

Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Eléctrica

Fasores e Impedancia

Profesor Álvaro Lorca

IEE2123 – Circuitos Eléctricos
Segundo Semestre 2018

Agradecimientos material: Ángel Abusleme, Cristóbal Alessandri, Enrique Álvarez, Daniel Olivares

Introducción

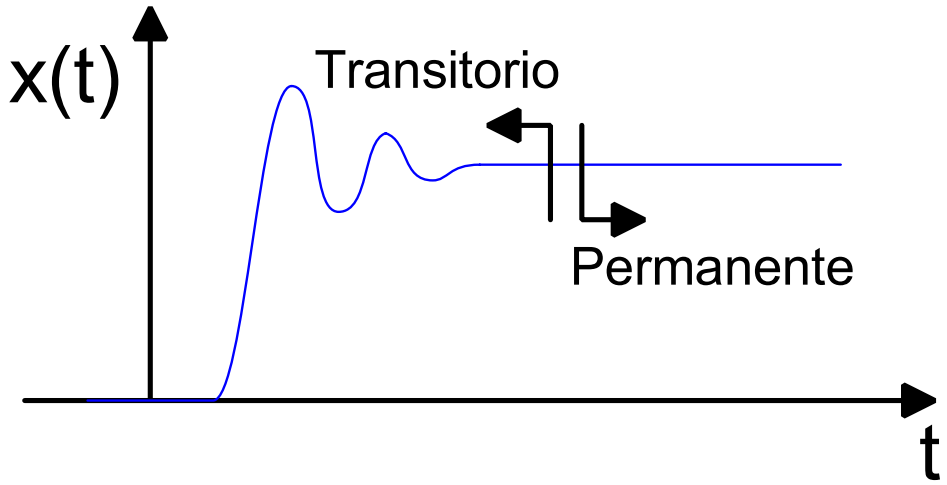
- En esta clase introduciremos el concepto de *fasor*, útil para trabajar con circuitos en régimen sinusoidal permanente.

- También introduciremos formalmente el concepto de *impedancia*, en circuitos representados en el dominio fasorial.

- Veremos que tanto capacitores como inductores pueden ser utilizados para hacer divisores de voltaje y de corriente, y reformularemos el teorema de máxima transferencia de potencia considerando impedancias en general y no sólo impedancias puramente resistivas.

Régimen permanente

- En la repuesta de un circuito de orden mayor a cero se distinguen dos regímenes: transitorio y permanente.
  - El régimen transitorio se asocia a la superposición de la respuesta homogénea y la respuesta forzada del sistema.
  - El régimen permanente se asocia a lo que queda una vez que la respuesta homogénea ha desaparecido, es decir, sólo la respuesta forzada.

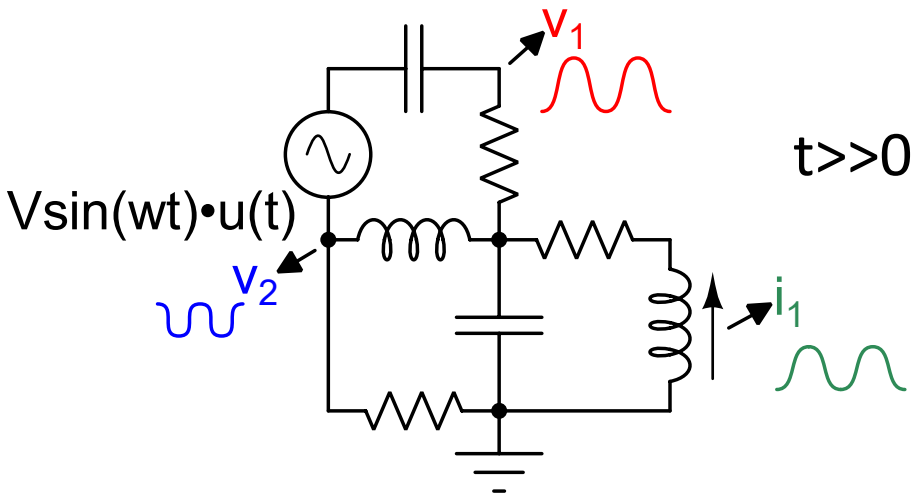


Régimen permanente

- La respuesta forzada está dada por la suma ponderada de la función que excita el circuito g(t) y sus derivadas.
  - Cuando g(t) es una sinusoide, la respuesta forzada corresponde a una sinusoide de la misma frecuencia con cierta amplitud y desfase.

$$g(t) = A\cos(\omega t) \rightarrow x_p(t) = A_p\cos(\omega t + \phi_p)$$

  - Esto aplica para *todas* las señales (voltajes y corrientes) del circuito!



