

Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Eléctrica

Circuitos de Segundo Orden

Profesor Álvaro Lorca

IEE2123 – Circuitos Eléctricos
Segundo Semestre 2018

Agradecimientos material: Ángel Abusleme, Enrique Álvarez, Daniel Olivares

Introducción

- En las últimas clases estudiamos circuitos de primer orden, hablamos sobre régimen transitorio y régimen permanente, y también tratamos el concepto de constante de tiempo.

- Ahora seguiremos el estudio de circuitos con capacitores e inductores, pero analizaremos en detalle los circuitos de segundo orden.

- Estos circuitos son muy importantes porque muchos sistemas de orden mayor a dos se comportan *aproximadamente* igual que un sistema de segundo orden.

- Además, cualquier sistema de cualquier orden puede ser descompuesto en una conexión de sistemas de primer orden y/o sistemas de segundo orden.

Obtención de la ecuación diferencial

- En circuitos de segundo orden (o mayor), en términos algebraicos se vuelve un poco más complicado encontrar la ecuación que modela al sistema. Generalmente contamos con dos alternativas para hacer esto:
  - Alternativa “estándar”: plantear todas las ecuaciones del circuito y sustituir unas en otras de manera de llegar a una sola ecuación diferencial para la variable de interés.
  - Alternativa inteligente: usar la *Transformada de Laplace*, la que permite plantear la ecuación buscada rápidamente.

Obtención de la ecuación diferencial

- Recordemos cómo se define la Transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t$$

- Por ahora no ahondaremos en las mil y una cosas excesivamente importantes que hay que decir sobre esta transformada, sino que simplemente la utilizaremos como una herramienta para facilitar las expresiones matemáticas que modelan circuitos con capacitores e inductores.

Obtención de la ecuación diferencial

- Esta transformada tiene una propiedad en particular que hace más fácil la aplicación del operador derivada:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(t) \leftrightarrow sF(s)$$

$$\int f(t) \leftrightarrow \frac{1}{s} F(s)$$

  - Derivar/integrar f(t) con respecto al tiempo es equivalente a multiplicar/dividir por s la transformada de Laplace de f(t)!

  - En la práctica esto nos permite reemplazar todos los d/dt por s (d^2/dt^2 por s^2, etc.) y todas las integrales por 1/s, despejar la variable de interés y luego devolvernos al dominio del tiempo para obtener la ecuación diferencial buscada.

Obtención de la ecuación diferencial

- En estricto rigor

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\mathrm{d}^n f(t)}{\mathrm{d}t^n}\right\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2}\frac{\mathrm{d}f(0)}{\mathrm{d}t} \ldots - \frac{\mathrm{d}^{n-1} f(0)}{\mathrm{d}t^{n-1}}$$

  - Por lo que

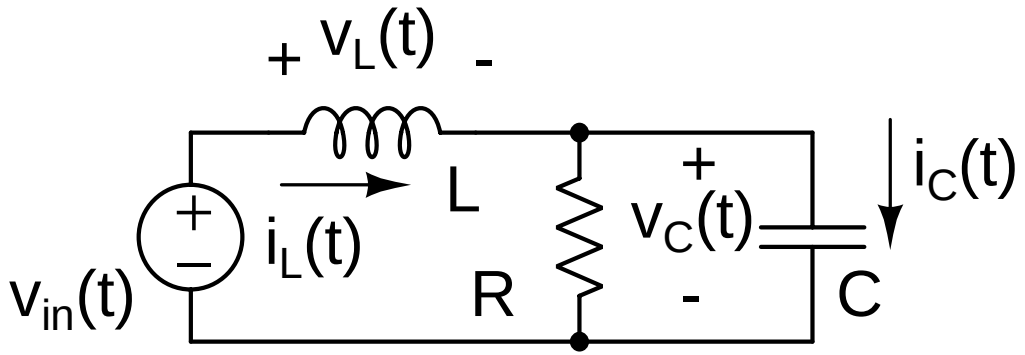
$$\mathcal{L}\left\{\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right\} = sF(s)$$

    sólo si las condiciones iniciales son nulas.

  - Como en cualquier ecuación diferencial, se puede resolver el sistema arrastrando las condiciones iniciales desde un principio (equivalente a aplicar la propiedad de la derivada de Laplace incluyendo las condiciones iniciales de inmediato) o simplemente introducir las condiciones iniciales al final (equivalente a omitir inicialmente las condiciones iniciales y luego, al resolver la ecuación, introducirlas).

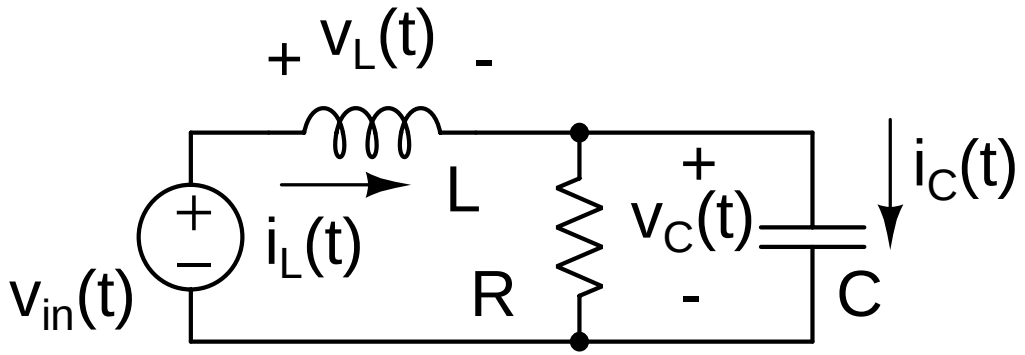
Obtención de la ecuación diferencial

- **Ejemplo**: Obtener la ecuación diferencial para $v_C(t)$ utilizando la transformada de Laplace.



Obtención de la ecuación diferencial

- **Ejemplo**: Obtener la ecuación diferencial para $v_C(t)$ utilizando la transformada de Laplace.



- En primer lugar tenemos:

$$v_L(t) = L\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t} \rightarrow V_L(s) = sLI_L(s)$$

$$i_C(t) = C\frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t} \rightarrow I_C(s) = sCV_C(s)$$

Obtención de la ecuación diferencial

- En el *dominio de Laplace* tanto capacitores como inductores se pueden “tratar como resistores” (en términos algebraicos)!

$$\frac{V_L(s)}{I_L(s)} = sL$$

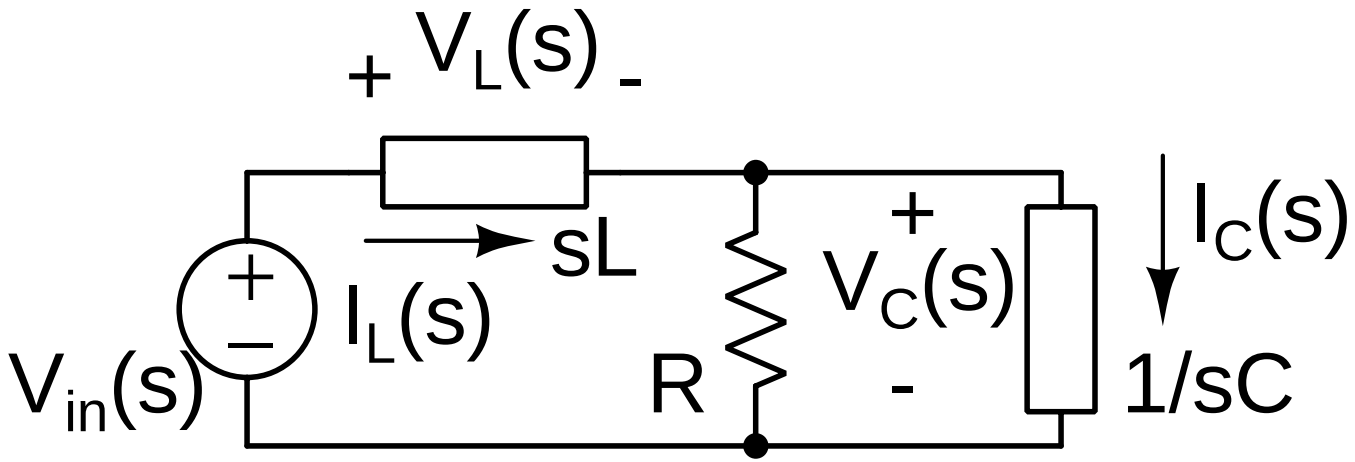
$$\frac{V_C(s)}{I_C(s)} = \frac{1}{sC}$$

De hecho, éstas son las impedancias de un inductor y un capacitor, respectivamente. No ahondaremos en este tema todavía.

