

Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Eléctrica

Circuitos de Primer Orden

Profesor Álvaro Lorca

IEE2123 – Circuitos Eléctricos
Segundo Semestre 2018

Agradecimientos material: Ángel Abusleme, Enrique Álvarez, Daniel Olivares

Introducción

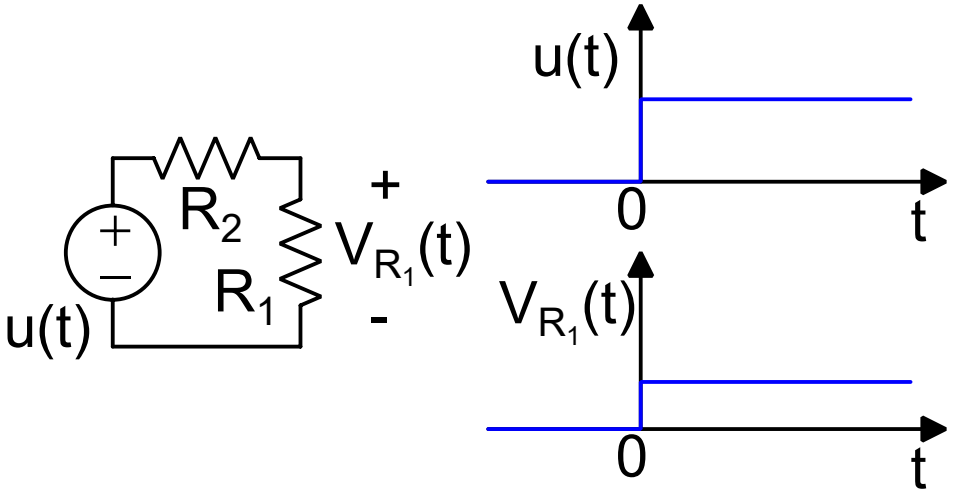
- La clase pasada introdujimos el capacitor y el inductor a nuestro conjunto de elementos circuitales.

- Estudiamos sus relaciones voltaje-corriente y también aprendimos que estos componentes pueden ser vistos como elementos que de alguna manera se oponen al flujo de corriente (*impedancias*).

- Ahora estudiaremos el comportamiento de circuitos con capacitores e inductores en el dominio del tiempo, partiendo por sistemas caracterizados por ecuaciones diferenciales de primer orden, con especial énfasis en la respuesta a excitaciones en escalón, y la respuesta a excitaciones sinusoidales.

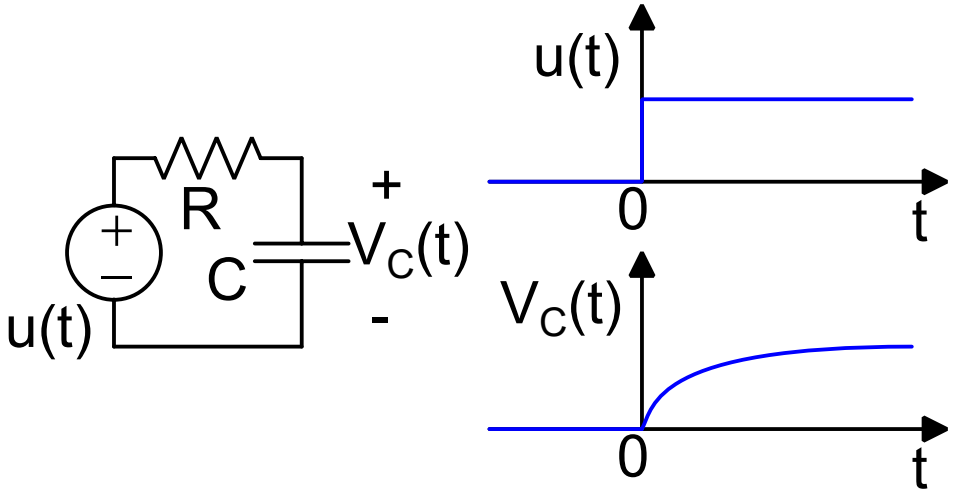
Circuitos de orden mayor a cero

- Las variables de un circuito con elementos que almacenan energía (C y L) se encuentran relacionadas por medio de ecuaciones diferenciales lineales. Estas variables presentan un comportamiento dinámico en el tiempo.



Circuito de orden 0

$$V_{R_1}(t) = \frac{R_1}{R_1+R_2}u(t)$$



Circuito de orden 1

$$\frac{\mathrm{d}V_C(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{RC}V_C(t) = \frac{1}{RC}u(t)$$

Circuitos de orden mayor a cero

- Cada voltaje o corriente de un circuito de orden mayor a cero corresponde a la solución de una ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes como la siguiente:

$$a_n \frac{\mathrm{d}^n x(t)}{\mathrm{d}t^n} + a_{n-1} \frac{\mathrm{d}^{n-1} x(t)}{\mathrm{d}t^{n-1}} + \ldots + a_0 x(t) = f(t)$$

Dependen de los componentes del circuito

Depende de los componentes del circuito y de las excitaciones

  - Generalmente, el *orden* de un circuito está dado por el número de elementos que almacenan energía.

Circuitos de orden mayor a cero

- La solución de una ecuación diferencial lineal es de la forma:

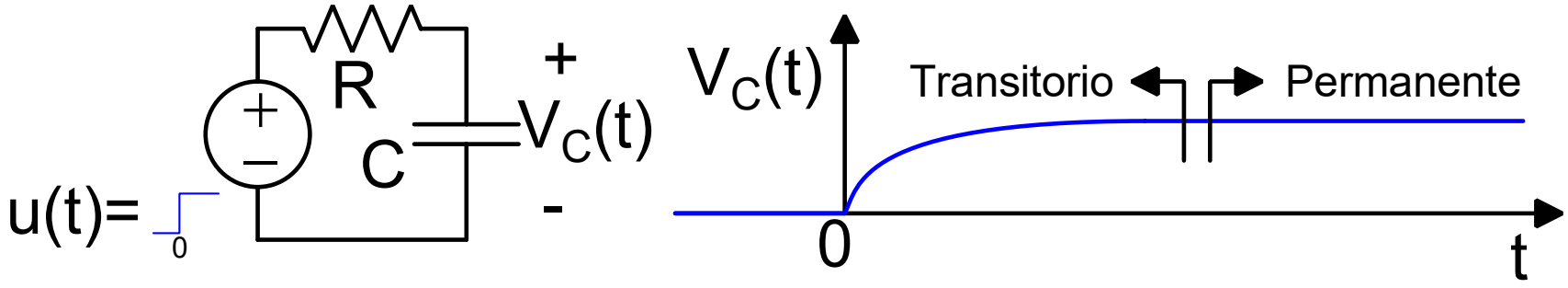
$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

  - $x_h(t)$ es la solución *homogénea* o *natural* del sistema y depende de la topología del circuito (*no* de las excitaciones), mientras que $x_p(t)$ es la solución *particular* o *forzada* del sistema y depende de las excitaciones del circuito.

- Para encontrar x(t) es necesario conocer las condiciones iniciales del sistema (u otras condiciones de borde)
  - Por ejemplo, en un sistema de primer orden es necesario conocer x(0), mientras que en uno de segundo orden es necesario conocer x(0) y x'(0).
  - En nuestro caso, típicamente estas condiciones vienen dadas por voltajes de capacitores o corrientes de inductores.

Circuitos de orden mayor a cero

- Se pueden distinguir dos regímenes en la respuesta de un circuito de orden mayor a cero: el *régimen transitorio* y el *régimen permanente*.
  - El régimen transitorio es la respuesta del circuito en un período de tiempo inicial, mientras que el régimen permanente es la respuesta del circuito cuando ha transcurrido un intervalo de tiempo muy grande. Esta respuesta permanece en el tiempo.



Circuitos de primer orden

- Estos circuitos, así como los de segundo orden, son *muy*, ***muy***, ***MUY*** importantes.

- Las corrientes y los voltajes de un circuito de primer orden satisfacen una ecuación de la forma:

$$a_1 \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + a_0 x(t) = f(t) \rightarrow \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau} x(t) = g(t)$$

- La solución a esta ecuación es de la forma:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

Circuitos de primer orden

- Para encontrar la solución natural $x_h(t)$, se iguala la ecuación diferencial a 0 y luego se resuelve:

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}x(t) = 0 \rightarrow x_h(t) = ke^{-\frac{t}{\tau}}$$

- La solución forzada $x_p(t)$ corresponde a la suma ponderada de g(t) y su primera derivada:

$$x_p(t) = \alpha g(t) + \beta \frac{\mathrm{d}g(t)}{\mathrm{d}t}$$

- La constante k se determina con las condiciones iniciales del sistema:

$$x(0) = x_h(0) + x_p(0) \rightarrow k = x(0) - x_p(0)$$

- Las constantes α y β se determinan reemplazando $x_p(t)$ en la ecuación diferencial original.

Circuitos de primer orden

- Así:

$$x(t) = \underbrace{ke^{-\frac{t}{\tau}}}_{\text{Tiende a 0 (responsable del régimen transitorio)}} + \underbrace{\alpha g(t) + \beta \frac{\mathrm{d}g(t)}{\mathrm{d}t}}_{\text{Lo que queda en régimen permanente}}$$

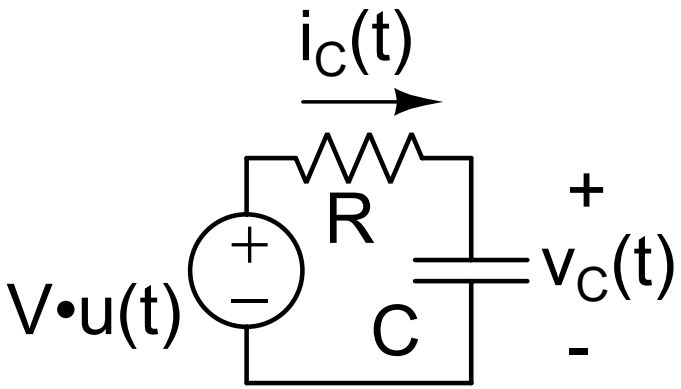
- Un parámetro muy importante en este contexto es la constante de tiempo τ (tau):

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}x(t) = g(t) \qquad x_h(t) = ke^{-\frac{t}{\tau}}$$

  - Como veremos, este parámetro tiene relación con cuánto tiempo se demora un capacitor o un inductor en cargarse: a mayor valor de τ, más lento es el circuito.

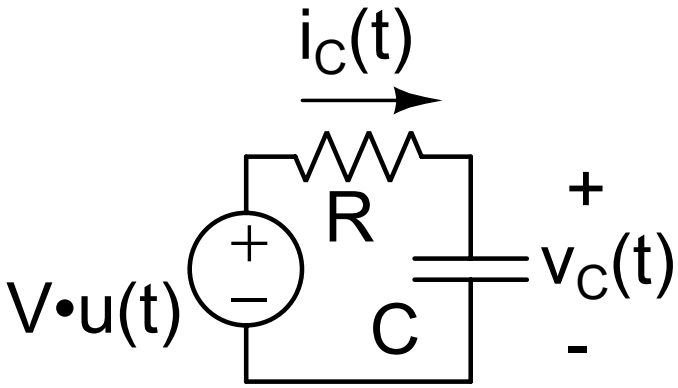
Circuito RC

- A continuación estudiaremos desde múltiples puntos de vista el proceso de carga y descarga de un capacitor.
  - Esta exposición quizás va a parecer desordenada, pero si se fijan bien sólo estaremos *sobre-analizando* la solución de una ecuación diferencial de primer orden.
  - El propósito es entender de forma intuitiva y circuital qué es lo que ocurre, más allá de entender de dónde proviene la matemática que sirve para modelar el problema.



