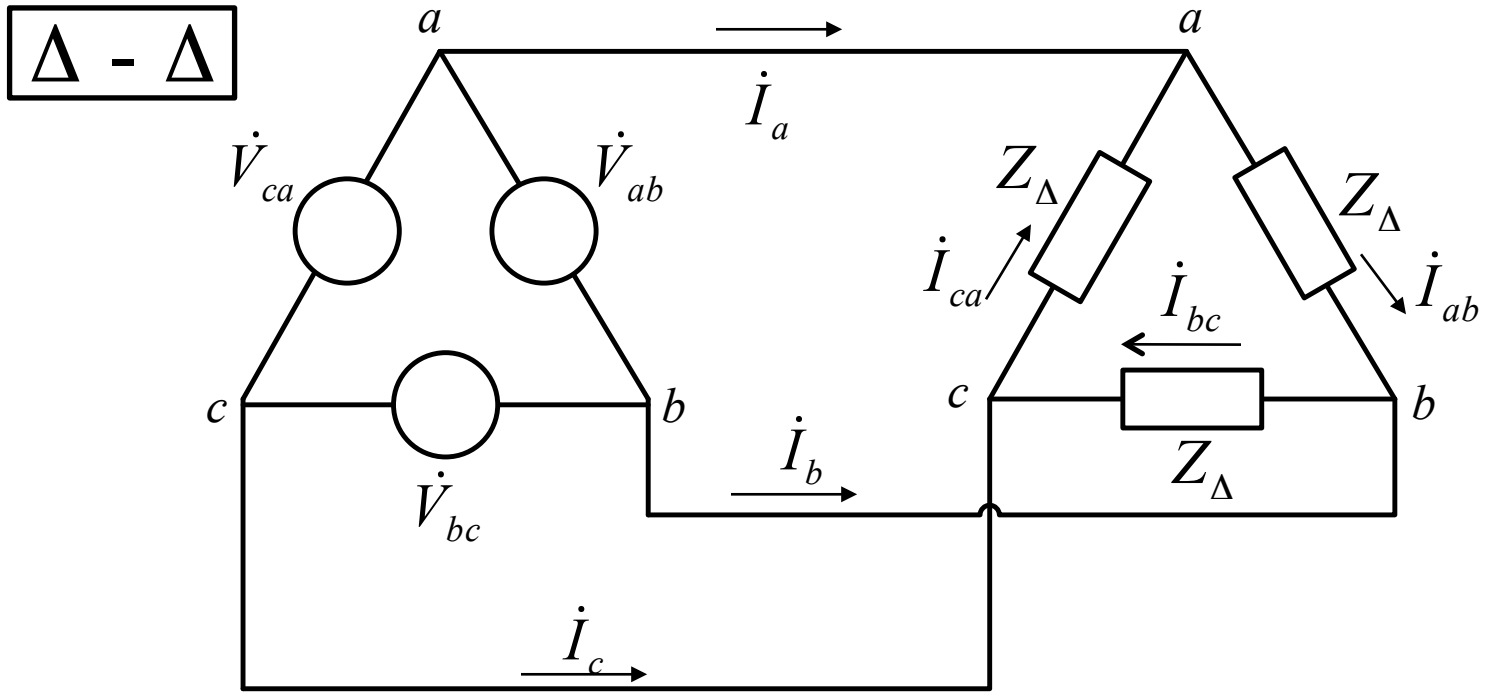
10.2 Conexiones trifásicas. Fuente-carga

- Calcular corrientes de línea, voltajes de línea en la carga, caída de tensión en la línea.



Suponga secuencia positiva

10.2 Conexiones trifásicas. Fuente-carga



- **Fuentes en delta:**

$$\dot{V}_{ab} = V_{ff}\angle 0^o$$
$$\dot{V}_{bc} = V_{ff}\angle -120^o$$
$$\dot{V}_{ca} = V_{ff}\angle 120^o$$