  - Esto implica que podemos ocupar todas las técnicas inteligentes que conocemos (divisores de tensión y de corriente, equivalentes de H-T y N-M, etc.)

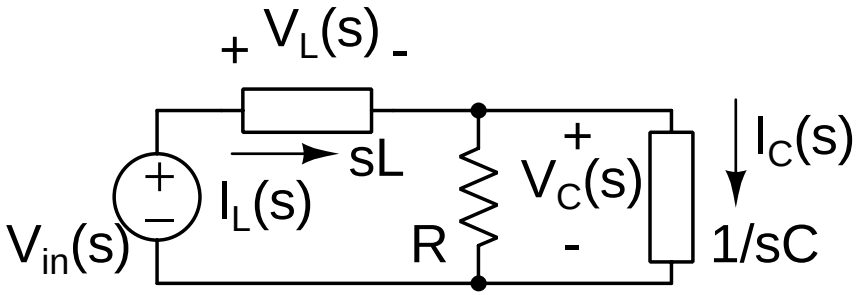
Obtención de la ecuación diferencial

- Con esto, en el dominio de Laplace, nuestro circuito se ve así:



Obtención de la ecuación diferencial

- Por divisor de voltaje:



$$V_C(s) = \frac{R||\frac{1}{sC}}{sL+R||\frac{1}{sC}} V_{in}(s)$$

$$V_C(s) = \frac{R}{R+sL+s^2RCL} V_{in}(s)$$

$$\rightarrow \left(s^2 + s\frac{1}{RC} + \frac{1}{CL}\right) V_C(s) = \frac{1}{CL} V_{in}(s)$$

- Por lo tanto:

$$\frac{\mathrm{d}^2 v_C(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{RC}\frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{CL} v_C(t) = \frac{1}{CL} v_{in}(t)$$

Obtención de la ecuación diferencial

- De haber hecho esto sin utilizar Transformada de Laplace:

$$v_{in}(t) = v_L(t) + v_C(t)$$

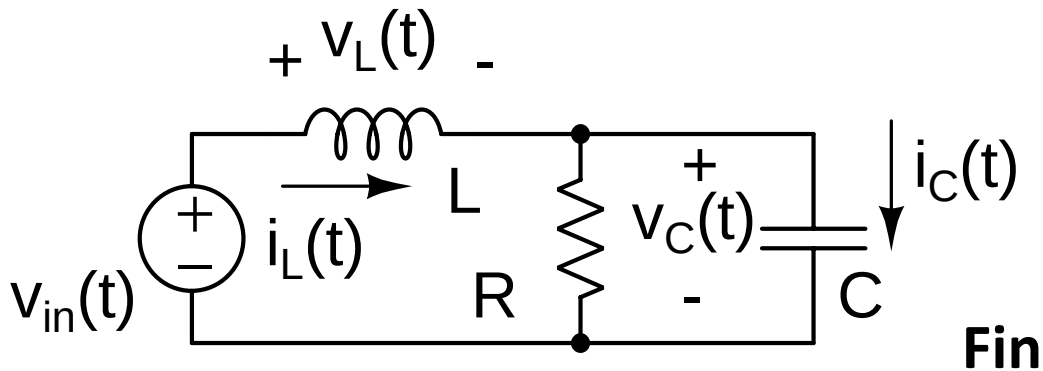
$$i_L(t) = \frac{v_C(t)}{R} + i_C(t)$$

$$= C\frac{\mathrm{d}^2 v_C(t)}{\mathrm{d}t^2}$$

$$v_L(t) = L\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t} + L\frac{\mathrm{d}i_C(t)}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 v_C(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{RC}\frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{CL}v_C(t) = \frac{1}{CL}v_{in}(t)$$

Utilizar la Transformada de Laplace fue bastante más elegante que esto!



Fin ej.

Circuitos de segundo orden

- Las corrientes y los voltajes de un circuito de segundo orden satisfacen una ecuación de la forma:

$$a_2 \frac{\mathrm{d}^2 x(t)}{\mathrm{d}t^2} + a_1 \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + a_0 x(t) = f(t)$$

$$\rightarrow \frac{\mathrm{d}^2 x(t)}{\mathrm{d}t^2} + 2\zeta\omega_0 \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x(t) = g(t)$$

  - Donde ζ (zeta) es el coeficiente de amortiguación y ω_0 es la frecuencia natural del sistema.

- La solución de la ecuación es de la forma:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

Circuitos de segundo orden

- La solución forzada $x_p(t)$ normalmente corresponde a la suma ponderada de g(t), su primera derivada y su segunda derivada:

$$x_p(t) = \alpha g(t) + \beta \frac{\mathrm{d}g(t)}{\mathrm{d}t} + \gamma \frac{\mathrm{d}^2 g(t)}{\mathrm{d}t^2}$$

  - Los parámetros α, β y γ se encuentran reemplazando $x_p(t)$ en la ecuación diferencial original.

  - La solución forzada no es *siempre* de esta forma. Si es que g(t) tiene la forma de uno de los componentes de la respuesta homogénea $x_h(t)$, esto ya no se cumple.

Circuitos de segundo orden

- La solución homogénea debería ser algo como:

$$x_h(t) \approx e^{rt}$$

- Reemplazamos $x_h(t) = e^{rt}$ en la ecuación igualada a 0:

$$\frac{\mathrm{d}^2 x_h(t)}{\mathrm{d}t^2} + 2\zeta\omega_0 \frac{\mathrm{d}x_h(t)}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x_h(t) = 0$$

$$\rightarrow r^2 + 2\zeta\omega_0 r + \omega_0^2 = 0$$

  - Este polinomio se conoce como *polinomio característico* de la ecuación diferencial.

  - La solución homogénea de la ecuación depende de las raíces de este polinomio (r_1 y r_2),

Circuitos de segundo orden

- A continuación nos enfocaremos en la búsqueda de las raíces del polinomio característico para encontrar la solución homogénea del sistema. Hay tres casos posibles:

$$r^2 + 2\zeta\omega_0 r + \omega_0^2 = 0 \rightarrow r_{1,2} = -\zeta\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

  - Raíces reales y distintas (respuesta *sobreamortiguada*):

$$\zeta > 1$$

  - Raíces reales e iguales (respuesta *críticamente amortiguada*):

$$\zeta = 1$$

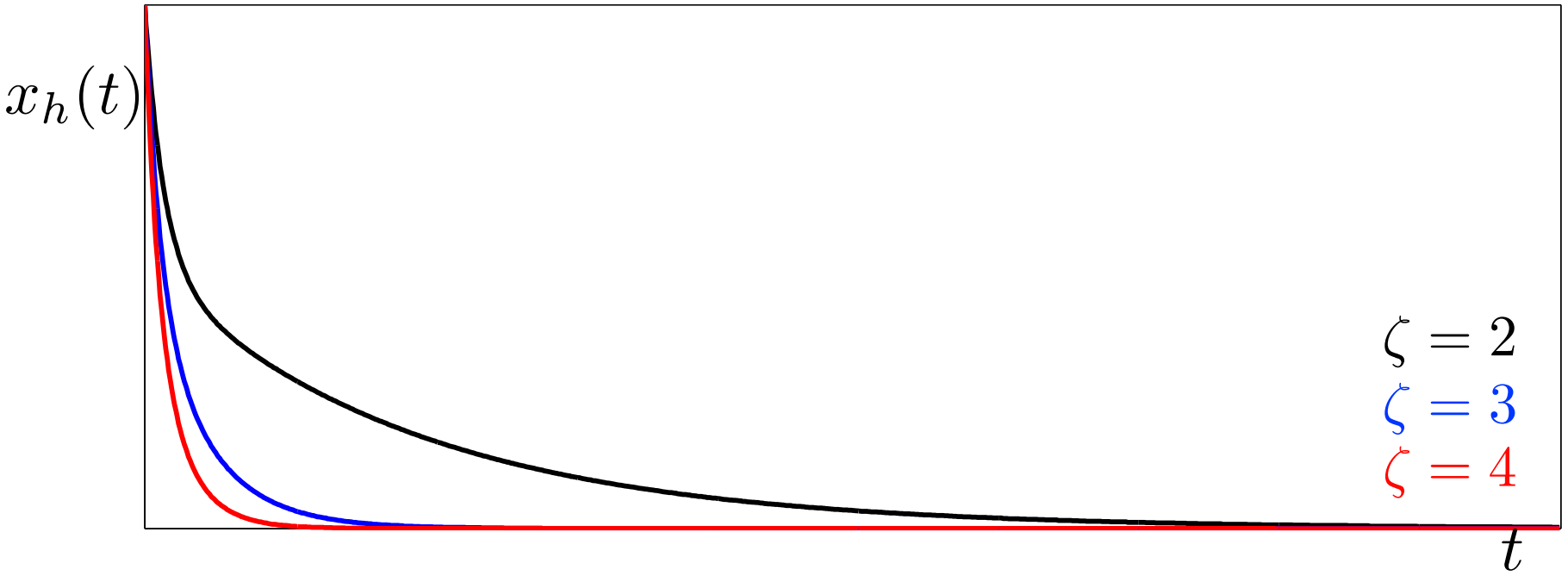
  - Raíces complejas conjugadas (respuesta *subamortiguada*):

$$\zeta < 1$$

Circuitos de segundo orden

- Respuesta sobreamortiguada:

$$x_h(t) = k_1 e^{\left(-\zeta\omega_0+\omega_0\sqrt{\zeta^2-1}\right)t} + k_2 e^{\left(-\zeta\omega_0-\omega_0\sqrt{\zeta^2-1}\right)t}$$