Circuito RC

- Estudiemos la respuesta de un circuito RC serie excitado con un escalón de voltaje V•u(t):



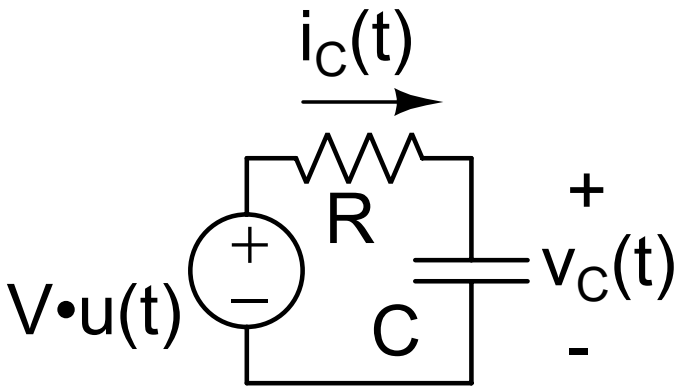
$$V = Ri_C(t) + v_C(t)$$

$$i_C(t) = C\frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t}$$

$$\rightarrow \frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{RC}v_C(t) = \frac{1}{RC}V$$

Circuito RC

- Calculamos la respuesta natural:



$$\frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{RC}v_C(t) = 0$$

$$\int \frac{\mathrm{d}v_C(t)}{v_C(t)} = -\frac{1}{RC}\int \mathrm{d}t$$

$$\ln\left(v_C(t)\right) = -\frac{t}{RC} + c \rightarrow v_{C,h}(t) = ke^{-\frac{t}{RC}}$$

e^c

- Ahora calculamos la respuesta forzada:

$$v_{C,p}(t) = \alpha V + \beta\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \gamma \leftarrow$$ Constante igual a αV

Circuito RC

- Determinamos γ:

$$v_{C,p}(t) = \gamma$$

$$\frac{\mathrm{d}v_{C,p}(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{RC} v_{C,p}(t) = \frac{1}{RC} V \quad \rightarrow \gamma = V$$

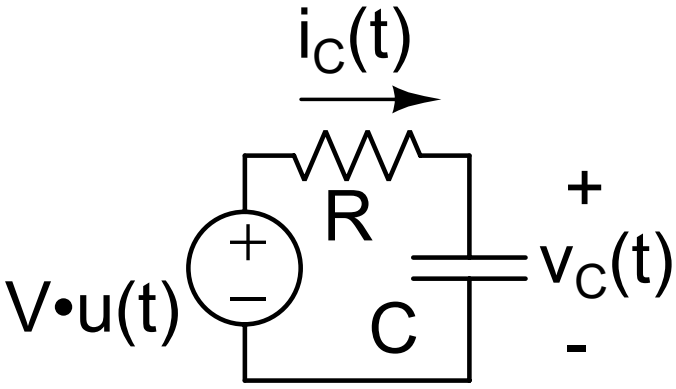
- Determinamos k:

$$v_C(t) = v_{C,h}(t) + v_{C,p}(t) = k e^{-\frac{t}{RC}} + V$$

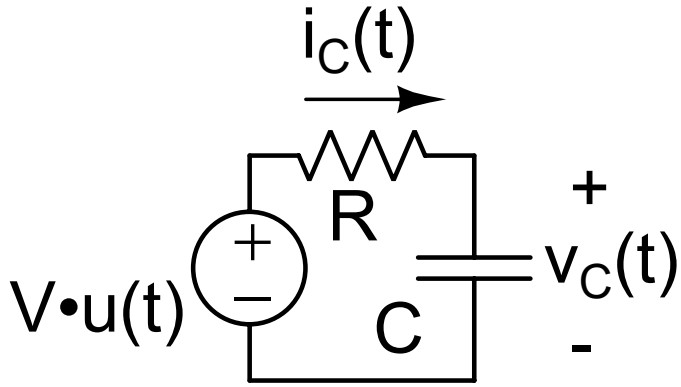
$$v_C(0) = k + V \rightarrow k = v_C(0) - V$$

- Por lo tanto:

$$v_C(t) = (v_C(0) - V)\, e^{-\frac{t}{RC}} + V$$

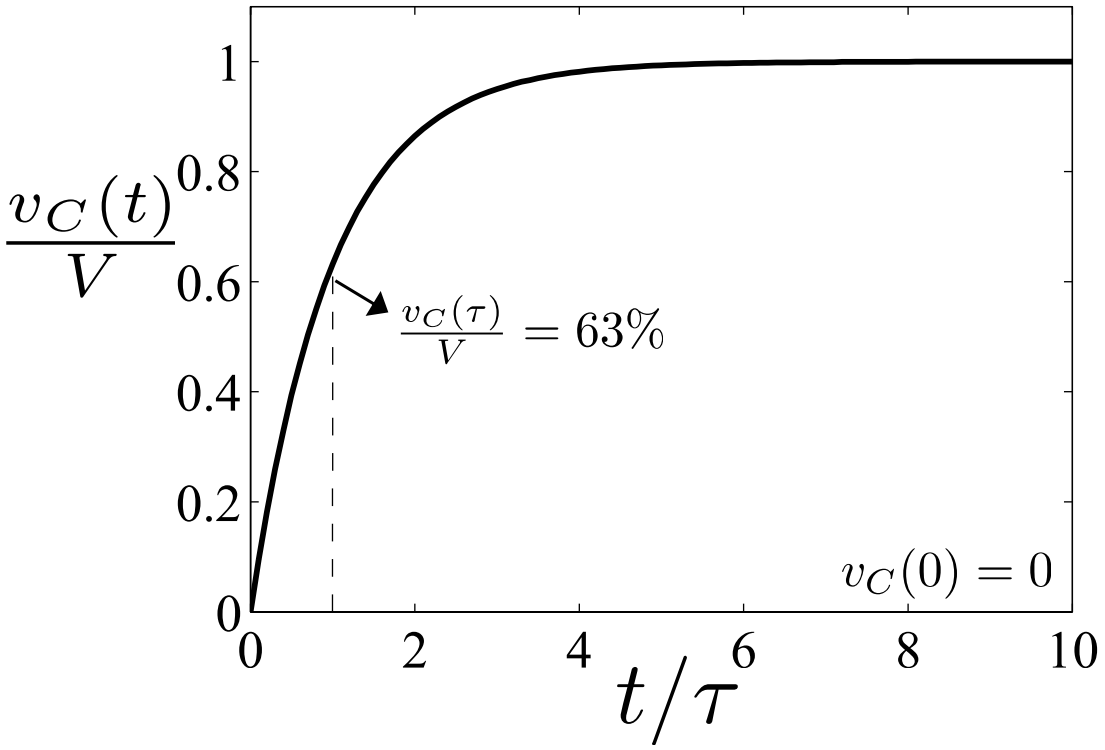


Circuito RC



- En resumen:

$$v_C(t) = (v_C(0) - V)\, e^{-\frac{t}{RC}} + V$$



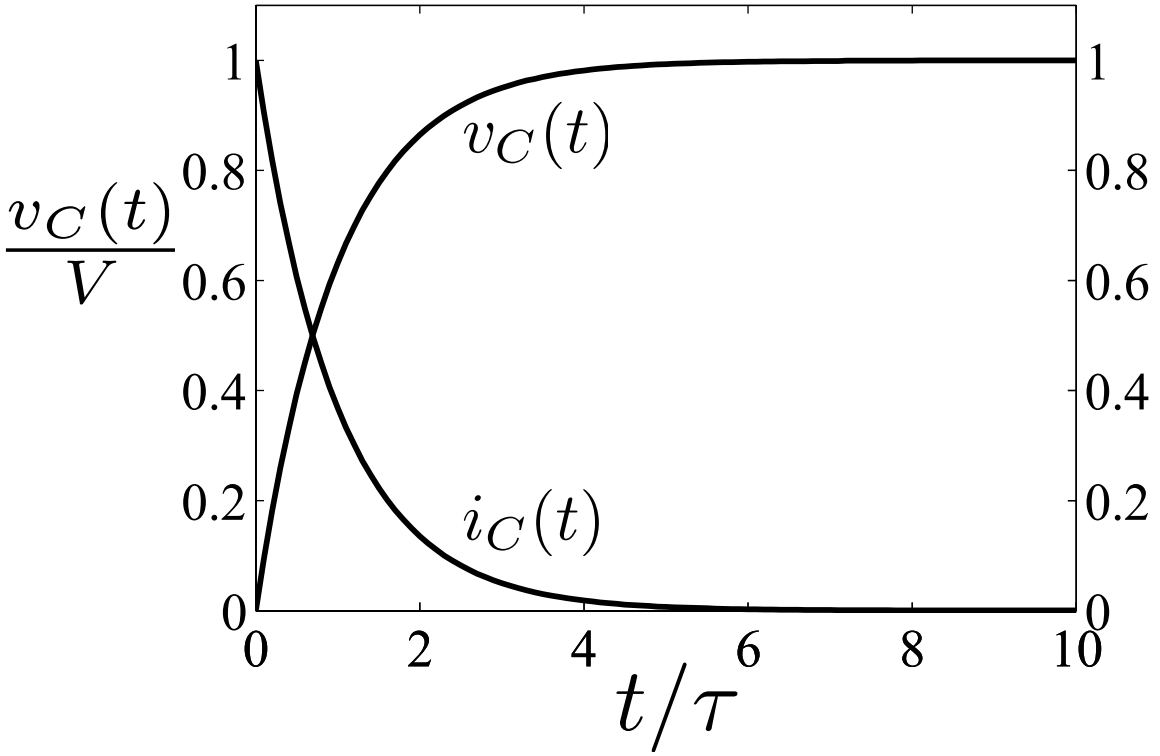
t/τ	$v_C(t)/V$
1	63.2%
2	86.5%
3	95%
4	98.2%
5	99.3%
6	99.8%

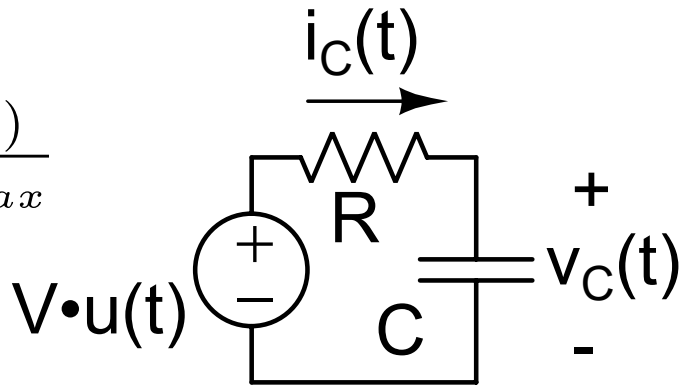
$$\tau = RC$$

Circuito RC

- Veamos qué ocurre con la corriente:

$$i_C(t) = C\frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{V - v_C(0)}{R}\right) e^{-\frac{t}{RC}}$$