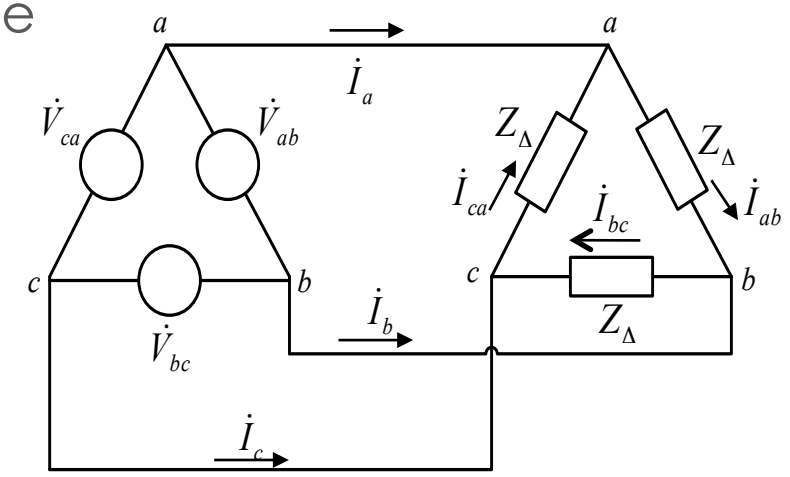
De lo deducido anteriormente → Δ→Y

$$\dot{V}_{an} = V_{fn}\angle -30^o$$
$$\dot{V}_{bn} = V_{fn}\angle -150^o$$
$$\dot{V}_{cn} = V_{fn}\angle 90^o$$

$$V_{fn} = \frac{V_{ff}}{\sqrt{3}}$$

10.2 Conexiones trifásicas. Fuente-carga

¡Una fuente trifásica en delta se puede transformar en una fuente equivalente en estrella!



- **Cargas en delta:**

Corriente de línea

$$I_{Ln} = \sqrt{3} I_\Delta$$

Corriente en el Δ

- **Demostración**:

Por LKC $\dot{I}_a = \dot{I}_{ab} - \dot{I}_{ca}$

Si $\dot{I}_{ab} = I_\Delta \angle \varphi°$ entonces $\dot{I}_{ca} = I_\Delta \angle \varphi° + 120°$

$$\Rightarrow \dot{I}_a = I_\Delta \angle \varphi° - I_\Delta \angle \varphi° + 120°$$

10.2 Conexiones trifásicas. Fuente-carga

Desarrollamos:

$$\dot{I}_a = I_\Delta\left[\cos(\varphi) + j\sin(\varphi) - \cos(\varphi+120°) - j\sin(\varphi+120°)\right]$$

$$\dot{I}_a = 2I_\Delta\left[\sin(\varphi+60°)\sin(60°) - j\cos(\varphi+60°)\sin(60°)\right]$$

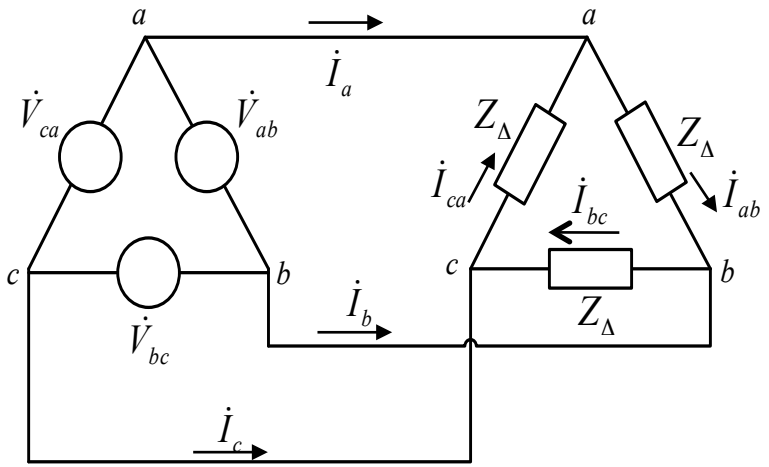
$$\dot{I}_a = \sqrt{3}I_\Delta\left[\sin(\varphi+60°) - j\cos(\varphi+60°)\right]$$

$$\dot{I}_a = \sqrt{3}I_\Delta\left[\cos(\varphi-30°) - j\sin(\varphi-30°)\right]$$

Por lo tanto:

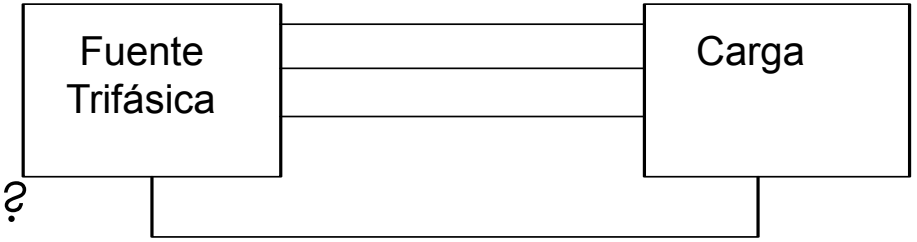
$$\dot{I}_a = \sqrt{3}I_\Delta\angle\varphi - 30° = I_{Ln}\angle\varphi - 30°$$