Circuitos de segundo orden

- Respuesta críticamente amortiguada:

$$x_h(t) = k_1 e^{-\zeta\omega_0 t} + k_2 t e^{-\zeta\omega_0 t}$$



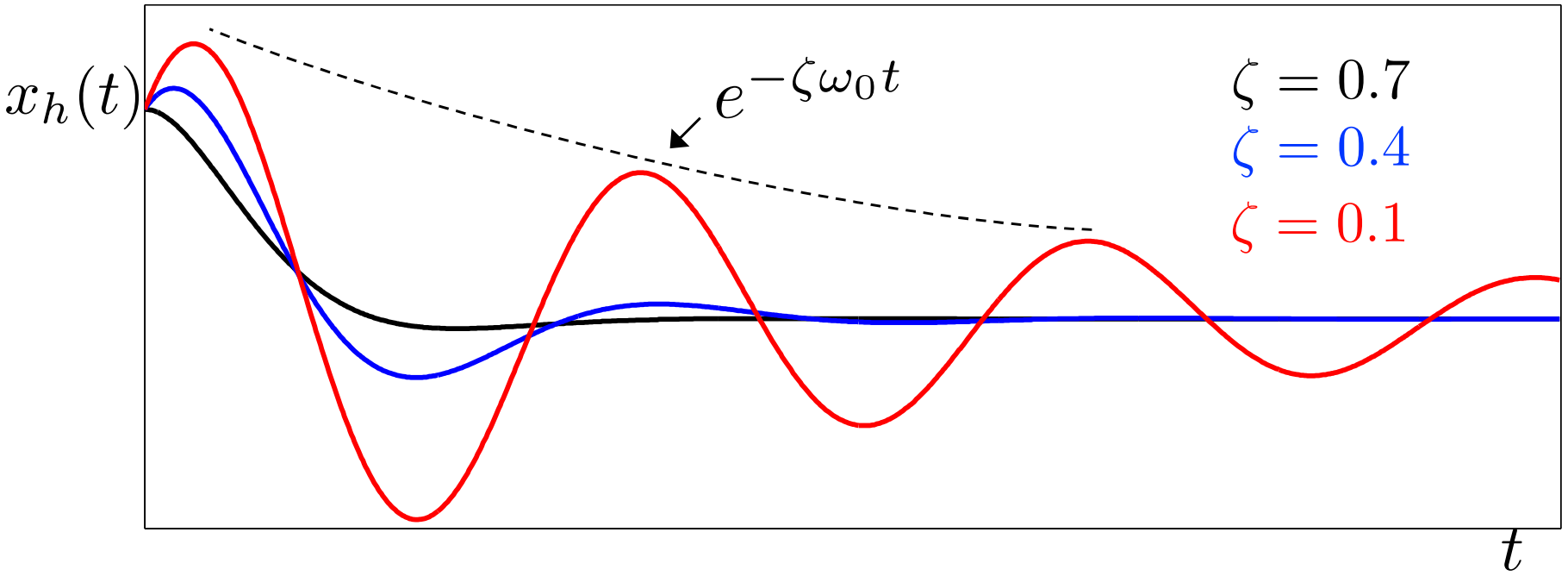
Circuitos de segundo orden

- Respuesta subamortiguada:

$$x_h(t) = e^{-\zeta\omega_0 t}\left(k_1 \cos\left(\omega_d t\right) + k_2 \sin\left(\omega_d t\right)\right)$$

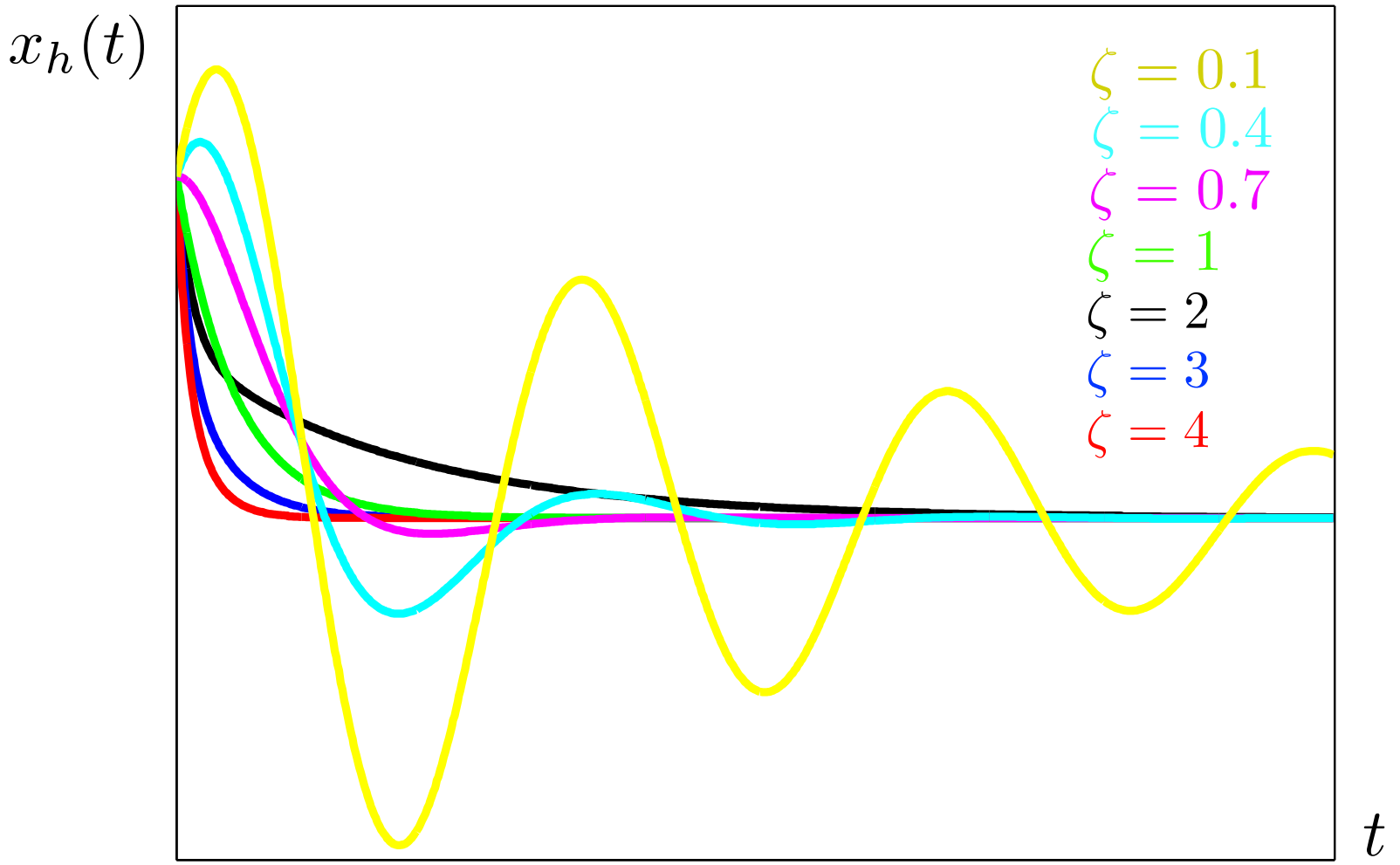
$$\omega_d = \omega_0\sqrt{1-\zeta^2}$$

Notar que ω_d es prácticamente igual a ω_0 para $\zeta < 0.5$ aprox.