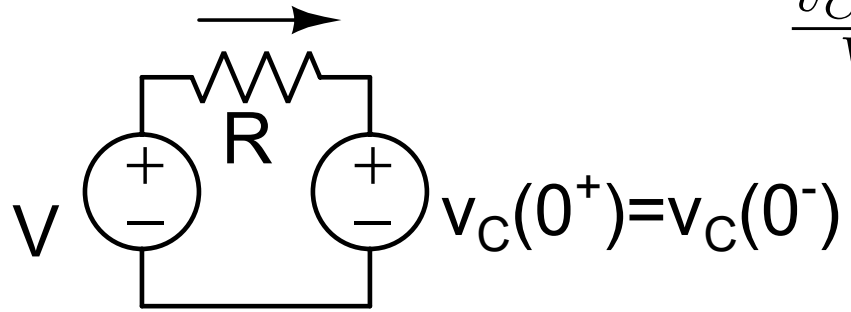


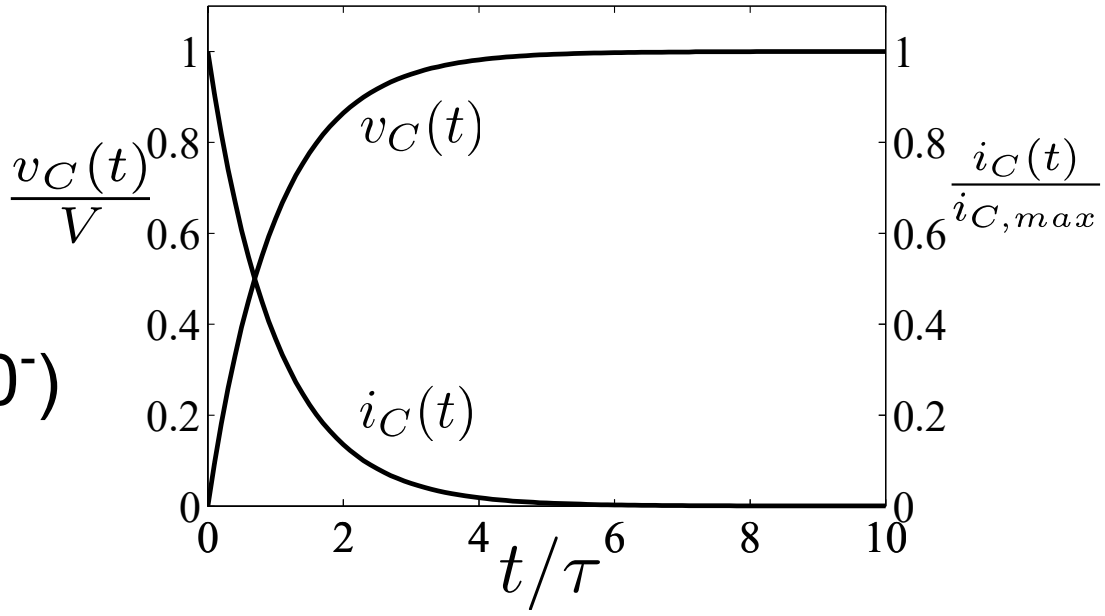


Circuito RC

- Algunas observaciones:
  - En un comienzo ($t=0^+$), el voltaje de entrada del circuito cambia bruscamente. Un capacitor se opone a los cambios bruscos de voltaje, por lo que su voltaje en $t = 0^-$ y en $t=0^+$ es exactamente igual. Luego, en $t=0^+$ el circuito se ve así:

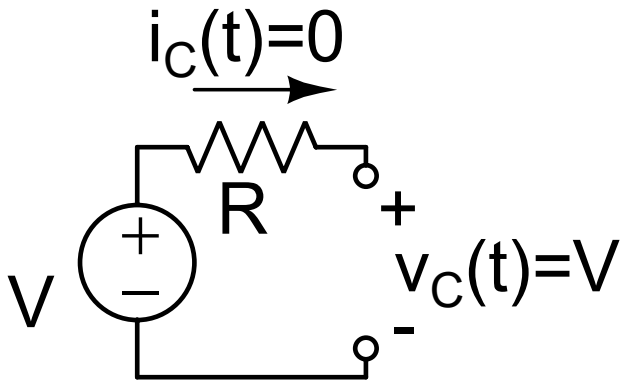
$i_C(0^+)=(V-v_C(0^+))/R$

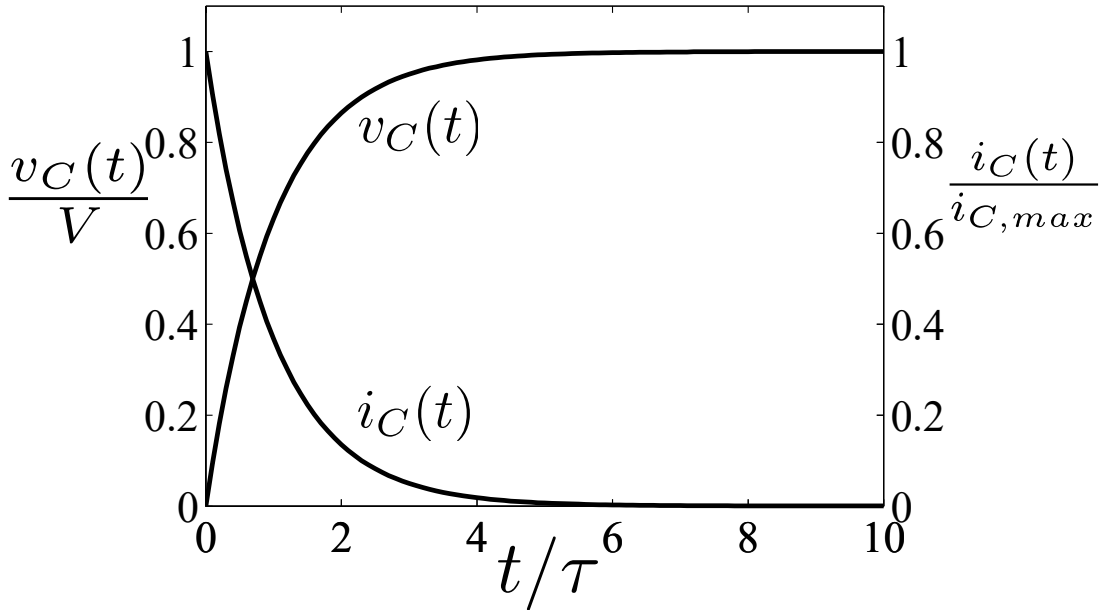




Circuito RC

- A medida que se carga el capacitor, disminuye la diferencia de potencial en R, y por ende la corriente i_C. Finalmente, en "t = varios τ", la señal de entrada se ve prácticamente como una señal DC (no varía en el tiempo), por lo que el capacitor se ve como circuito abierto y la corriente es nula:





Circuito RC

- Estudiemos ahora qué ocurre con la potencia entregada al capacitor:
  - Asumiendo $v_C(0) = 0$, la energía entregada por la fuente de voltaje está dada por:

$$E_V = \int_0^\infty V i_C(t) \mathrm{d}t = CV^2$$

  - Y la energía absorbida por el capacitor:

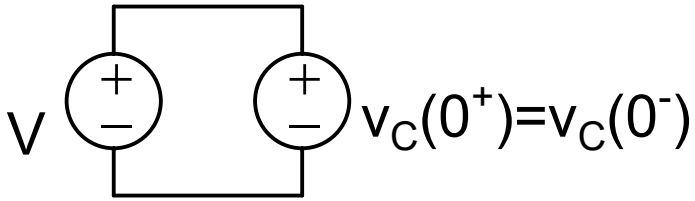
$$E_C = \int_0^\infty v_C(t) i_C(t) \mathrm{d}t = \frac{CV^2}{2}$$

  - ¿Qué ocurre con la otra mitad de la energía entregada por la fuente? → Es disipada por el resistor!

Circuito RC

- Le energía disipada por el resistor es igual a $CV^2/2$ incluso si su resistencia es nula (cortocircuito)!
  - Si R=0, en $t=0^+$ tendríamos la siguiente situación:

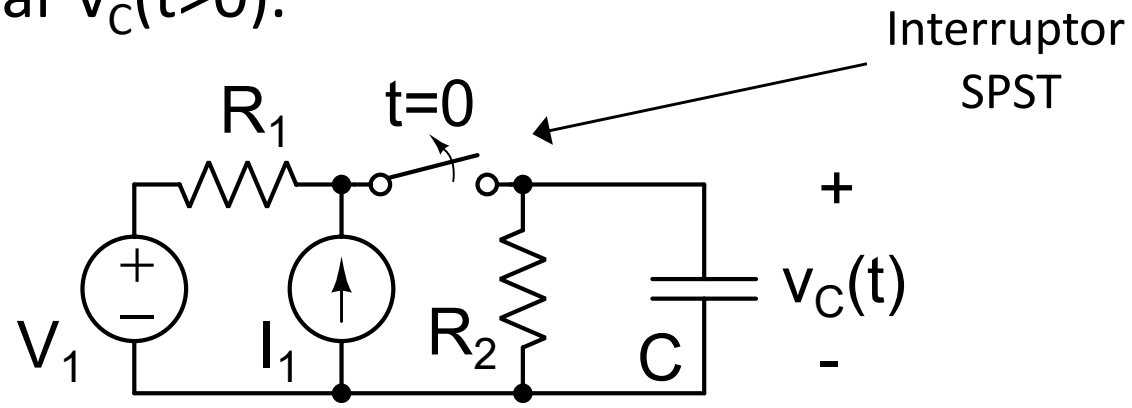
$$i_C(0^+)=(V-v_C(0^+))/0 = \infty$$



  - Teóricamente habría una corriente infinita y una resistencia nula, por lo que la energía disipada por el resistor nulo es distinta de cero.

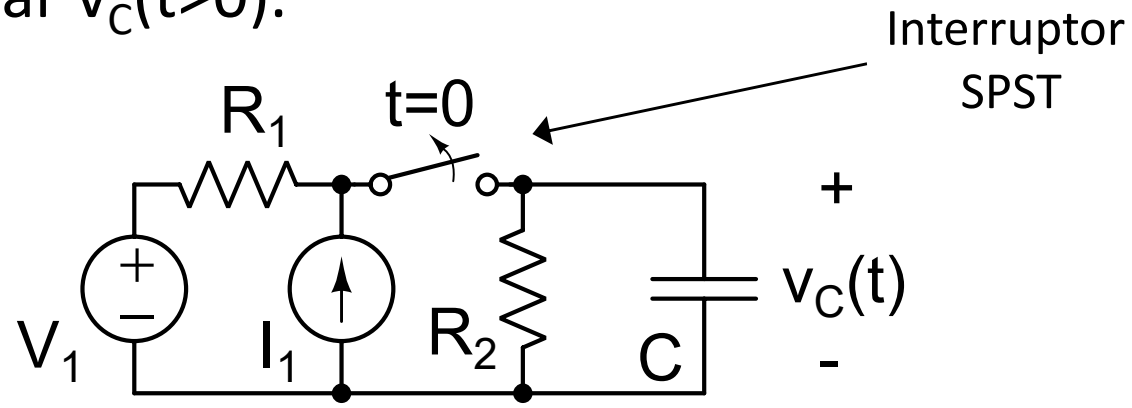
Circuito RC

- **Ejemplo**: Calcular $v_C(t>0)$.

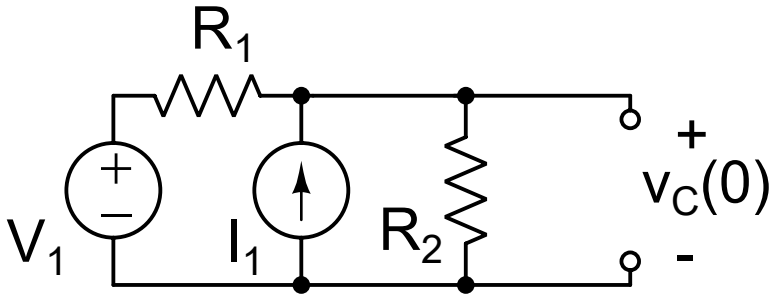


Circuito RC

- **Ejemplo**: Calcular $v_C(t>0)$.