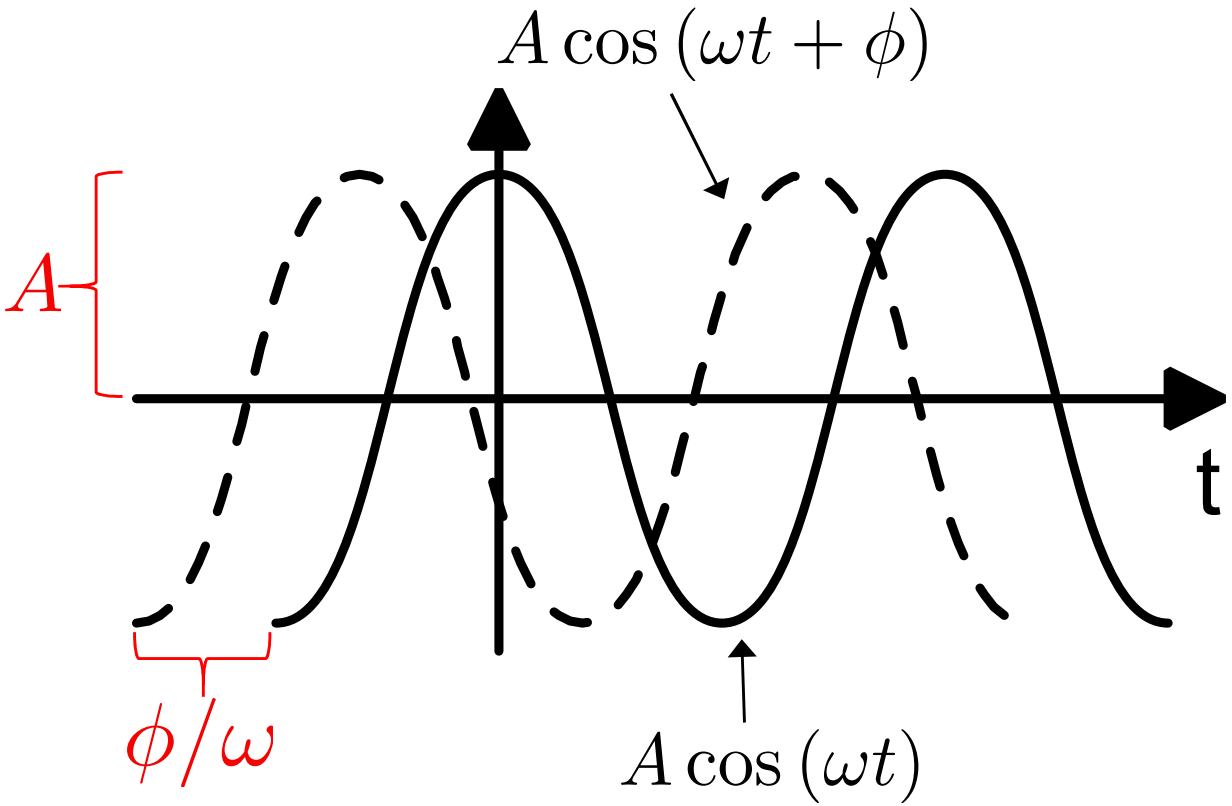
Régimen permanente

- En un circuito en *régimen sinusoidal permanente* sólo nos interesa la *amplitud* y el *desfase* de cada señal. La frecuencia es igual para todas las corrientes y voltajes!

  - Nos interesan en particular las excitaciones sinusoidales por dos motivos
    1. Toda señal puede ser descompuesta en una serie de sinusoides de amplitud y frecuencia distinta
    2. La sinusoide corresponde a la forma de onda dominante en la industria de potencia eléctrica (*corriente alterna*)

Régimen permanente

- En este contexto conviene tener claras todas las definiciones relativas a una onda sinusoidal:



Frecuencia angular:

$$\omega = 2\pi f \ \left[\frac{rad}{s}\right]$$

Fase: se dice que

$$A\cos(\omega t+\phi)$$

adelanta en ϕ grados a

$$A\cos(\omega t)$$

Magnitud:

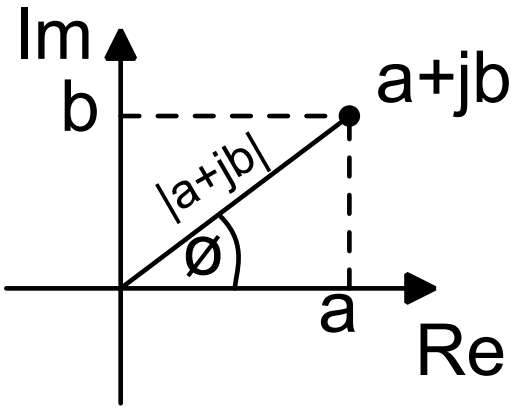
Valor *peak*: A

Valor *peak-to-peak*: $2A$

Valor RMS: $A/\sqrt{2}$

Fasores

- Dado que lo único que nos interesa en régimen sinusoidal permanente es la amplitud y la fase de cada señal, podemos usar estas dos magnitudes para describir todas las señales del circuito por medio de *fasores*.
- Un *fasor* es un número complejo en coordenadas polares:



$$a + jb = \sqrt{a^2 + b^2} \angle \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$

Amplitud (A) Fase (ϕ)

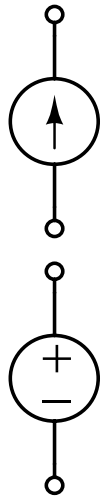
$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi) \leftrightarrow \hat{X} = A\angle\phi$$

Dominio del tiempo

Dominio fasorial

Fasores

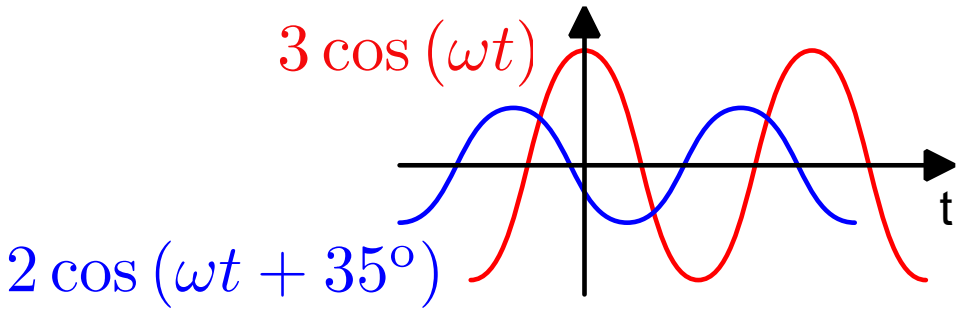
- Un fasor representa un *coseno*, para representar un *seno* basta aplicar un desfase de -90º (i.e. sin(x) = cos(x-90º)):