Circuitos de segundo orden

- Comparación de respuestas:



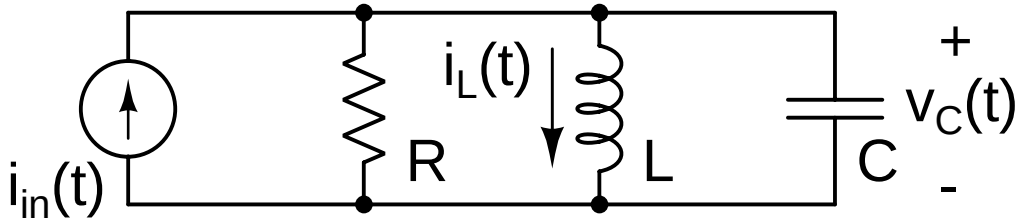
Circuitos de segundo orden

- Las constantes k_1 y k_2 se obtienen con las condiciones iniciales del problema.
  - Recordemos que en este caso necesitamos x(0) y x'(0), no sólo x(0) como en el caso de primer orden.

- Observaciones:
  - Notar que la solución homogénea desaparece al cabo de cierto tiempo, quedando sólo la solución particular.
  - El coeficiente de amortiguación indica de alguna manera cuán rápido desaparece $x_h(t)$.
  - La frecuencia natural indica a grandes rasgos la frecuencia de oscilación de la respuesta del sistema. La frecuencia exacta en realidad es ω_d, que depende de ζ y ω_0.

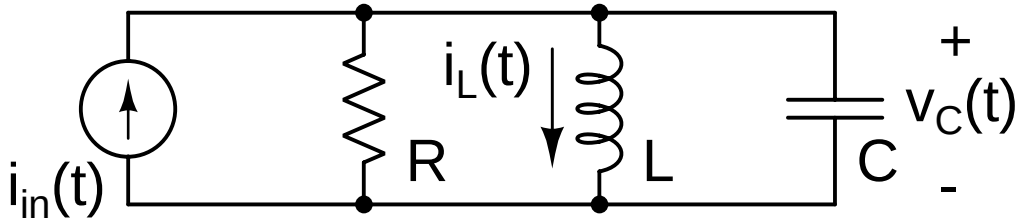
Circuitos de segundo orden

- **Ejemplo**: Encontrar $i_L(t)$ con $i_{in}(t) = I \bullet u(t)$:

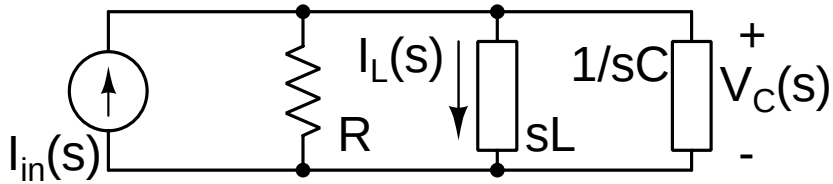


Circuitos de segundo orden

- **Ejemplo**: Encontrar $i_L(t)$ con $i_{in}(t) = I \bullet u(t)$:



- Planteamos la ecuación diferencial utilizando Laplace y por divisor de corriente:



$$I_L(s) = \frac{R||\frac{1}{sC}}{sL+R||\frac{1}{sC}} I_{in}(s)$$

$$\rightarrow \left(s^2 + s\frac{1}{RC} + \frac{1}{CL}\right) I_L(s) = \frac{1}{CL} I_{in}(s)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 i_L(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{RC}\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{CL} i_L(t) = \frac{1}{CL} i_{in}(t)$$

Circuitos de segundo orden

- Así:

$$\frac{\mathrm{d}^2 i_L(t)}{\mathrm{d}t^2} + \underbrace{\frac{1}{RC}}_{=2\zeta\omega_0} \frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t} + \underbrace{\frac{1}{CL}}_{=\omega_0^2} i_L(t) = \frac{1}{CL} i_{in}(t)$$

$$\rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{CL}}$$

$$\rightarrow \zeta = \frac{1}{2R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

- Ya conocemos la respuesta homogénea dependiendo del valor de ζ. Calculemos la respuesta forzada:

$$i_{p,L}(t) = \alpha I + \beta \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + \gamma \frac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}t^2} = \alpha I$$

Circuitos de segundo orden

- Determinamos α reemplazando $i_{p,L}(t)$ en la ecuación:

$$\frac{\mathrm{d}^2 i_{p,L}(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{RC}\frac{\mathrm{d}i_{p,L}(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{CL} i_{p,L}(t) = \frac{1}{CL} I$$

$$\frac{1}{CL}\alpha I = \frac{1}{CL} I \rightarrow \alpha = 1$$

- Por lo tanto:

$$i_L(t) = i_{h,L}(t) + I$$

Depende del valor de ζ!

Circuitos de segundo orden

- Supongamos que $\zeta < 1$ (repuesta subamortiguada):

$$i_L(t) = e^{-\zeta\omega_0 t}\left(k_1\cos\left(\omega_d t\right) + k_2\sin\left(\omega_d t\right)\right) + I$$

- Determinamos k_1 y k_2 asumiendo condiciones iniciales nulas:

$$i_L(0) = k_1 + I = 0 \rightarrow k_1 = -I$$

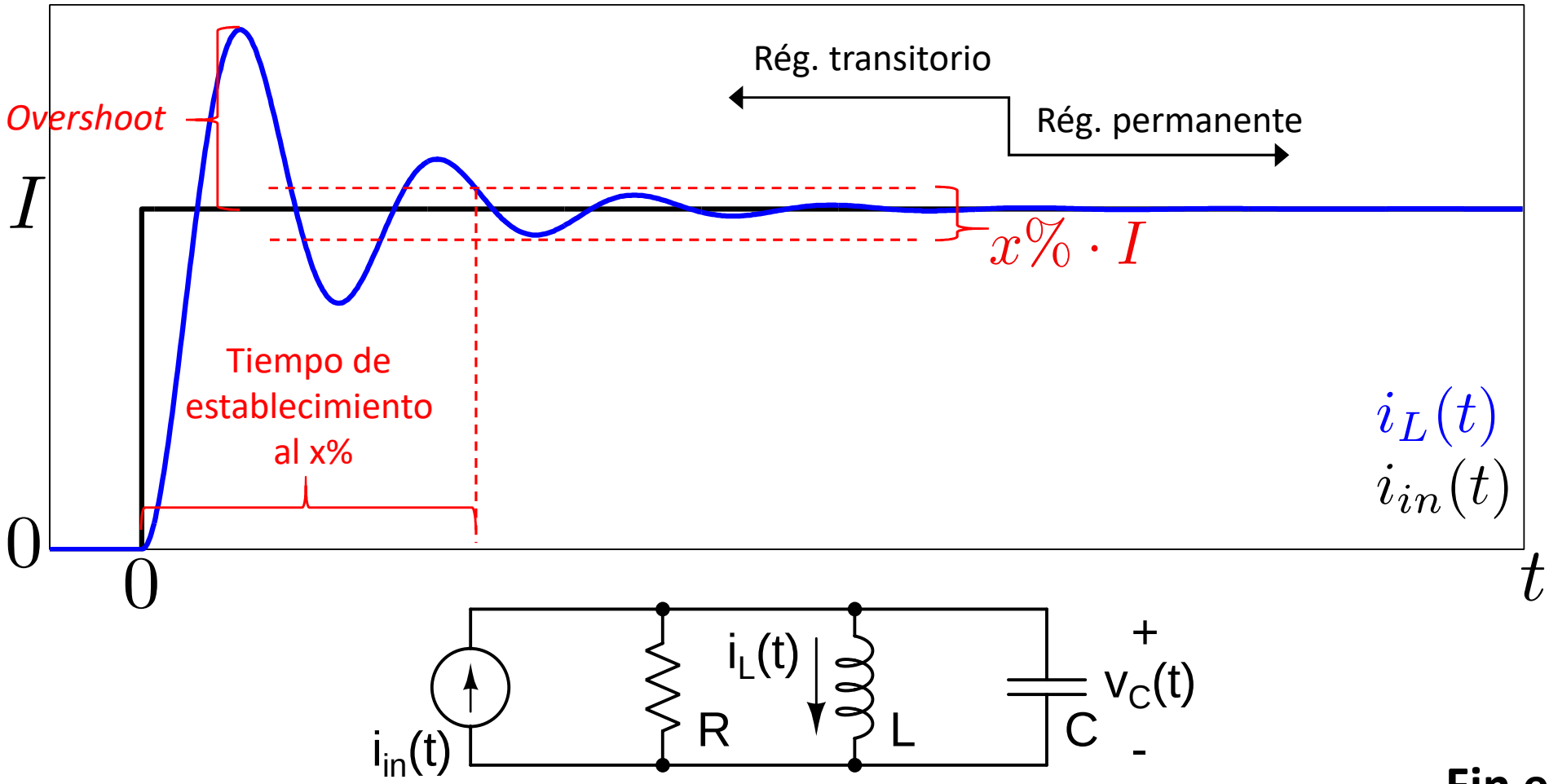
$$i'_L(0) = \omega_d k_2 - \zeta\omega_0 k_1 = 0 \rightarrow k_2 = -\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}I$$