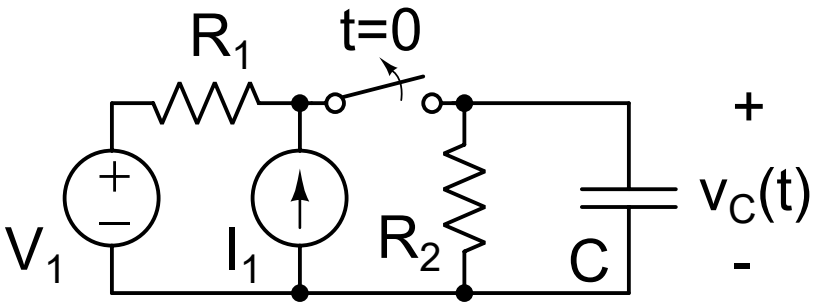
- Calculamos el voltaje en el capacitor justo antes de que se abra el interruptor, asumiendo que el circuito estaba en este estado hace mucho tiempo:

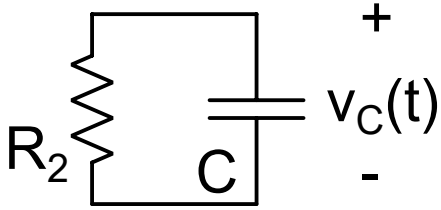


$$v_C(0) = \frac{R_2}{R_1+R_2} V_1 + (R_1||R_2)\, I_1$$

Circuito RC

- Luego, una vez que el interruptor se abre, queda el siguiente circuito:





$$R_2 i_C(t) = -v_C(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{R_2 C} v_C(t) = 0$$

- La respuesta del circuito es completamente natural, ya que no hay excitaciones. Aquí el capacitor comienza a descargarse completamente a través del resistor.

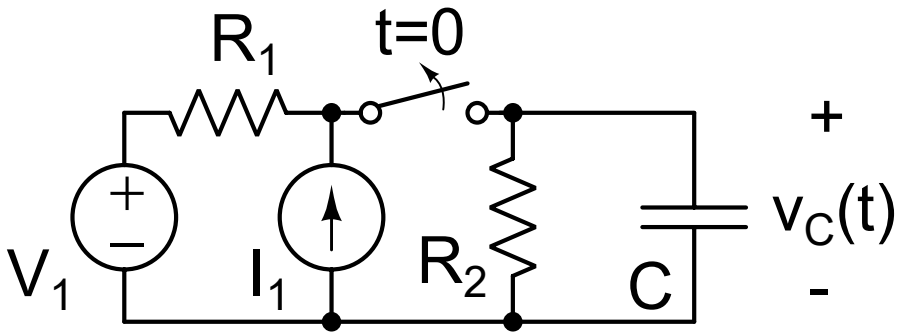
$$v_C(t) = \left(v_C(0) - V_{final}\right) e^{-\frac{t}{R_2 C}} + V_{final}$$

$$= \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_1 + (R_1 || R_2)\, I_1 \qquad = 0$$

Circuito RC

- Por lo tanto:

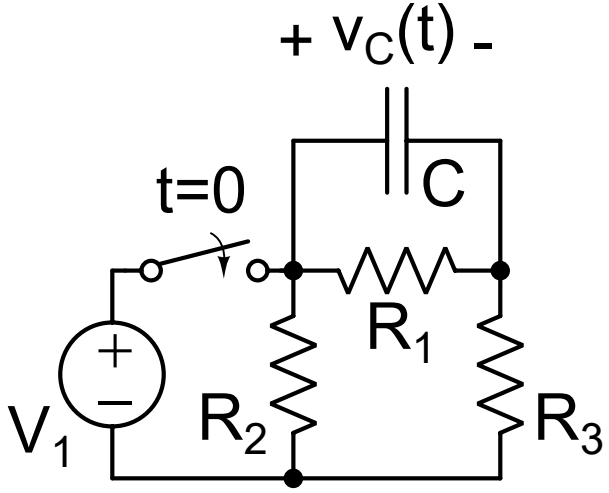
$$v_C(t) = \left(\frac{R_2}{R_1+R_2} V_1 + (R_1 || R_2)\, I_1 \right) e^{-\frac{t}{R_2 C}}$$



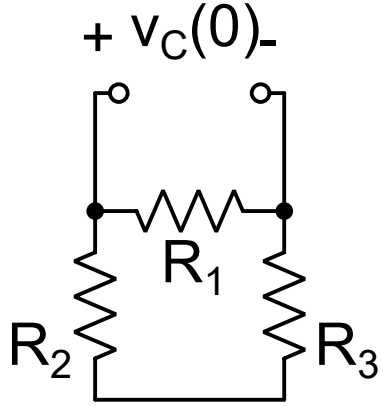
Fin ej.

Circuito RC

- **Ejemplo**: Calcular $v_C(t>0)$.



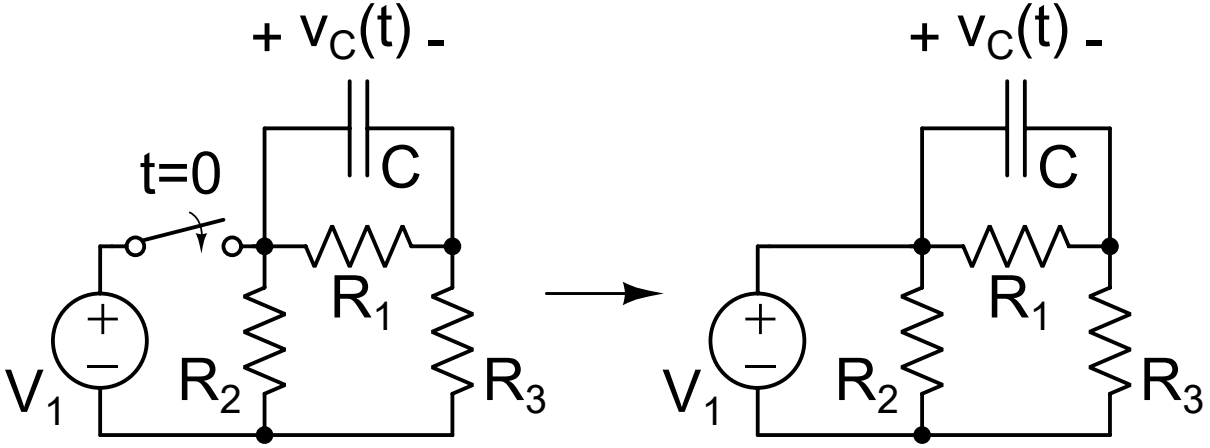
- En $t=0^-$ tenemos:



$$v_C(0) = 0$$

Circuito RC

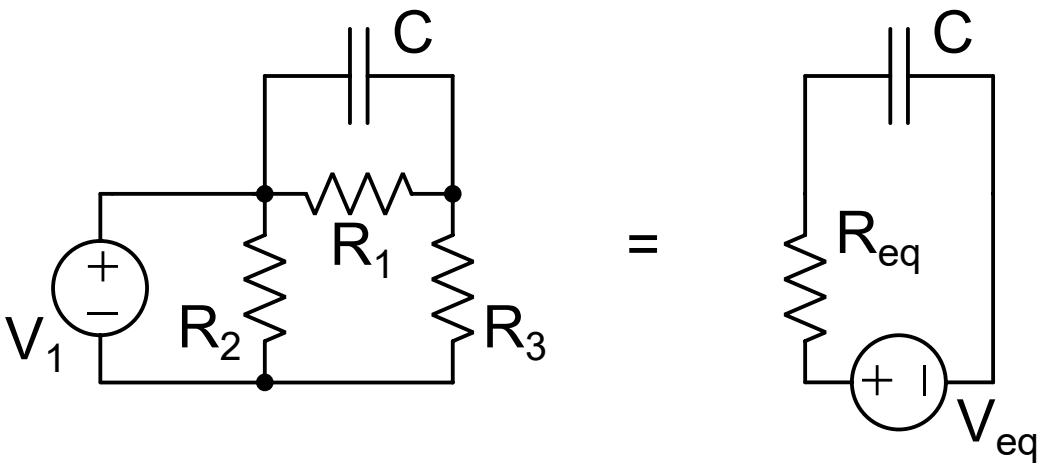
- Una vez que el interruptor se cierra queda:



- Para resolver esto hay dos opciones:
  - Alternativa pésima: hacer mallas o nodos para sacar todas las ecuaciones del circuito y luego formular la ecuación diferencial que buscamos.
  - *Alternativa inteligente*: sacar el equivalente de H-T o M-N visto desde los bornes del capacitor para llegar a un simple circuito RC.

Circuito RC

- Calculamos el equivalente de H-T del circuito:



$$V_{eq} = \frac{R_1}{R_1+R_3} V_1$$

$$R_{eq} = R_1 || R_3$$

  - Observación: esto se puede hacer *siempre* en circuitos de primer orden. No importa qué tan complicado sea el circuito (en cuanto a número de fuentes independientes, dependientes y resistores). Si es de primer orden, se reduce al simple circuito RC ya estudiado.

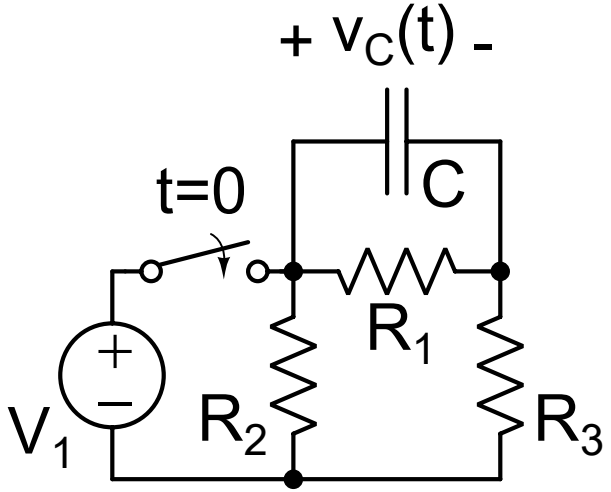
Circuito RC

- Por lo tanto:

$$v_C(t) = (v_C(0) - V_{eq})\, e^{-\frac{t}{R_{eq}C}} + V_{eq}$$

$$v_C(t) = V_{eq}\left(1 - e^{-\frac{t}{R_{eq}C}}\right)$$

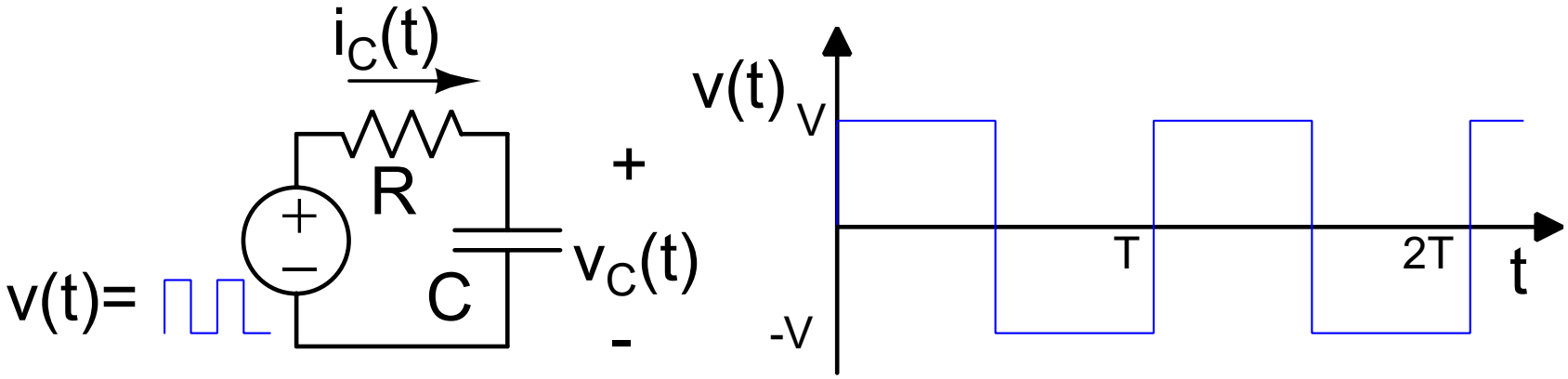
$$v_C(t) = \frac{R_1}{R_1+R_3} V_1 \left(1 - e^{-\frac{t}{(R_1||R_3)C}}\right)$$



Fin ej.