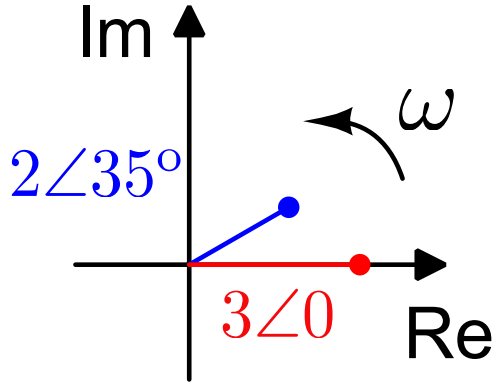


$$i(t) = 10\cos\left(2\pi 50t + 30^\circ\right) \leftrightarrow \hat{I} = 10\angle 30^\circ$$

$$v(t) = 6\sin\left(2\pi 60t + 120^\circ\right) \leftrightarrow \hat{V} = 6\angle 30^\circ$$

- Para graficar fasores se usa un diagrama fasorial:





Fasores

- En resumen, un fasor no es más que una representación alternativa de una onda sinusoidal (particularmente de un coseno).
  - Sirven para circuitos en régimen sinusoidal permanente.
  - La magnitud de un fasor representa la amplitud de la sinusoide, mientras que la fase representa el desfase que tiene la señal con respecto a una señal de referencia.
  - No pueden ser utilizados en circuitos con excitaciones de frecuencias distintas. Un diagrama fasorial asume que la frecuencia es la misma para todas las sinusoides representadas.
  - Se denotan con un “tongo” o un punto, pero en general basta con fijarse bien en el contexto.

Fasores

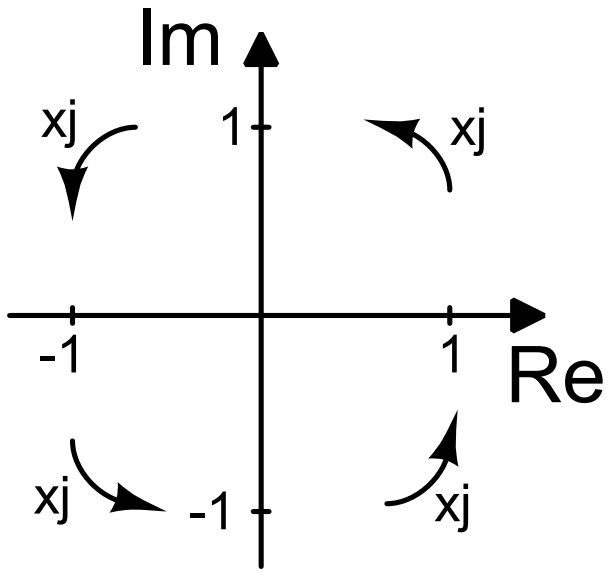
- Operatoria fasorial:

$$A_1\angle\phi_1 \cdot A_2\angle\phi_2 = A_1A_2\angle\phi_1 + \phi_2$$

$$\frac{A_1\angle\phi_1}{A_2\angle\phi_2} = \frac{A_1}{A_2}\angle\phi_1 - \phi_2$$

- Sobre números complejos:

$$j \cdot 1 = j$$
$$j \cdot j = j^2 = -1$$
$$j \cdot -1 = -j$$
$$j \cdot -j = -j^2 = 1$$
$$1/j = -j$$



Multiplicar por j (-j) es equivalente a rotar en 90º (-90º) en el plano complejo!

Impedancia

- Tanto el capacitor como el inductor corresponden a componentes de un puerto (dos terminales) que establecen una relación entre voltaje y corriente:

$$i_C(t) = C\frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t}$$

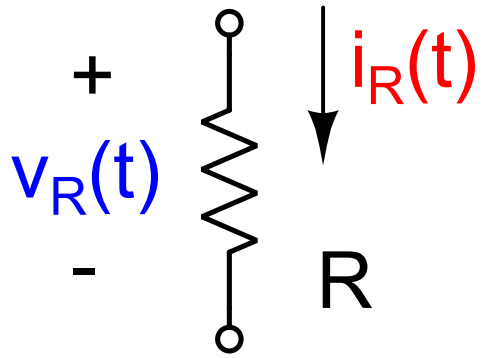
$$v_L(t) = L\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t}$$

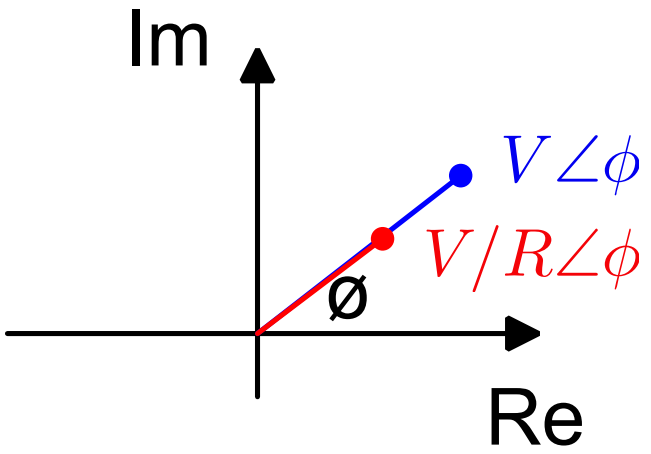
  - Como ya vimos, estas expresiones son “análogas” a la Ley de Ohm.