- Por lo tanto:

$$i_L(t) = -Ie^{-\zeta\omega_0 t}\left(\cos\left(\omega_d t\right) + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\left(\omega_d t\right)\right) + I$$

Circuitos de segundo orden

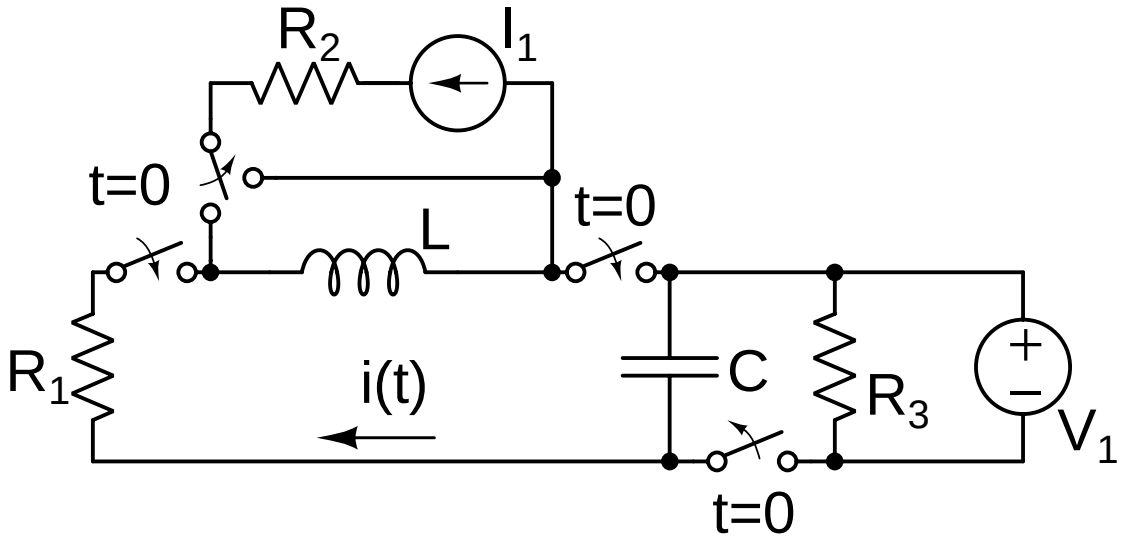
- Graficamos:



Fin ej.

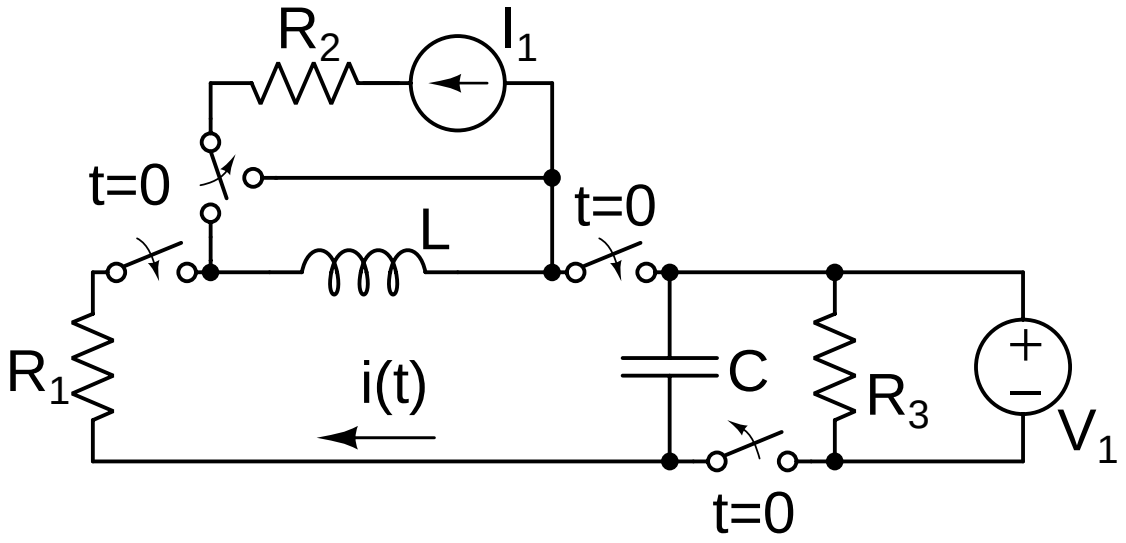
Circuitos de segundo orden

- **Ejemplo**: Calcular i(t). Asuma $R_1 >> C/L$.



Circuitos de segundo orden

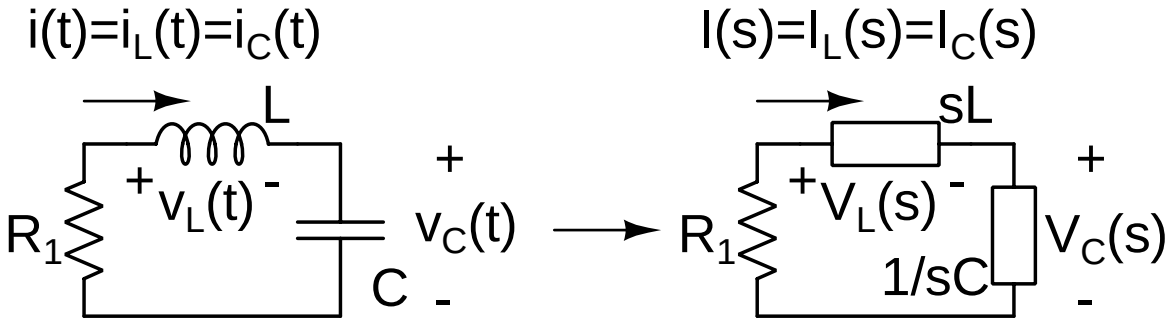
- **Ejemplo**: Calcular i(t). Asuma R_1>>C/L.



- Primero resolveremos el circuito para t>0. Luego buscaremos las condiciones iniciales del problema para encontrar las constantes de la respuesta homogénea $i_h(t)$. Claramente en este ejemplo no hay solución forzada.

Circuitos de segundo orden

- Para t>0:



$$R_1 I(s) + V_L(s) + V_C(s) = 0$$

$$R_1 I(s) + sLI(s) + \frac{1}{sC} I(s) = 0$$

$$\rightarrow s^2 I(s) + s\frac{R_1}{L} I(s) + \frac{1}{CL} I(s) = 0$$

- Por lo tanto:

$$\frac{\mathrm{d}^2 i(t)}{\mathrm{d}t^2} + \underbrace{\frac{R_1}{L}}_{=2\zeta\omega_0} \frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + \underbrace{\frac{1}{CL}}_{=\omega_0^2} i(t) = 0$$

$$\rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{CL}}$$

$$\rightarrow \zeta = \frac{R_1}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}$$

Circuitos de segundo orden

- Como R_1>>C/L, $\zeta > 1$ (respuesta sobreamortiguada), por lo tanto:

$$i_h(t) = i(t) = k_1 e^{\left(-\zeta\omega_0 + \omega_0\sqrt{\zeta^2-1}\right)t} + k_2 e^{\left(-\zeta\omega_0 - \omega_0\sqrt{\zeta^2-1}\right)t}$$