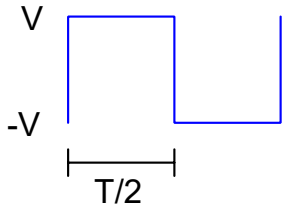
Circuito RC

- **Ejemplo**: Asumiendo $v_C(0) = 0$, determinar gráficamente la función $v_C(t)$ para los siguientes valores de $\tau = RC$:
  - $\tau = (T/2)/18$
  - $\tau = (T/2)/6$
  - $\tau = T/2$

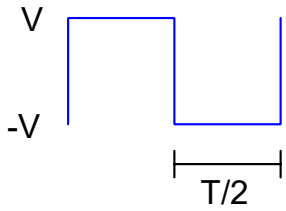


Circuito RC

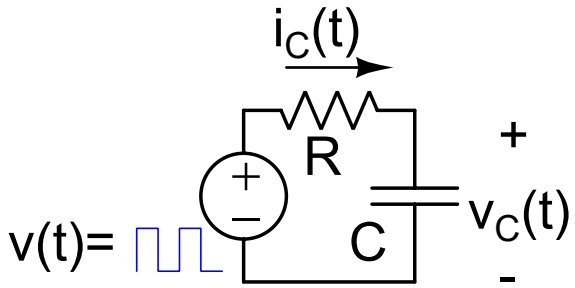
- La resolución de este problema es igual para los tres casos propuestos. En cada tramo de duración T/2, $v_C(t)$ estará dado por:



$$v_C(t) = (v_C(0) - V)\, e^{-\frac{t}{RC}} + V$$

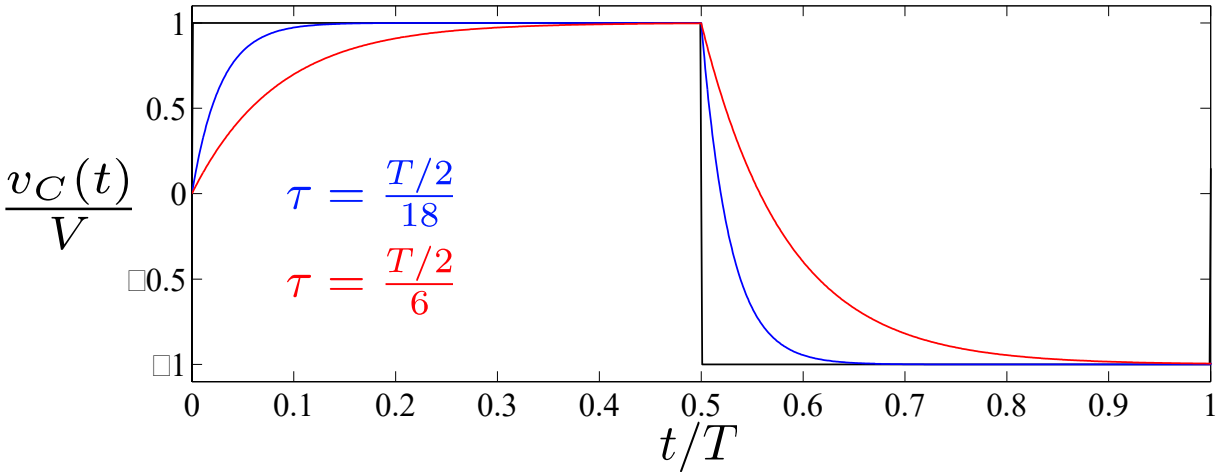


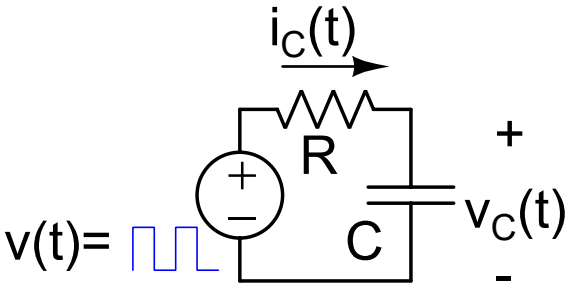
$$v_C(t) = (v_C(0) - (-V))\, e^{-\frac{t}{RC}} + (-V)$$



Circuito RC

- Es necesario determinar el voltaje final de cada tramo ($v_C(T/2)$, $v_C(T)$, $v_C(3T/2)$, etc.), el que corresponde a la condición inicial del tramo siguiente.
  - Para los dos primeros casos estos es trivial. Sabemos que que en 6τ el voltaje alcanza un 99.8% de su valor final (18τ → 99.99999%), por lo que los valores finales de cada tramo corresponden prácticamente a ±V.





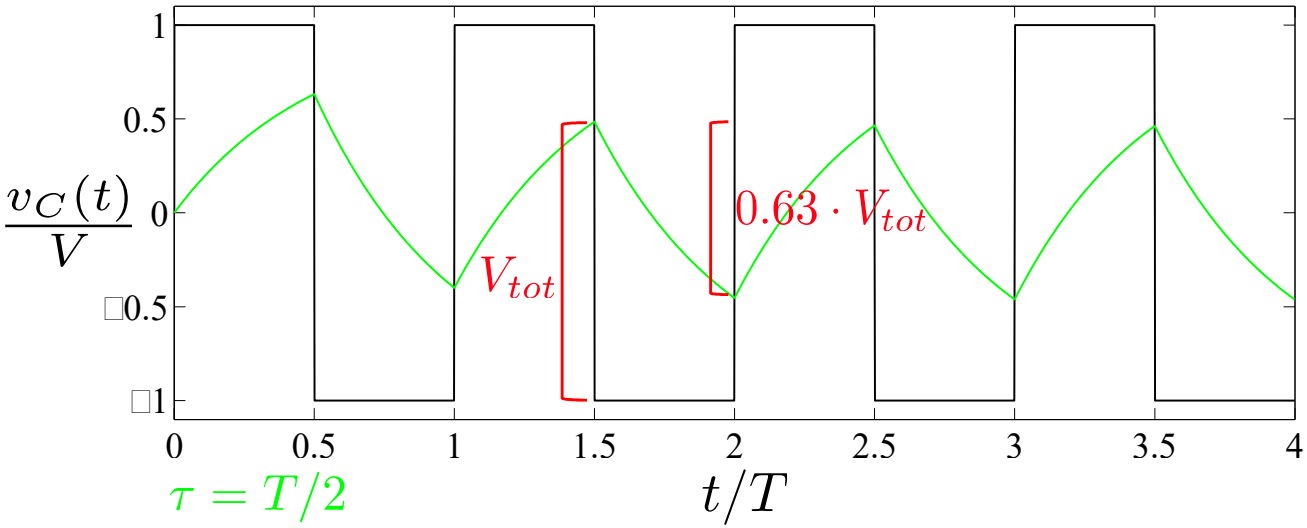
Circuito RC

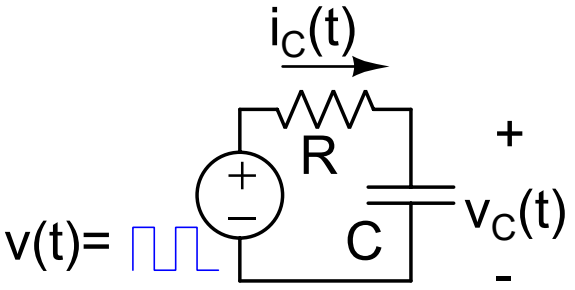
- En el tercer caso (τ = T/2), el voltaje sólo alcanza el 63% de su valor final en cada tramo, por lo tanto:

$$v_C(0) = 0 \rightarrow v_C(T/2) = (0 - V) \cdot 0.37 + V = 0.63 \cdot V$$

$$v_C(T/2) = 0.63 \cdot V \rightarrow v_C(T) = (0.63 \cdot V + V) \cdot 0.37 - V = -0.39 \cdot V$$

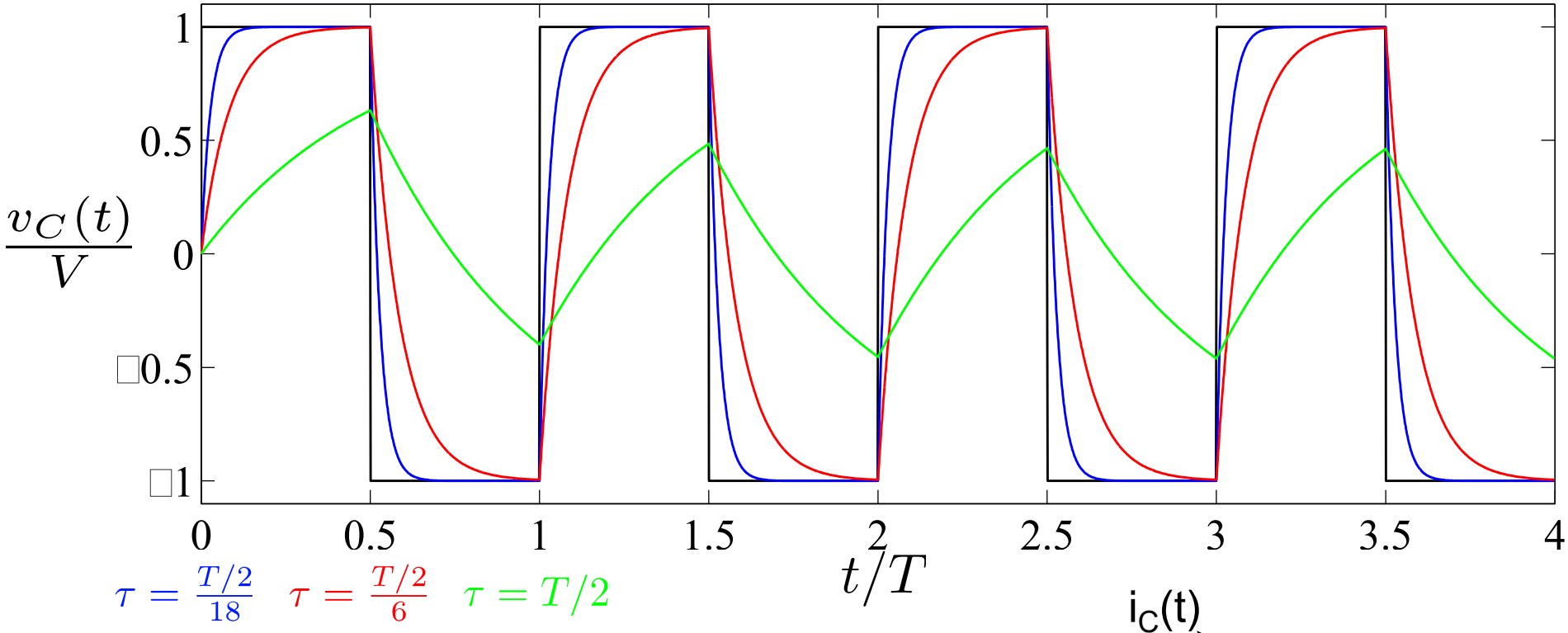
$$v_C(T) = -0.39 \cdot V \rightarrow v_C(3T/2) = (-0.39 \cdot V - V) \cdot 0.37 + V = 0.48 \cdot V...$$

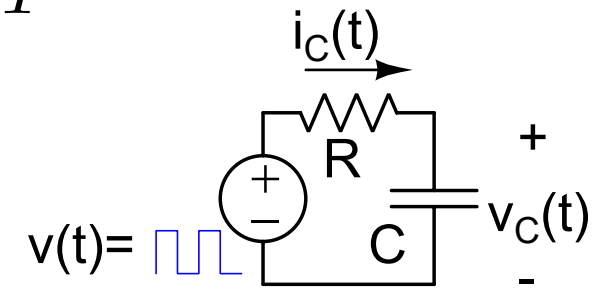




Circuito RC

- Finalmente:

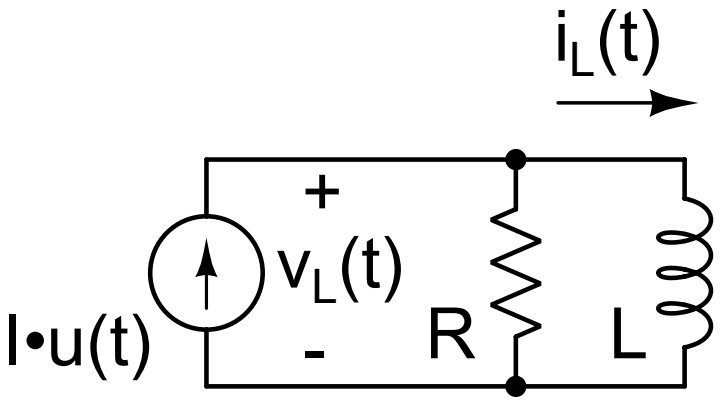




Fin ej.