- A continuación definiremos oficialmente el concepto de *impedancia* y haremos lo posible para entender bien de dónde provienen sus fundamentos.

Impedancia

- Primero veamos qué ocurre con la relación voltaje-corriente para los distintos componentes circuitales que conocemos (R, C y L) en el dominio fasorial:
  - **Resistor:**





$$v_R(t) = V\cos(\omega t + \phi)$$

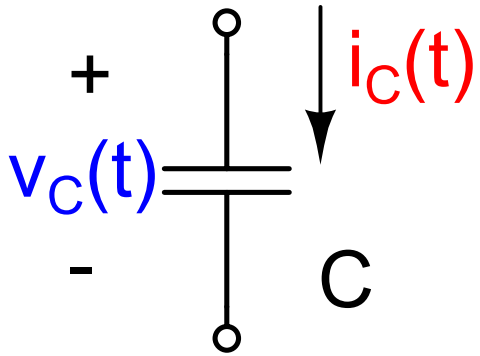
$$i_R(t) = \frac{v_R(t)}{R} = \frac{V}{R}\cos(\omega t + \phi)$$

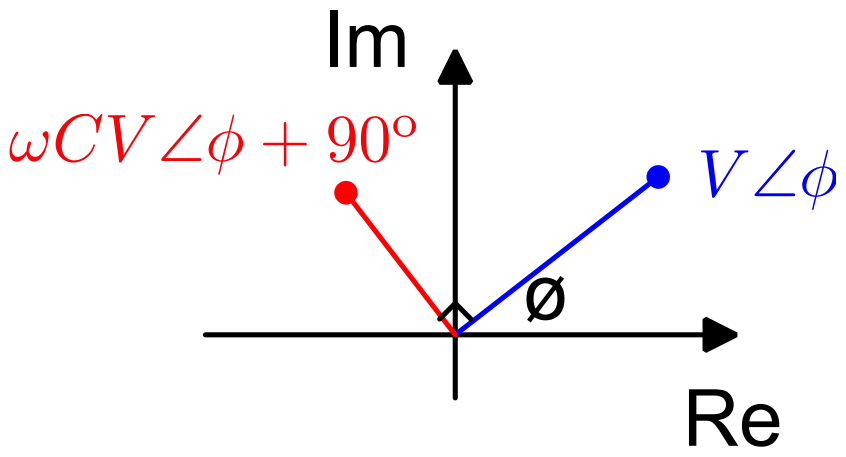
$$\rightarrow I_R = \frac{1}{R}\cdot V_R$$

El voltaje y la corriente están en fase

Impedancia

- **Capacitor:**





$$v_C(t) = V\cos(\omega t + \phi)$$

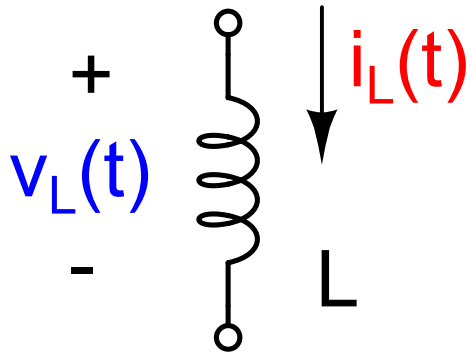
$$i_C(t) = C\frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t} = -\omega CV\sin(\omega t + \phi)$$
$$= -\omega CV\cos(\omega t + \phi - 90^o)$$
$$= \omega CV\cos(\omega t + \phi + 90^o)$$

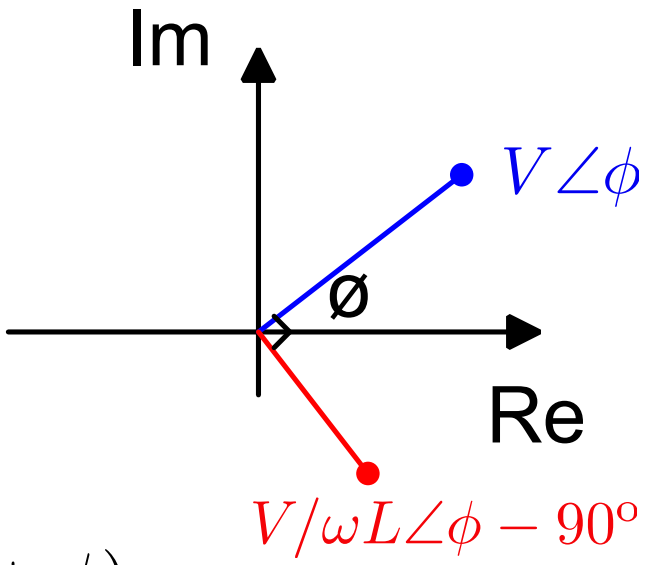
$$\rightarrow I_C = j\omega C \cdot V_C$$

La corriente adelanta en 90º al voltaje

Impedancia

- **Inductor:**





$$v_L(t) = V\cos(\omega t + \phi)$$

$$i_L(t) = \frac{1}{L}\int v_L(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{\omega L}V\sin(\omega t + \phi)$$

$$= \frac{1}{\omega L}V\cos(\omega t + \phi - 90^o)$$

$$\rightarrow I_L = \frac{1}{j\omega L}\cdot V_L$$

El voltaje adelanta en 90º a la corriente

Impedancia

- En resumen:

$$V_R/I_R = Z_R = R$$
$$V_C/I_C = Z_C = 1/j\omega C$$
$$V_L/I_L = Z_L = j\omega L$$

↑

Impedancias!