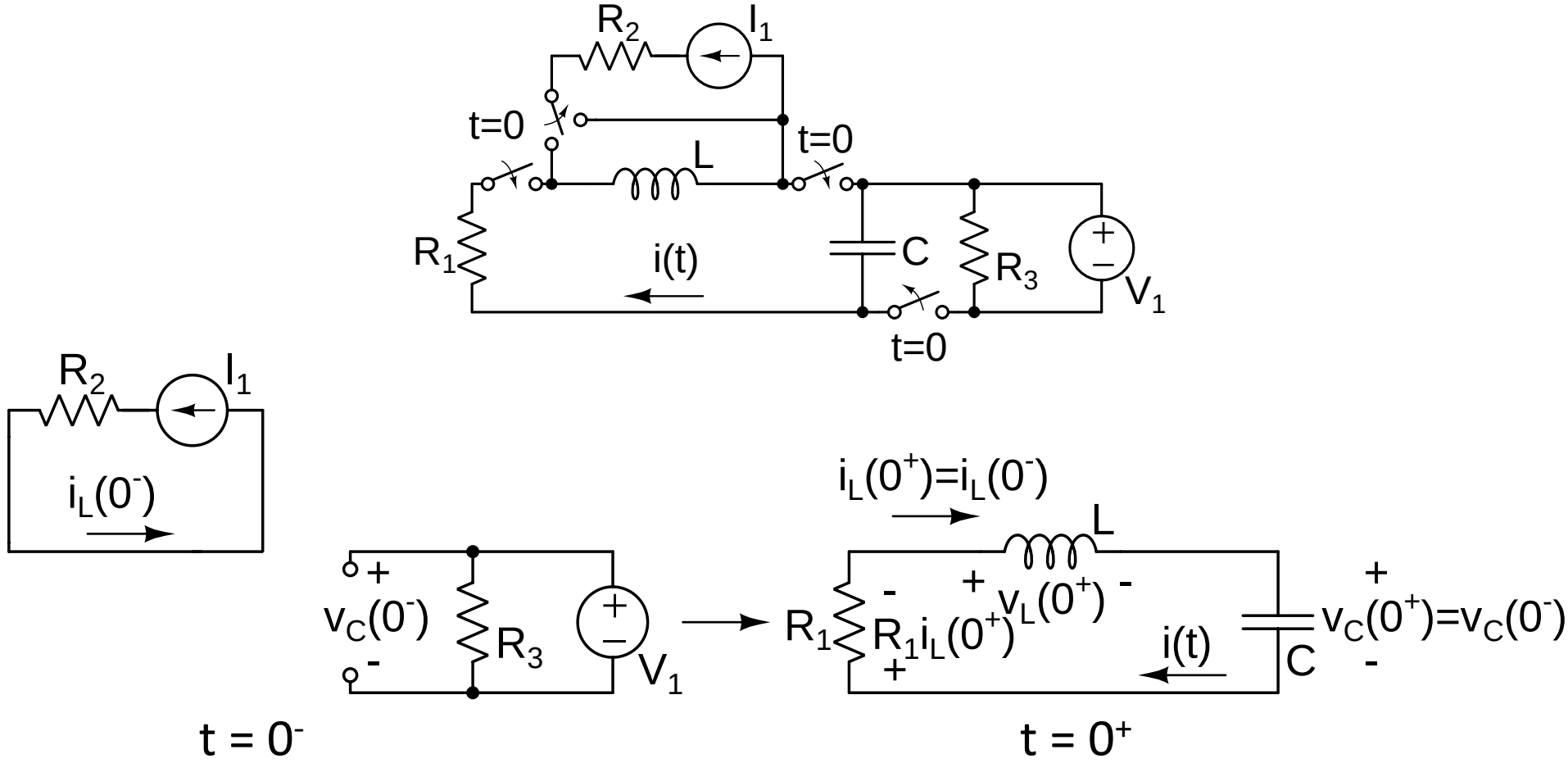
- Donde:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{CL}}$$

$$\zeta = \frac{R_1}{2}\sqrt{\frac{C}{L}} > 1$$

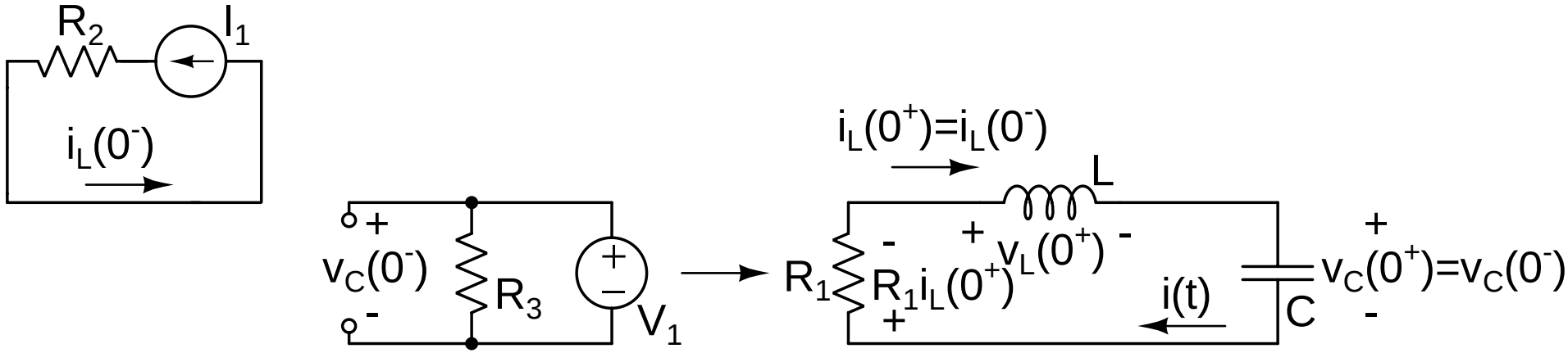
Circuitos de segundo orden

- Finalmente buscamos las condiciones iniciales a partir de las cuales es posible encontrar k_1 y k_2:



Circuitos de segundo orden

- Y las condiciones iniciales buscadas están dadas por:



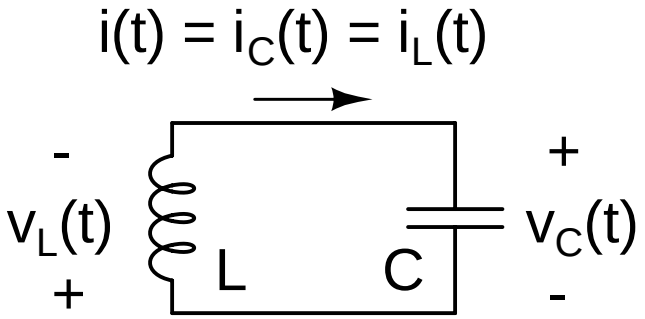
$$i(0) = i_L(0^+) = I_1$$

$$i'(0) = \frac{v_L(0^+)}{L} = \frac{-R_1 i_L(0^+) - v_C(0^+)}{L} = \frac{-R_1 I_1 - V_1}{L}$$

Fin ej.

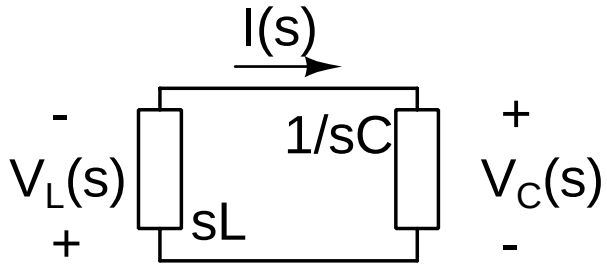
Frecuencia natural y coeficiente de amortiguación

- Para entender bien qué son ζ y ω_0, estudiemos el siguiente circuito LC paralelo en el que $v_C(0) = V$ y $i_L(0)=0$:



- Resolvemos el circuito para $v_C(t)$:

$$V_L(s) + V_C(s) = 0$$
$$sLI(s) + V_C(s) = 0$$
$$s^2 LCV_C(s) + V_C(s) = 0$$
$$\rightarrow \frac{\mathrm{d}^2 v_C(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{CL} v_C(t) = 0$$



Frecuencia natural y coeficiente de amortiguación

- Luego:

$$\frac{\mathrm{d}^2 v_C(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{CL} v_C(t) = 0 \qquad \begin{array}{l} \rightarrow \zeta = 0 \\ \rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{CL}} \end{array}$$

- Por lo tanto la respuesta del sistema es subamortiguada. De acuerdo a esto, y considerando que no hay ninguna excitación:

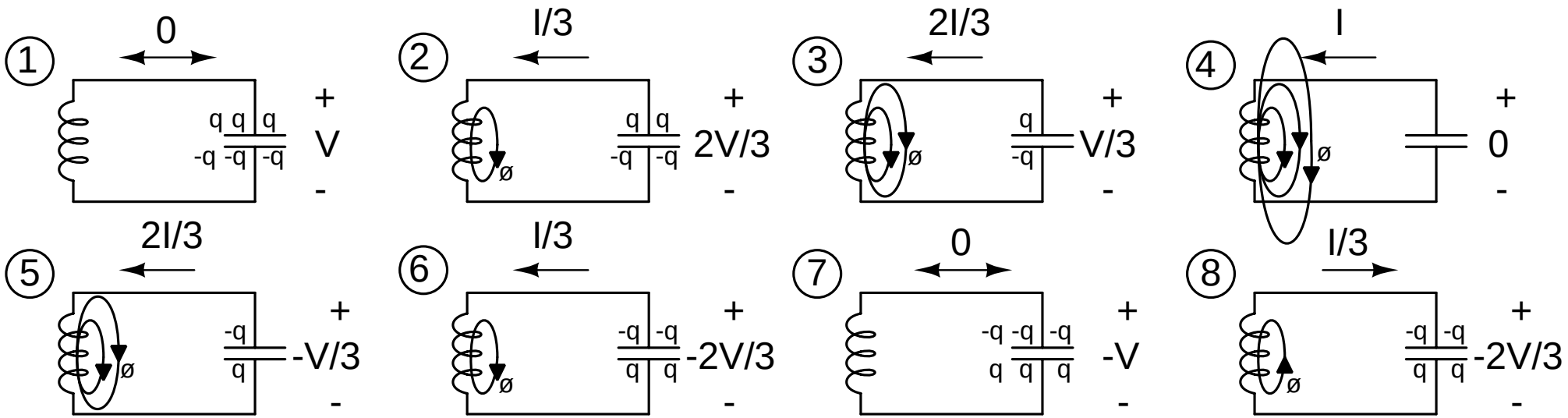
$$v_C(t) = e^{-\zeta\omega_0} \left(k_1 \cos(\omega_d t) + k_2 \sin(\omega_d t)\right) = k_1 \cos(\omega_0 t) + k_2 \sin(\omega_0 t)$$

- Determinamos k_1 y k_2 con las condiciones iniciales:

$$\begin{array}{l} v_C(0) = V \rightarrow k_1 = V \\ i_L(0) = C v_C'(0) = 0 \rightarrow k_2 = 0 \end{array} \qquad \rightarrow v_C(t) = V \cos\left(\omega_0 t\right)$$

Frecuencia natural y coeficiente de amortiguación

- $v_C(t)$ corresponde a una sinusoide de amplitud V y frecuencia ω_0!
  - El circuito *resuena*. El capacitor y el inductor intercambian la energía almacenada de forma periódica.



• • •

Frecuencia natural y coeficiente de amortiguación

- Al agregar un resistor (grande) al circuito original:

$$\frac{\mathrm{d}^2 i_L(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{RC}\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{CL} i_L(t) = 0$$

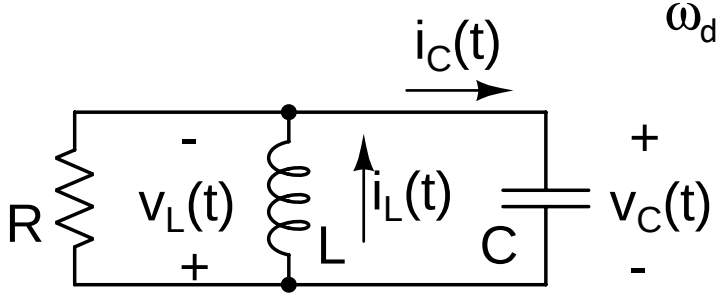
$$\rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{CL}}$$

$$\rightarrow \zeta = \frac{1}{2R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

- La respuesta del sistema queda:

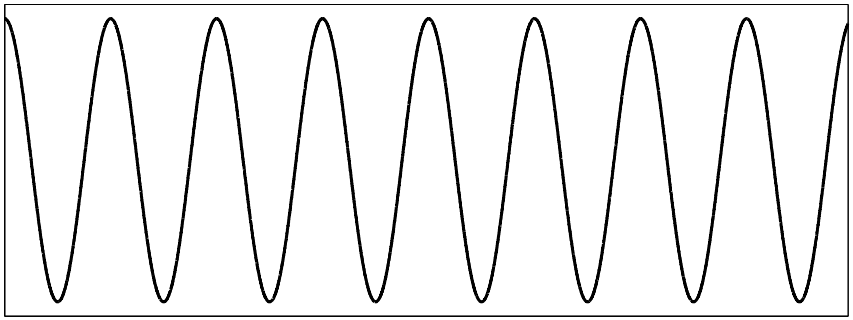
$$v_C(t) = V e^{-\zeta\omega_0 t}\underbrace{\left(\cos(\omega_d t) - \frac{1}{\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}}\sin(\omega_d t)\right)}_{\text{Sinusoide de frecuencia } \omega_d \text{ con algún desfase}}$$

$$\omega_d = \omega_0\sqrt{1-\zeta^2}$$

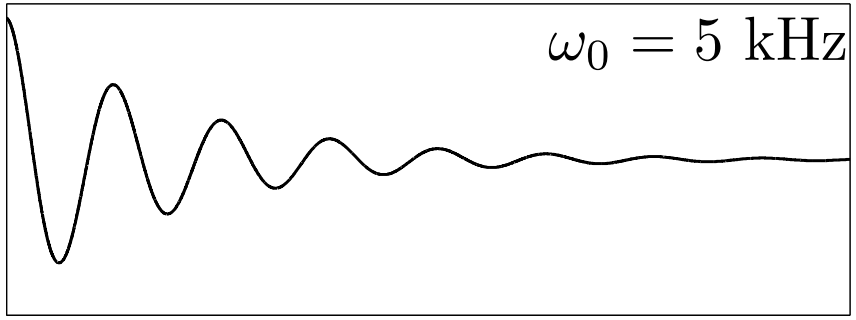


Frecuencia natural y coeficiente de amortiguación

- Al agregar un resistor en paralelo el circuito deja de oscilar al cabo de un tiempo (por el factor $e^{-\zeta\omega_0 t}$).
  - El resistor disipa la energía almacenada inicialmente en el capacitor.
  - Además, el intercambio de energía entre el capacitor y el inductor se hace más lento en un factor de $(1-\zeta^2)^{1/2}$.
  - A grandes rasgos los componentes resistivos "amortiguan" la respuesta del sistema haciendo que éste "rebote" cada vez menos y cada vez más lento debido a la disipación de energía.



LC ($\zeta = 0$)



RLC ($\zeta = 0.1$)

Régimen sinusoidal permanente

- Al excitar un circuito de segundo orden con una fuente sinusoidal Asin(ωt) la respuesta forzada es de la forma:

$$x_p(t) = \alpha A \sin(\omega t) + \beta \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} A \sin(\omega t) + \gamma \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} A \sin(\omega t)$$

$$\rightarrow x_p(t) = A(\alpha - \gamma\omega^2) \sin(\omega t) + \beta A \omega \cos(\omega t)$$

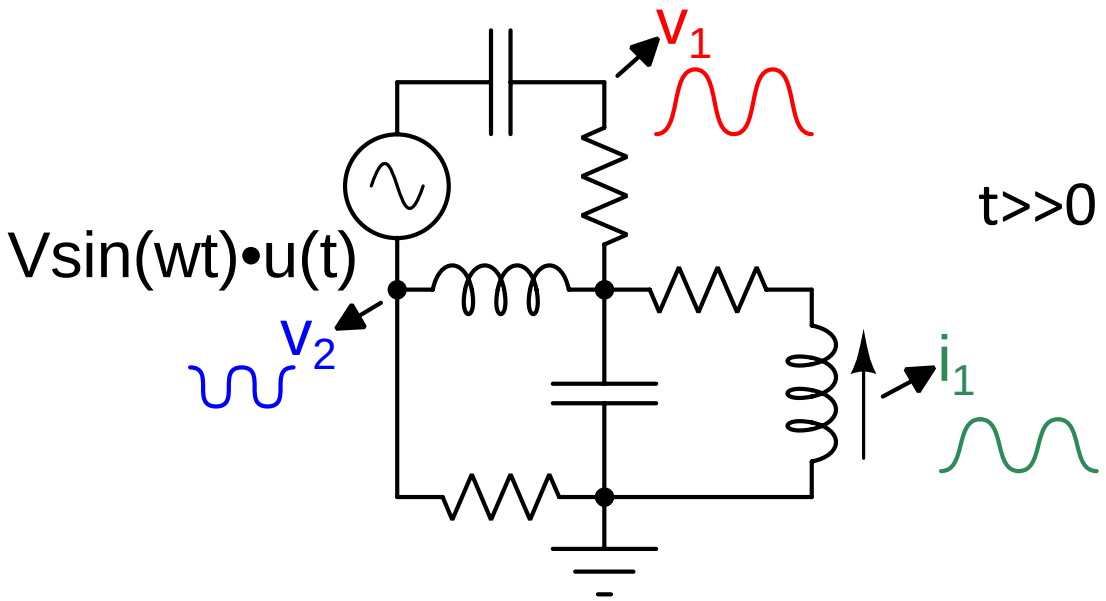
- Y como sabemos $x_h(t>>0) = 0$, por lo tanto:

$$x(t >> 0) = \underbrace{A(\alpha - \gamma\omega^2) \sin(\omega t) + \beta A \omega \cos(\omega t)}$$