Circuito RL

- A continuación estudiaremos desde múltiples puntos de vista el proceso de carga y descarga de un inductor.
  - El circuito RL paralelo es el dual del circuito RC serie, por lo que el procedimiento que seguiremos es exactamente igual al realizado para el caso del circuito RC.



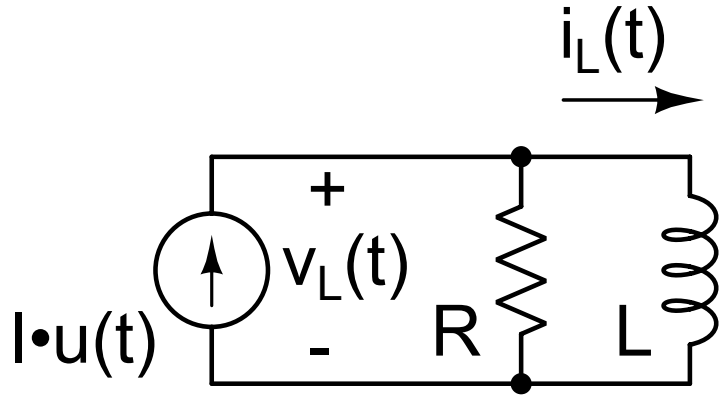
Circuito RL

- Estudiemos la respuesta de un circuito RL paralelo excitado con un escalón de corriente I•u(t):

$$I = \frac{v_L(t)}{R} + i_L(t)$$

$$v_L(t) = L\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t}$$

$$\rightarrow \frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{L/R}i_L(t) = \frac{1}{L/R}I$$

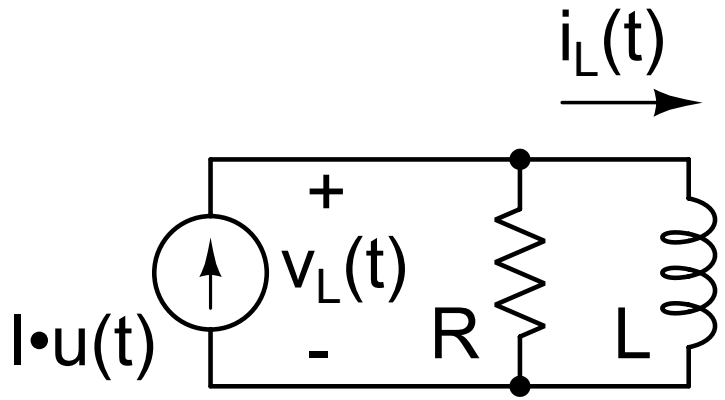


Circuito RL

- Calculamos la respuesta natural:

$$\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{L/R} i_L(t) = 0$$

$$\int \frac{\mathrm{d}i_L(t)}{i_L(t)} = -\frac{1}{L/R} \int \mathrm{d}t$$



$$\ln\left(i_L(t)\right) = -\frac{t}{L/R} + c \rightarrow i_{L,h}(t) = k e^{-\frac{t}{L/R}}$$

e^c

- La respuesta forzada:

$$i_{L,p}(t) = \alpha I + \beta \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \gamma \quad \leftarrow$$

Constante igual a αI

Circuito RL

- Determinamos γ:

$$i_{L,p}(t) = \gamma$$

$$\frac{\mathrm{d}i_{L,p}(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{L/R} i_{L,p}(t) = \frac{1}{L/R} I \rightarrow \gamma = I$$

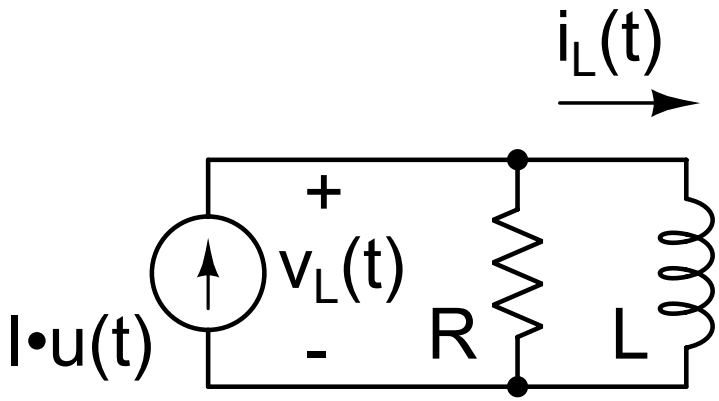
- Determinamos k:

$$i_L(t) = i_{L,h}(t) + i_{L,p}(t) = k e^{-\frac{t}{L/R}} + I$$

$$i_L(0) = k + I \rightarrow k = i_L(0) - I$$

- Por lo tanto:

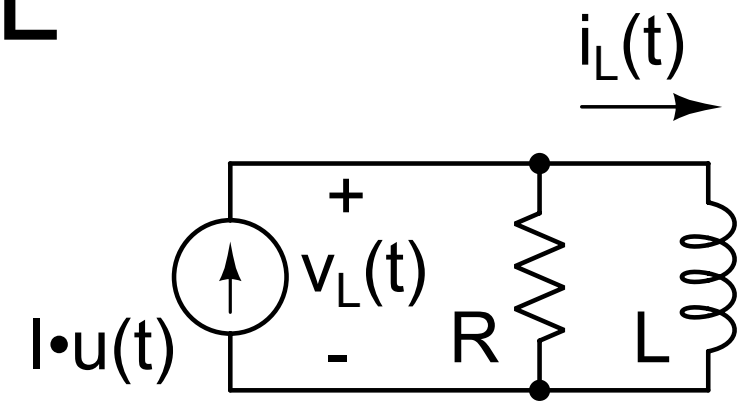
$$i_L(t) = (i_L(0) - I)\, e^{-\frac{t}{L/R}} + I$$

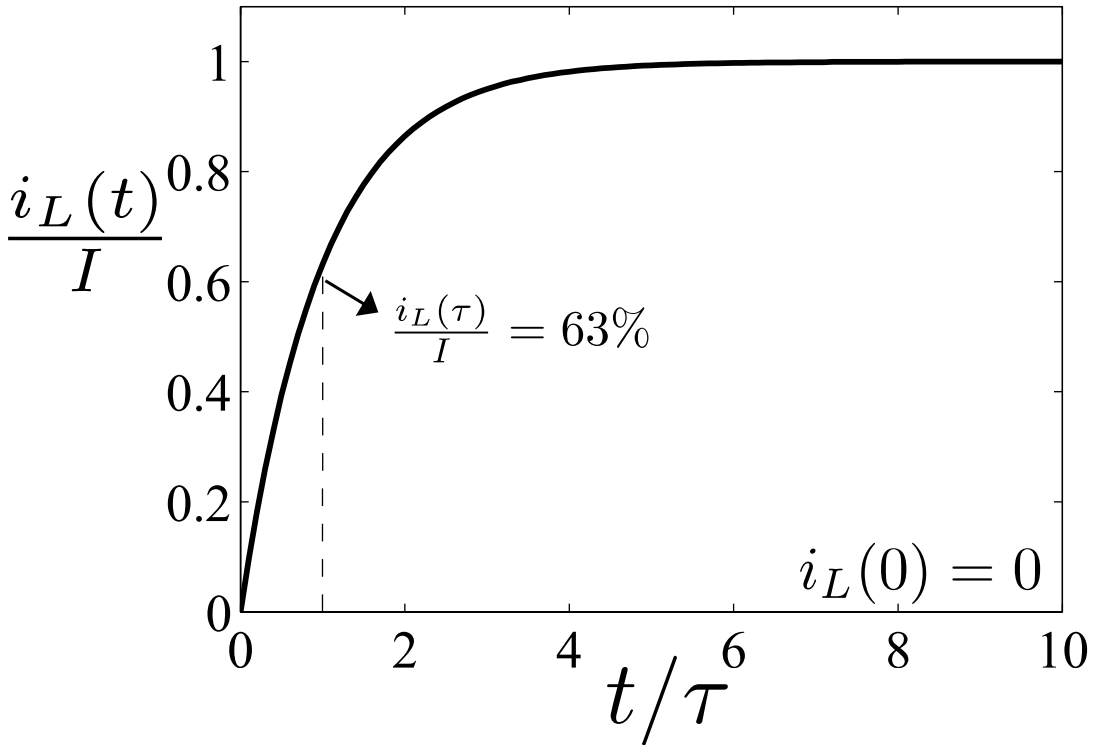


Circuito RL

- En resumen:

$$i_L(t) = (i_L(0) - I)\, e^{-\frac{t}{L/R}} + I$$





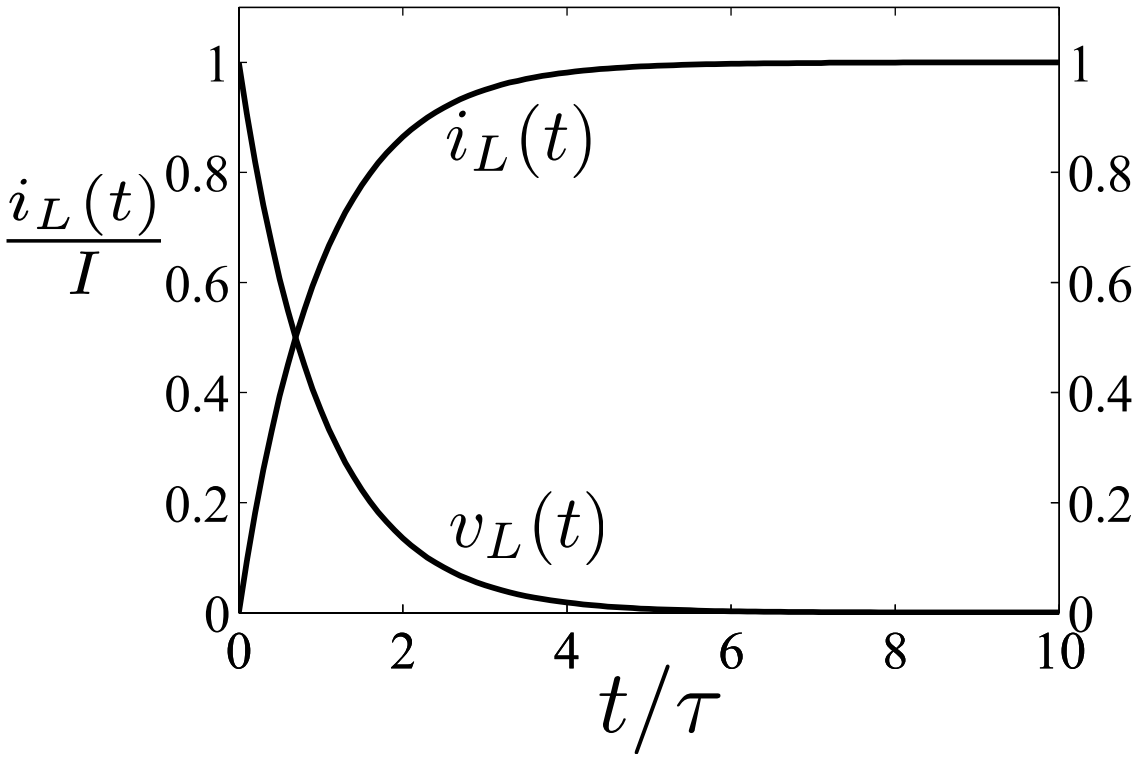
t/τ	$i_L(t)/I$
1	63.2%
2	86.5%
3	95%
4	98.2%
5	99.3%
6	99.8%