- La impedancia Z es un concepto que generaliza el concepto de resistencia (también se mide en Ohms)
  - Indica cuánto se opone al flujo de corriente un componente o circuito en régimen sinusoidal permanente

- La admitancia Y es el recíproco de la impedancia (es decir, análogo a la conductancia cuando se habla de resistencia)

Impedancia

- Como vimos hace un tiempo, a baja frecuencia un capacitor se comporta como un circuito abierto (impedancia infinita), mientras que a alta frecuencia se comporta como un corto circuito (impedancia nula). Lo opuesto ocurre en el caso del inductor.

	$\omega \to 0$	$\omega \to \infty$
$Z_C = 1/j\omega C$	∞	0
$Z_L = j\omega L$	0	∞

Impedancia

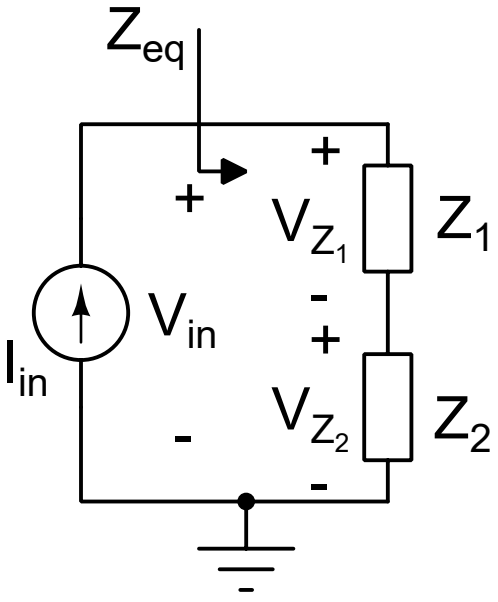
- Al igual que en el caso puramente resistivo, siempre es posible calcular una impedancia o una admitancia equivalente en un circuito lineal.
  - En términos prácticos una impedancia se comporta como un resistor, y todo lo que hemos visto hasta ahora es aplicable (KCL, KVL, nodos, mallas, divisores de voltaje y de corriente, H-T y M-N).

- Para resolver circuitos en el dominio del tiempo hay que resolver ecuaciones diferenciales, en cambio, en el dominio de la frecuencia y en régimen sinusoidal permanente, basta con trabajar con impedancias y resolver como si se tratara de un simple circuito puramente resistivo.
  - Excepto que en vez de utilizar resistencias, utilizamos impedancias

Impedancia

- Impedancias en serie:

$$V_{in} = V_{Z_1} + V_{Z_2} = I_{in}Z_1 + I_{in}Z_2$$



$$\rightarrow Z_{eq} = \frac{V_{in}}{I_{in}} = Z_1 + Z_2$$

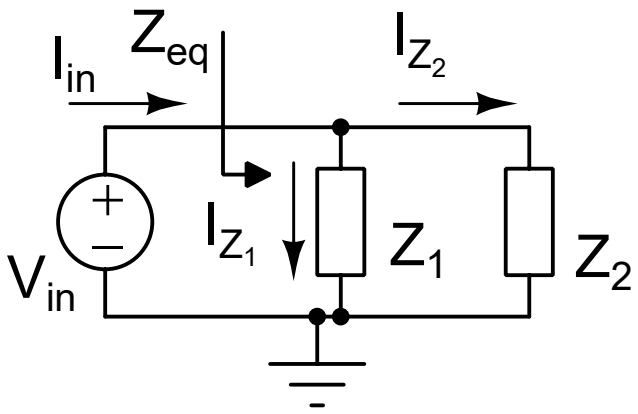
$$\rightarrow Y_{eq} = \frac{I_{in}}{V_{in}} = Y_1 || Y_2 = \frac{Y_1 Y_2}{Y_1 + Y_2}$$

La impedancia equivalente corresponde a la suma de las impedancias! (o equivalentemente, la admitancia equivalente corresponde al paralelo de las admitancias)

Impedancia

- Impedancias en paralelo:

$$I_{in} = I_{Z_1} + I_{Z_2} = \frac{V_{in}}{Z_1} + \frac{V_{in}}{Z_2}$$



$$\rightarrow Y_{eq} = \frac{I_{in}}{V_{in}} = Y_1 + Y_2$$

$$\rightarrow Z_{eq} = \frac{V_{in}}{I_{in}} = Z_1 || Z_2 = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

La impedancia equivalente corresponde al paralelo de las impedancias! (o equivalentemente, la admitancia equivalente corresponde a la suma de las admitancias)

Impedancia

- Algunas definiciones:

Resistencia Reactancia

$$Z = R + jX$$

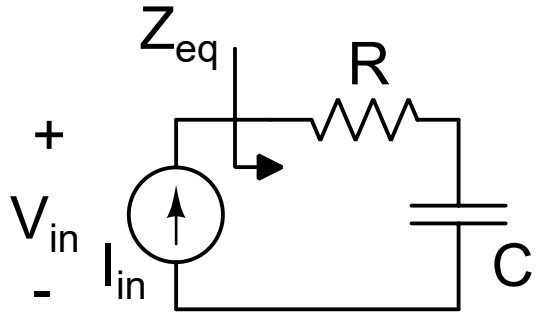
$$Y = \frac{1}{Z} = G + jB$$

Conductancia Susceptancia

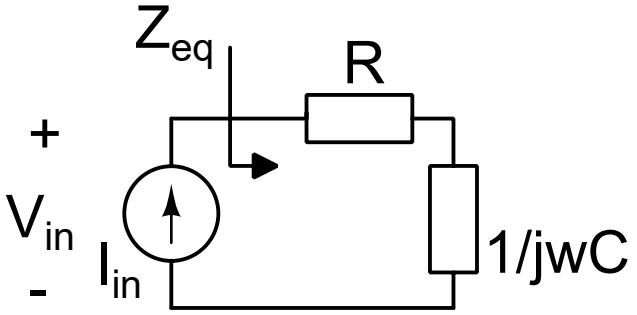
  - X>0: Z es inductiva.
  - X<0: Z es capacitiva.
  - R=0: Z es reactiva pura (capacitiva o inductiva).
  - X=0: Z es resistiva pura.