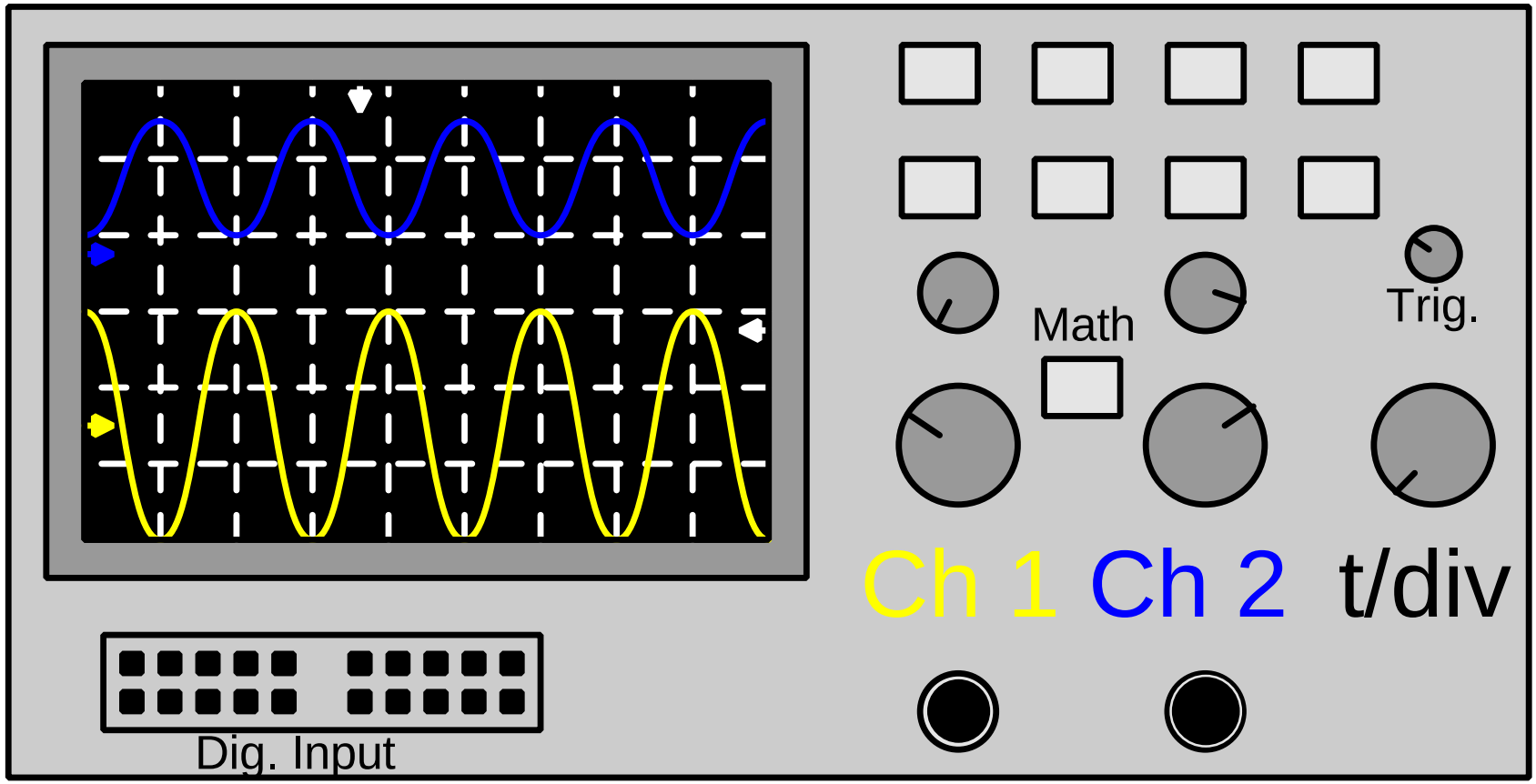
La suma de sinusoides de igual frecuencia da como resultado una sinusoide de igual frecuencia con cierto desfase!

Régimen sinusoidal permanente

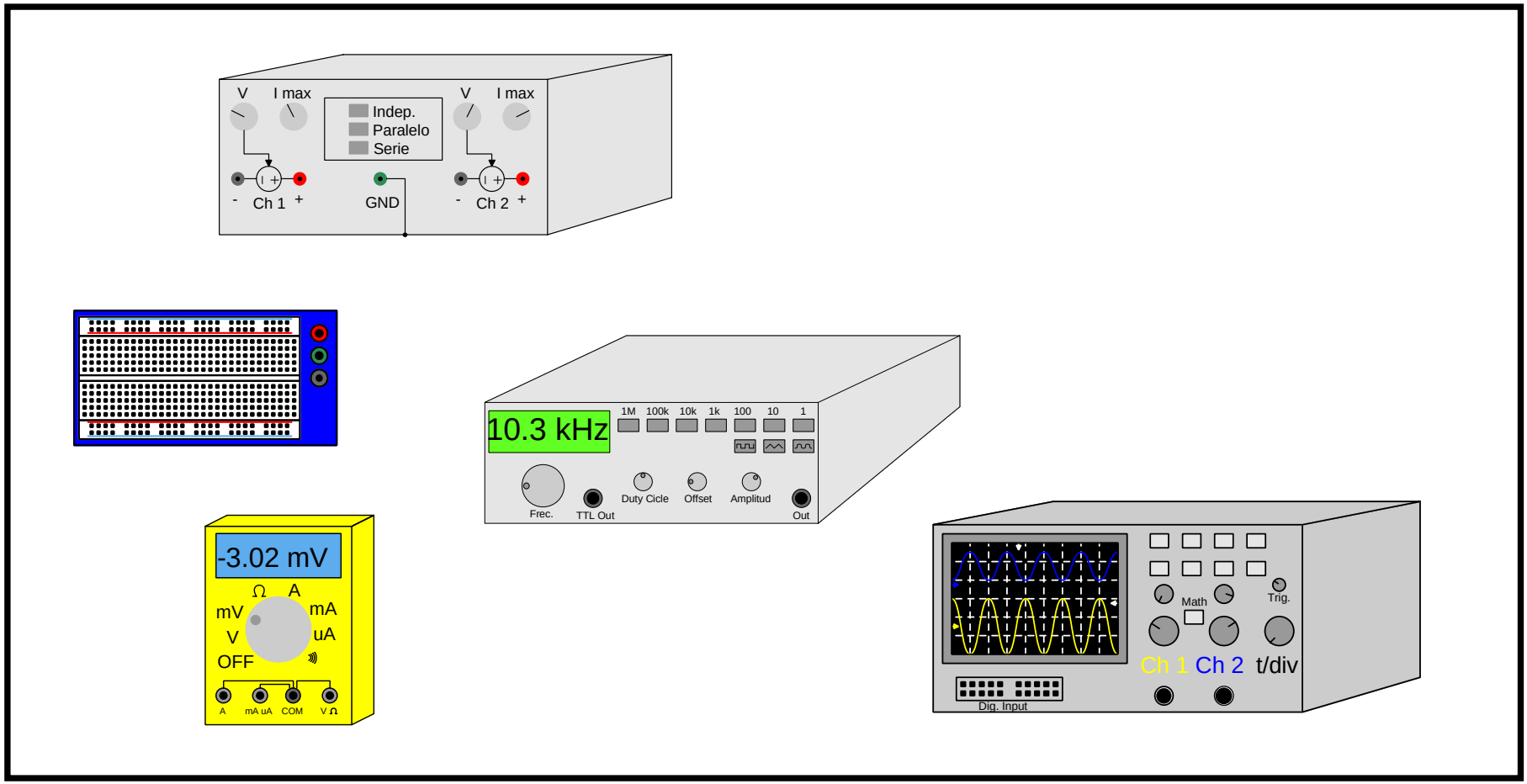
- Por lo tanto, al excitar un circuito con una fuente sinusoidal, en régimen permanente todas las señales del circuito corresponden a sinusoides con distintas amplitudes y desfases.
  - Esto mismo se cumple para circuitos de primer orden. De hecho, esto es válido para circuitos de cualquier orden!



Osciloscopio



Osciloscopio



Instrumentos de laboratorio