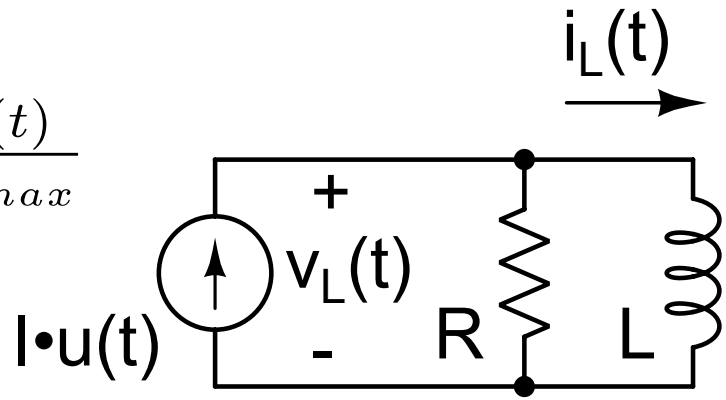
$$\tau = \frac{L}{R}$$

Circuito RL

- Veamos qué ocurre con el voltaje:

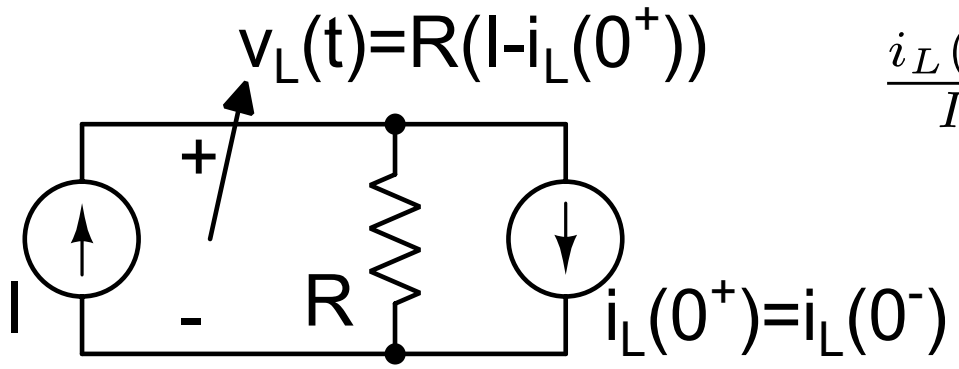
$$v_L(t) = L\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t} = R\left(I - i_L(0)\right)e^{-\frac{t}{L/R}}$$

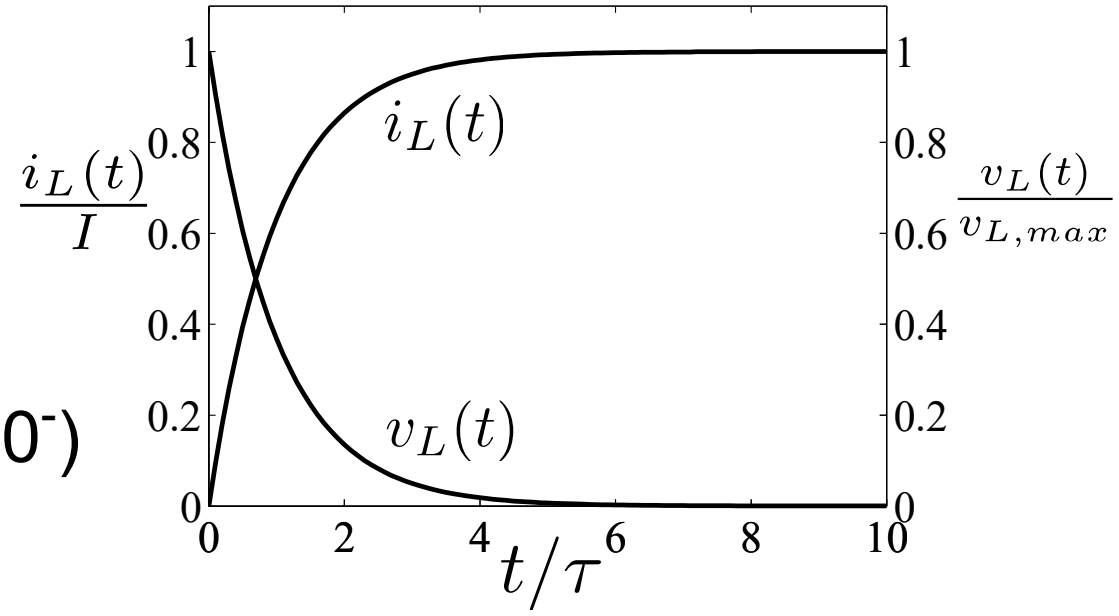




Circuito RL

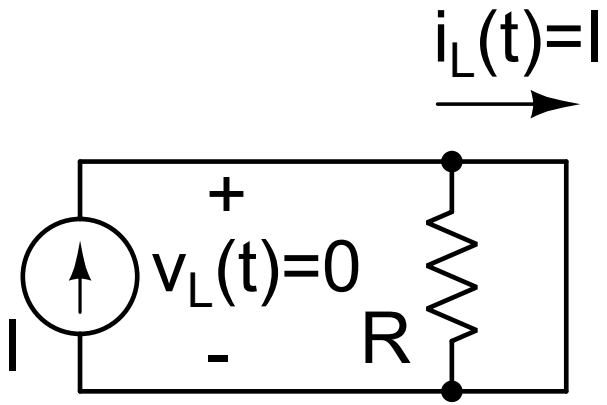
- Algunas observaciones:
  - En un comienzo ($t=0^+$), la corriente de entrada del circuito cambia bruscamente. Un inductor se opone a los cambios bruscos de corriente, por lo que su corriente en $t = 0^-$ y en $t=0^+$ es exactamente igual. Luego, en $t=0^+$ el circuito se ve así:

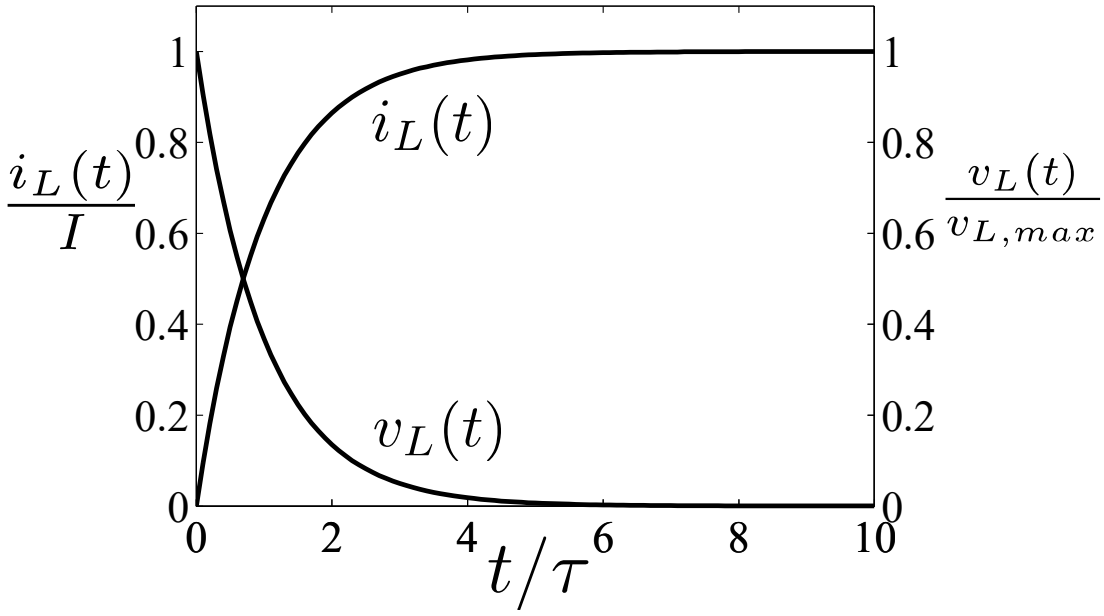




Circuito RL

- A medida que se carga el inductor disminuye la corriente a través de R, y por ende el voltaje v_L. Finalmente, en "t = varios τ", la señal de entrada se ve prácticamente como una señal DC (no varía en el tiempo), por lo que el inductor se ve como un corto circuito y no circula corriente por R:





Circuito RL

- Estudiemos ahora qué ocurre con la potencia entregada al inductor:
  - Asumiendo $i_L(0) = 0$, la energía entregada por la fuente de corriente está dada por:

$$E_I = \int_0^\infty I v_L(t) \mathrm{d}t = LI^2$$

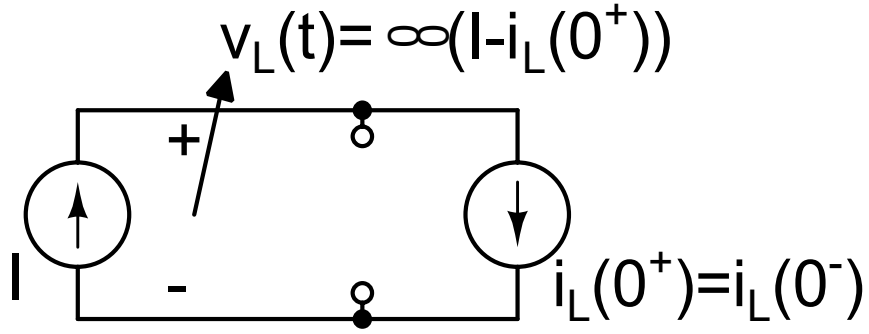
  - Y la energía absorbida por el inductor:

$$E_L = \int_0^\infty v_L(t) i_L(t) \mathrm{d}t = \frac{LI^2}{2}$$

  - ¿Qué ocurre con la otra mitad de la energía entregada por la fuente? → Es disipada por el resistor!

Circuito RL

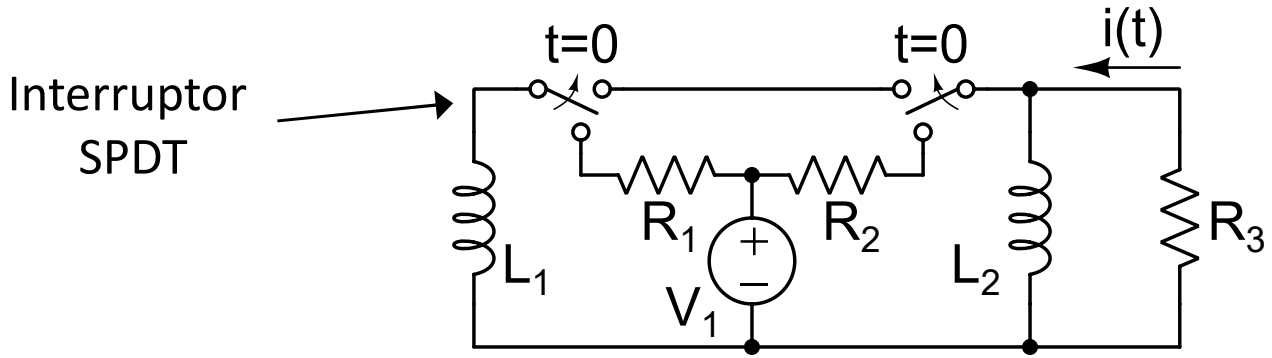
- Le energía disipada por el resistor es igual a $LI^2/2$ incluso si su resistencia es infinita (circuito abierto)!
  - Si $R=\infty$, en $t=0^+$ tendríamos la siguiente situación:



  - Teóricamente habría una diferencia de potencial infinita y una resistencia infinita, por lo que la energía disipada por el resistor infinito es distinta de cero.