Impedancia

- **Ejemplo**: Calcular la impedancia equivalente Z_{eq}.



- En el dominio de la frecuencia (y en régimen sinusoidal permanente):



$$V_{in} = I_{in}\left(R + \frac{1}{j\omega C}\right)$$

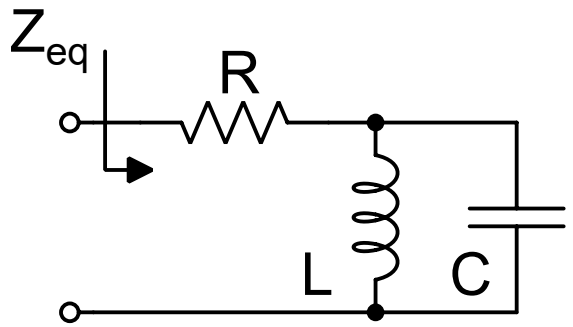
$$\rightarrow Z_{eq} = \frac{V_{in}}{I_{in}} = R + \frac{1}{j\omega C}$$

$$R_{eq} = R \qquad X_{eq} = -\frac{1}{\omega C}$$

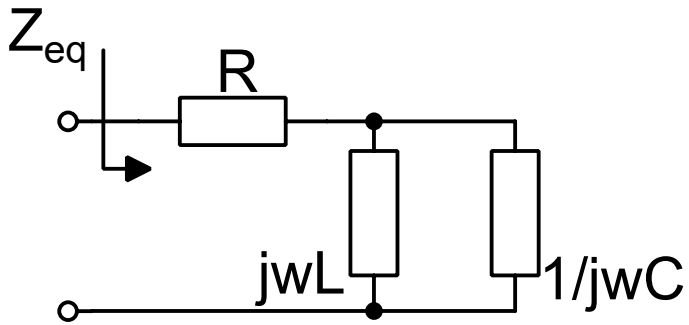
Fin ej.

Impedancia

- **Ejemplo**: Calcular la impedancia equivalente pedida en términos de magnitud y fase.



- En el dominio de la frecuencia (y en régimen sinusoidal permanente):

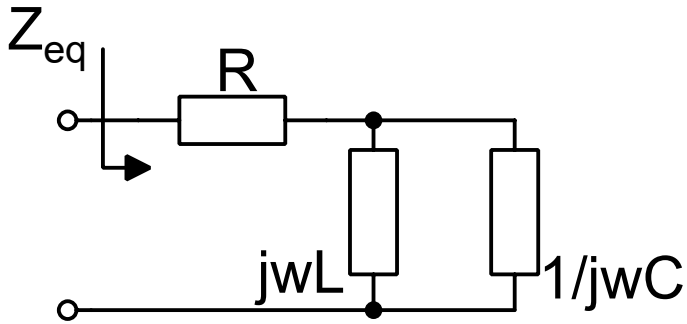


Impedancia

- Por lo tanto:

$$Z_{eq} = R + j\omega L || \frac{1}{j\omega C}$$

$$Z_{eq} = R + j\frac{\omega L}{1-\omega^2 LC}$$

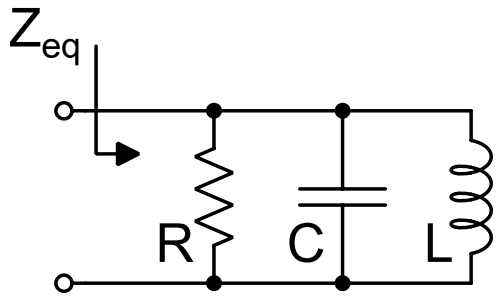


$$\rightarrow Z_{eq} = \sqrt{R^2 + \left(\frac{\omega L}{1-\omega^2 LC}\right)^2} \angle \tan^{-1}\left(\frac{1}{R}\frac{\omega L}{1-\omega^2 LC}\right)$$

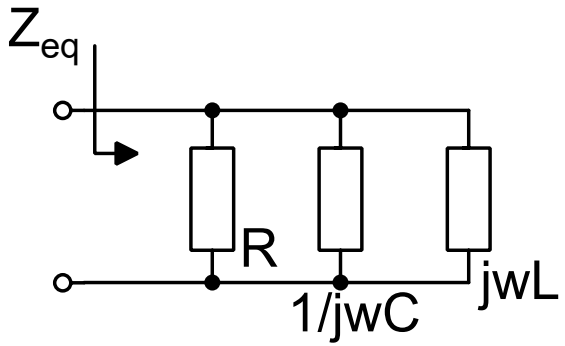
Fin ej.

Impedancia

- **Ejemplo**: Calcular la frecuencia a la cual Z_{eq} es puramente real.