$$\boxed{I_{Ln} = \sqrt{3}I_\Delta}$$



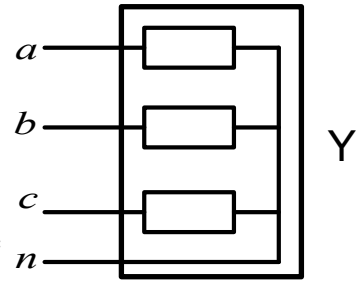
10.2 Conexiones trifásicas. Potencia compleja

$$\dot{S} = \sqrt{3} V_{ff} I_{Linea} \angle \varphi$$



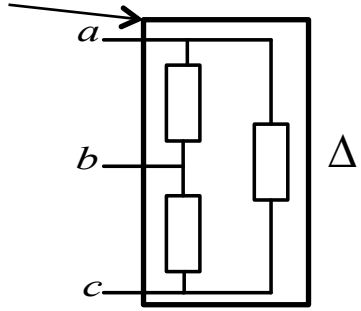
$S_{consumida}$! $V_{ff} = V_{Linea}$? $I_{Línea}$ = ?

Sabemos que : $\dot{S} = \dot{S}_a + \dot{S}_b + \dot{S}_c$



Reemplazando: En estrella

$$\dot{S}_Y = V_{fn}\angle 0^o \cdot \left(I_{Ln}\angle -\varphi^o\right)^* + V_{fn}\angle -120^o \cdot \left(I_{Ln}\angle -\varphi^o - 120^o\right)^*$$
$$+ V_{fn}\angle 120^o \cdot \left(I_{Ln}\angle -\varphi^o + 120^o\right)^*$$



Dado que la carga es balanceada:

$$\dot{S}_Y = 3 V_{fn} I_{Ln} \angle \varphi$$
$$\dot{S}_\Delta = 3 V_{ff} I_\Delta \angle \varphi$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{\dot{S} = \sqrt{3} V_{ff} I_{fn} \angle \varphi}$$

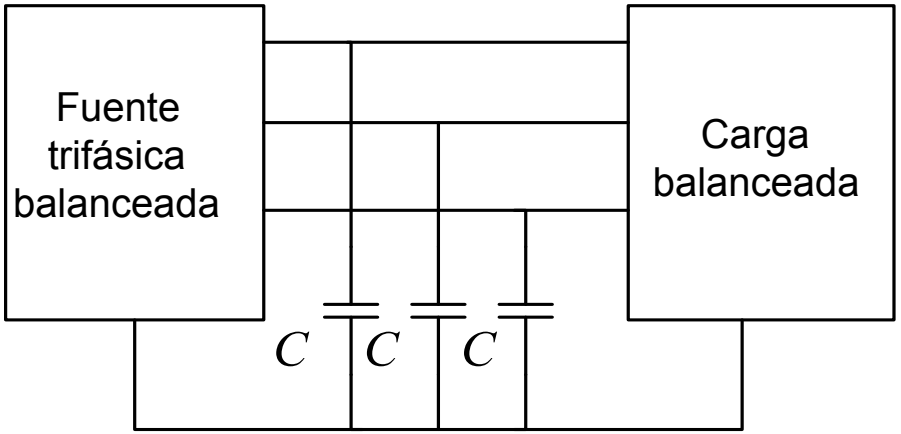
10.2 Conexiones trifásicas. Corrección factor de potencia

- Por cada fase se corrige individualmente, igual que en el caso monofásico.

Luego

$$\dot{S}_C = jQ_C = -j\omega C V_C^2$$

es provista **por 3 condensadores** (uno por cada fase), siendo V_C la diferencia de voltaje en los terminales de cada condensador.



10.2 Conexiones trifásicas. Definiciones

Algunas definiciones:

- **Corrientes**
  - Corrientes trifásicas NO!, Corrientes en sistemas trifásicos si!
  - A) Corriente de Línea
  - B) Corriente de Carga
- **Voltajes**:
  - Voltaje de Línea (DATO)= Voltaje de Fase (OJO!) = Voltaje Fase – Fase = Voltaje entre fases = V_{ab}
  - Voltaje Fase - Neutro = V_{an} (Se utiliza para los cálculos)
- **Factor de potencia en atraso** = corriente atrasada respecto de voltaje (misma fase)
- **Secuencia**: positiva o negativa