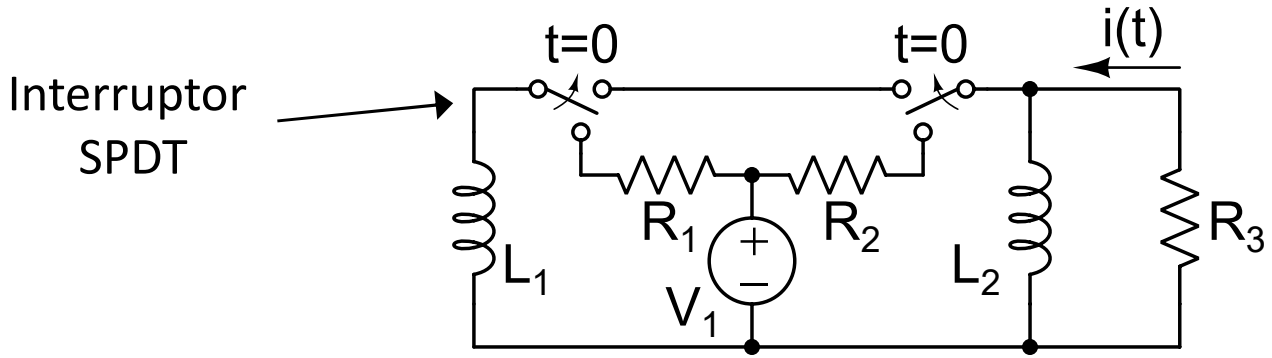
Circuito RL

- **Ejemplo**: Calcular i(t>0).

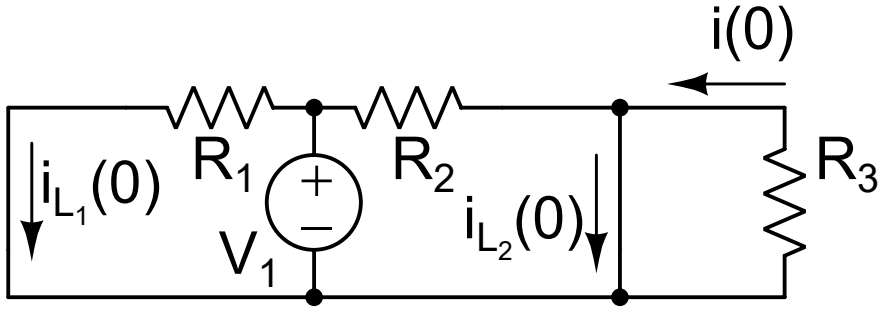


Circuito RL

- **Ejemplo**: Calcular i(t>0).



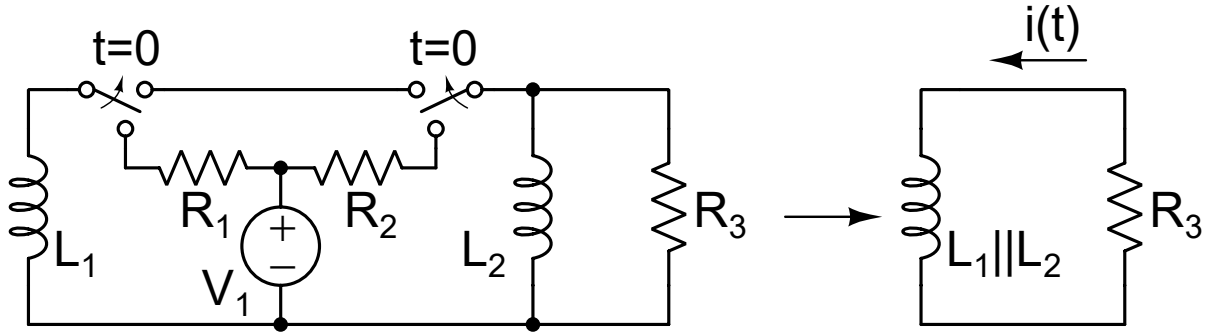
- Calculamos las corrientes justo antes del cambio en los interruptores, asumiendo que el circuito estaba en este estado hace mucho tiempo:



$$
\begin{aligned}
i_{L_1}(0) &= V_1/R_1 \\
i_{L_2}(0) &= V_1/R_2 \\
i(0) &= 0
\end{aligned}
$$

Circuito RL

- Una vez que los interruptores cambian de posición queda el siguiente circuito:



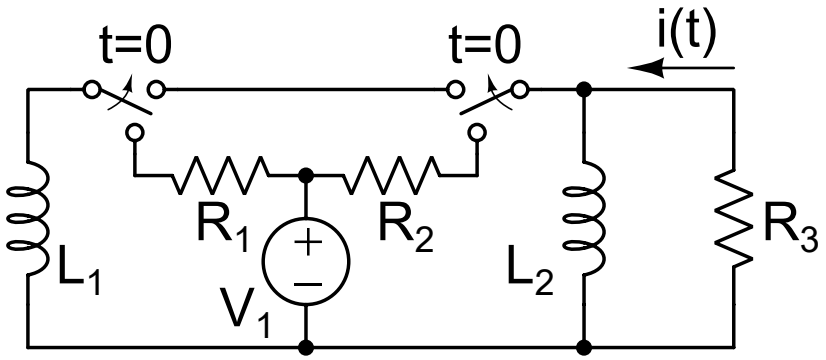
  - Notar que si bien $i(0^-)=0$, $i(0^+)=V_1/(R_1||R_2)$.
  - La respuesta del circuito es completamente natural (no hay excitaciones). El inductor equivalente se descarga completamente a través del resistor.

$$i(t) = \underbrace{\left(i(0^+)}_{=\frac{V_1}{R_1||R_2}} - I_{final}\right) e^{-\frac{t}{(L_1||L_2)/R_3}} + \underbrace{I_{final}}_{=0}$$

Circuito RC

- Por lo tanto:

$$i(t) = \left(\frac{V_1}{R_1 || R_2} \right) e^{-\frac{t}{(L_1 || L_2)/R_3}}$$



Fin ej.

Comentarios generales

- En circuitos de primer orden (con C o con L), la constante de tiempo depende del R_{eq} visto desde los bornes del elemento que almacena energía:
  - No importa qué tan complicado sea el circuito, si es de primer orden, éste se puede reducir a un simple circuito RC o RL.

- Tanto para el caso RC como el RL, la solución del circuito para cambios en escalón está dada por:

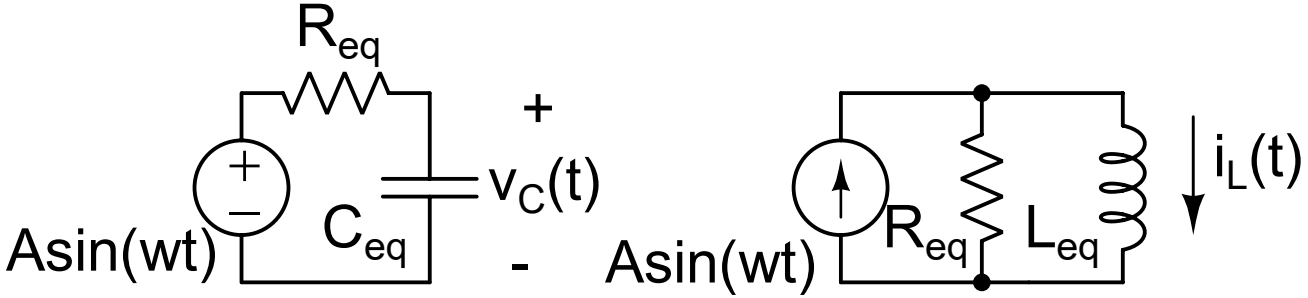
$$x(t) = (x(0) - x(\infty))\, e^{-\frac{t}{\tau}} + x(\infty)$$

$$\lim_{t \to 0} x(t) = x(0)$$

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = x(\infty)$$

Régimen sinusoidal permanente

- Como veremos más adelante, toda señal puede ser construida como la superposición de fuentes sinusoidales de distinta frecuencia, amplitud y fase. Por este motivo, es importante estudiar el comportamiento de circuitos excitados con fuentes puramente sinusoidales.
- Veamos qué ocurre al excitar un circuito de primer orden con una fuente sinusoidal:



$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}x(t) = \frac{1}{\tau}A\sin(\omega t)$$

Régimen sinusoidal permanente

- Respuesta homogénea o natural:

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}x(t) = 0 \rightarrow x_h(t) = ke^{-\frac{t}{\tau}}$$

- Respuesta particular o forzada:

$$x_p(t) = \alpha A \sin(\omega t) + \beta \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} A \sin(\omega t)$$

$$\rightarrow x_p(t) = \gamma \sin(\omega t) + \delta \cos(\omega t)$$

- Determinamos γ y δ:

$$\frac{\mathrm{d}x_p(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}x_p(t) = \frac{1}{\tau} A \sin(\omega t)$$

$$\rightarrow \gamma = \frac{A}{1+\tau^2\omega^2} \qquad \delta = -\frac{\tau\omega A}{1+\tau^2\omega^2} \qquad \rightarrow x_p(t) = \frac{A}{\sqrt{1+\tau^2\omega^2}} \sin\left(\omega t + \tan^{-1}(\tau\omega)\right)$$

Régimen sinusoidal permanente

- Determinamos k:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = ke^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{A}{\sqrt{1+\tau^2\omega^2}} \sin\left(\omega t + \tan^{-1}(\tau\omega)\right)$$

$$x(0) = k + \frac{A}{\sqrt{1+\tau^2\omega^2}} \sin\left(\tan^{-1}(\tau\omega)\right) = k + \frac{\tau\omega A}{1+\tau^2\omega^2}$$

$$\rightarrow k = x(0) - \frac{\tau\omega A}{1+\tau^2\omega^2}$$

- Por lo tanto:

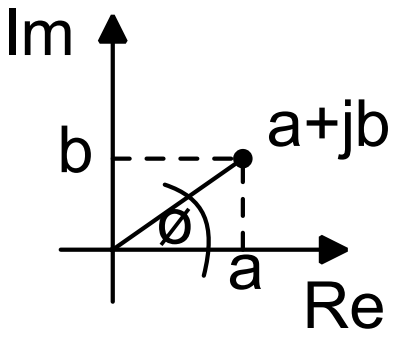
$$x(t) = \underbrace{\left(x(0) - \frac{\tau\omega A}{1+\tau^2\omega^2}\right) e^{-\frac{t}{\tau}}}_{\text{Tiende a 0}} + \underbrace{\frac{A}{\sqrt{1+\tau^2\omega^2}} \sin\left(\omega t + \tan^{-1}(\tau\omega)\right)}_{\text{Esto queda en régimen permanente!}}$$

Régimen sinusoidal permanente

- Una vez que desaparece la respuesta homogénea (t>>τ):

$$x_{RSP}(t) = \frac{A}{\sqrt{1+\tau^2\omega^2}} \sin\left(\omega t + \tan^{-1}(\tau\omega)\right)$$

  - Todos los voltajes y corrientes del circuito son sinusoides de *igual frecuencia angular* ω cuya amplitud y desfase dependen de la frecuencia de excitación!
  - Al modelar circuitos en régimen sinusoidal permanente es conveniente utilizar números complejos para representar la amplitud y la fase de las sinusoides.



$$a + jb = \sqrt{a^2 + b^2} \angle \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$