- En el dominio de la frecuencia (y en régimen sinusoidal permanente):



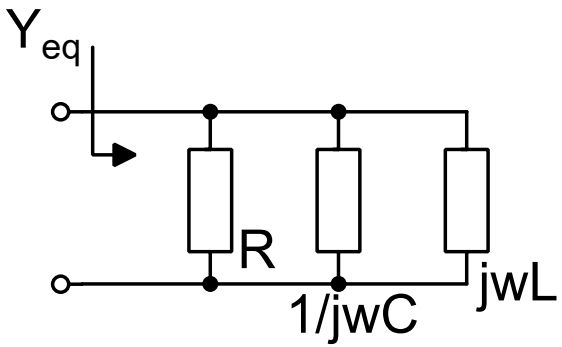
Impedancia

- Este ejemplo es mucho más simple en términos de admitancias. Si hacemos que Y_{eq} sea puramente resistiva, Z_{eq} también lo será.

$$Y_{eq} = \frac{1}{R} + j\omega C + \frac{1}{j\omega L}$$

$$\rightarrow Y_{eq} = \frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$$

G_{eq} B_{eq}



$$B_{eq}(\omega) = 0 \rightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \leftarrow$$

Es la frecuencia natural del circuito (ω_0)!

Fin ej.

Impedancia

- A continuación reforzaremos lo recién visto estudiando este tema desde sus fundamentos. El procedimiento que seguiremos a continuación se estructura como sigue:

  - Veremos que una señal se puede expresar en distintas bases, en particular en el dominio del tiempo (como lo hacemos normalmente) y en el *dominio de la frecuencia* (esto es un concepto extremadamente importante en Ingeniería Eléctrica).

  - Luego veremos que derivar con respecto al tiempo equivale a multiplicar por un escalar en el dominio de la frecuencia.

  - Concluiremos que es mucho más conveniente trabajar en el dominio de la frecuencia. Este dominio permite tratar capacitores e inductores como impedancias, las que se manejan igual que un resistor en términos algebraicos.

Impedancia

- Partiremos por el siguiente concepto crucial: es posible expresar cualquier función de *energía finita* f(t) como la suma ponderada de infinitas bases en el dominio de la frecuencia (*Transformada de Fourier*):

Representación de f(t) en el dominio de la frecuencia ω=2πf

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}\mathrm{d}\omega$$

"Sumatoria" infinita (infinitas bases)

Bases sinusoidales complejas (fórmula de Euler)

$$e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j\sin(\omega t)$$

Impedancia

- Antes de seguir entendamos bien qué es esto de expresar una función en otra base. Por ejemplo, un vector puede ser escrito en bases distintas:

Base 1

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 7\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} = \left(\frac{2+5\sqrt{3}}{2}\right)\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{bmatrix} + \left(\frac{5-2\sqrt{3}}{2}\right)\begin{bmatrix} \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} + 7\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Base 2

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{2+5\sqrt{3}}{2} \\ \frac{5-2\sqrt{3}}{2} \\ 7 \end{bmatrix}$$

Representación de un mismo vector en bases distintas

Impedancia

- La idea de la transformada de Fourier es la misma, pero en vez de tres dimensiones (→ tres bases ortonormales) tenemos infinitas dimensiones (→ infinitas bases ortonormales), donde cada base es una sinusoide compleja.

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}\mathrm{d}t$$

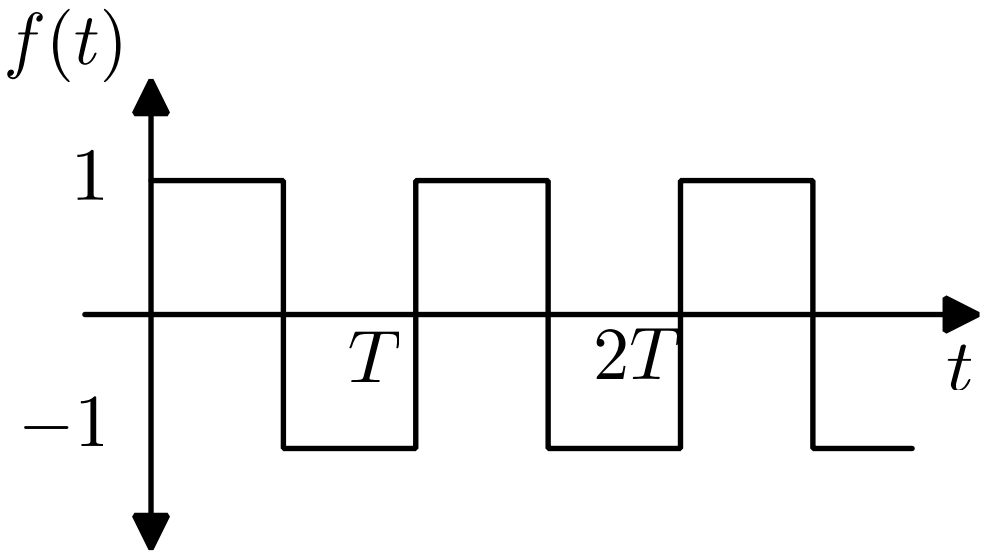
$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}\mathrm{d}\omega$$

