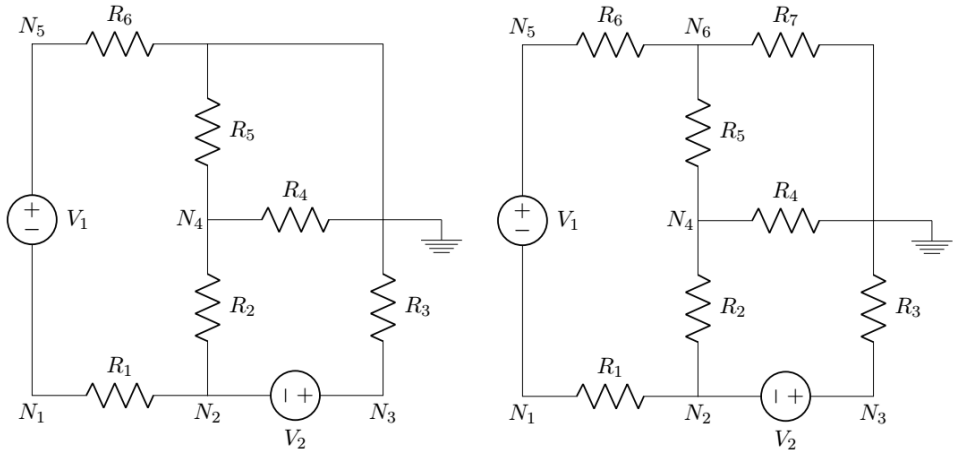
IEE2123 Circuitos Eléctricos
Profesor: David Watts

Tarea 3

Método de Nodos

Problema 1

Considere la siguiente topología circuital:



Encuentre la matriz obtenida por el método de nodos para ambos circuitos

Solución:

Determinamos que los nodos N_1-N_5 y los nodos N_2-N_3 forman supernodos porque poseen una fuente que los une. De esta forma, las ecuaciones del circuito son:

Supernodo 1(N_1-N_5):

$$\frac{v_5}{R_6} + \frac{v_1 - v_2}{R_1} = 0 \tag{1}$$

Supernodo 2(N_2-N_3):

$$\frac{v_2 - v_4}{R_2} + \frac{v_2 - v_1}{R_1} + \frac{v_3}{R_3} = 0 \tag{2}$$

Nodo N_4:

$$\frac{v_4}{R_5} + \frac{v_4}{R_4} + \frac{v_4 - v_2}{R_2} = 0 \tag{3}$$

Relación v_1-v_5:

$$v_5 - v_1 = V_1 \tag{4}$$

Relación v_2-v_3:

$$v_3 - v_2 = V_2 \tag{5}$$

De esta forma, el sistema matricial es el siguiente:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_1} & 0 & 0 & \frac{1}{R_6} \\ 0 & \frac{1}{R1||R2} & \frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R_2} & 0 & \frac{1}{R2||R3||R5} & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$$

Al agregar la resistencia R_7, en el caso de la matriz de nodos, se agrega además el nodo N_6, por ende, la matriz aumenta en una dimensión.

Nodo N_6:

$$\frac{v_6}{R_7} + \frac{v_6 - v_4}{R_5} + \frac{v_6 - v_5}{R_6} = 0 \tag{6}$$

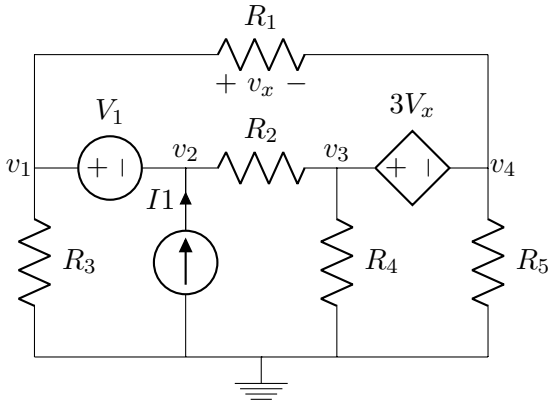
Los cambios en el nodo N_5 y N_4 se realizan directamente en la matriz, quedando el nuevo sistema matricial:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_1} & 0 & 0 & \frac{1}{R_6} & -\frac{1}{R_6} \\ 0 & \frac{1}{R1||R2} & \frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R_2} & 0 & \frac{1}{R2||R3||R5} & 0 & -\frac{1}{R_5} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{R_5} & -\frac{1}{R_6} & \frac{1}{R_5||R_6||R_6} \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$$

Problema 2

Pedrito, un inalcanzable ingeniero, necesita determinar los voltajes v_1, v_2, v_3 y v_4 del siguiente circuito. Lamentablemente, no está seguro de sus resultados y le pide ayuda a usted para revisarlos.

Determine la matriz obtenida por el método de nodos.



Solución: Entre los nodos correspondientes a los voltajes v_1 y v_2 hay una fuente de voltaje, al igual que entre los voltajes v_3 y v_4, por ende, los consideramos a ambos como supernodos. De esta forma, las ecuaciones que describen el circuito son:

Supernodo 1 (v_1-v_2):

$$\frac{v_1}{R_3} + \frac{v_1 - v_4}{R_1} + \frac{v_2 - v_3}{R_2} = I_1 \tag{7}$$

Supernodo 2 (v_3-v_4):

$$\frac{v_3}{R_4} + \frac{v_4}{R_5} + \frac{v_4 - v_1}{R_1} + \frac{v_3 - v_2}{R_2} = 0 \tag{8}$$

Por otro lado, las fuentes de voltaje nos relacionan los voltajes de sus respectivos nodos según las siguientes ecuaciones:

Relación v_1-v_2 :

$$v_1 = v_2 + V_1 \tag{9}$$

Relación v_3-v_4:

$$v_3 = v_4 + 3V_x \tag{10}$$

Determinamos el voltaje v_x y reemplazamos.

$$v_x = v_1 - v_4 \tag{11}$$

$$v_3 = 3v_1 - 2v_4 \tag{12}$$

Finalmente, reordenamos estas ecuaciones y escribimos el sistema:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{R_1||R_3} & \frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_1} \\ -\frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2||R_4} & \frac{1}{R_1||R_5} \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 \\ 0 \\ V_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$