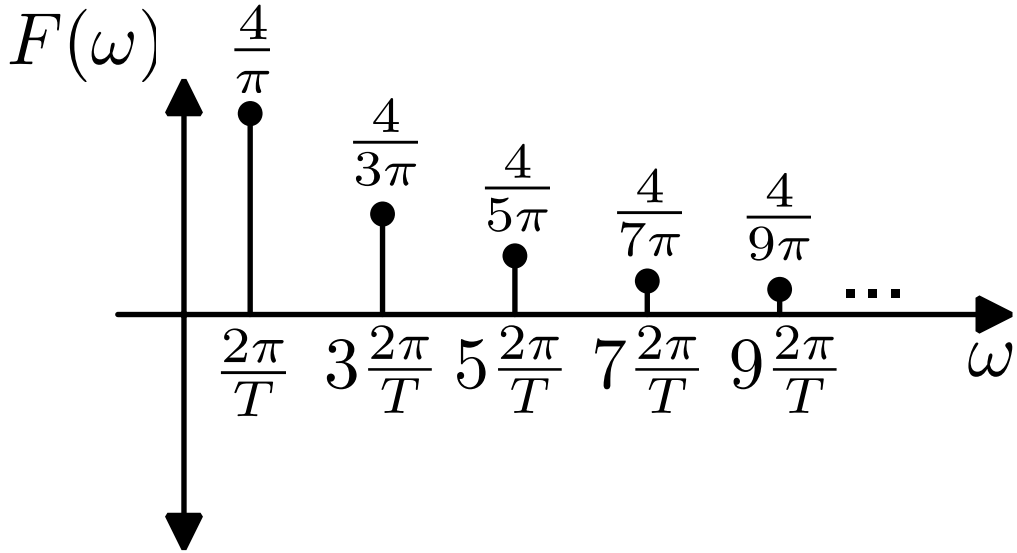
Señal de energía finita (i.e. f(t) está en L_1):

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\mathrm{d}t < \infty$$

Impedancia

- **Ejemplo**:

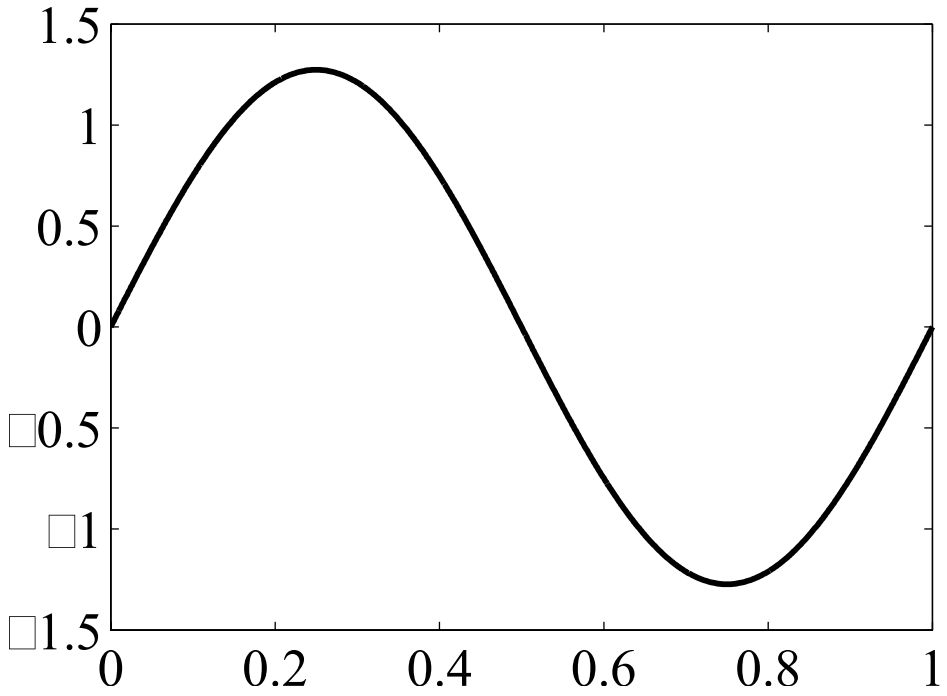


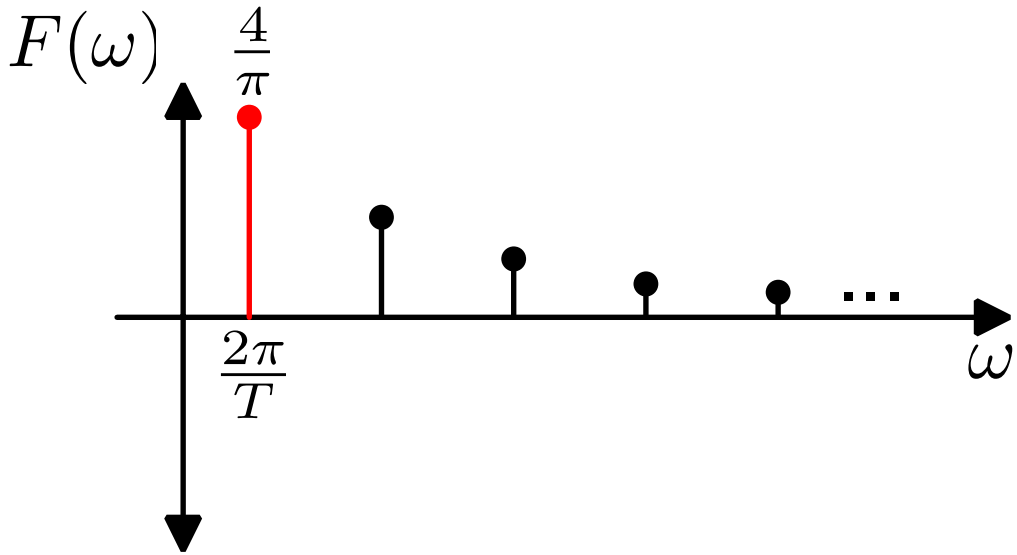


$$f(t) = \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{4}{n\pi} \sin\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)$$

Impedancia

- T = 1s:

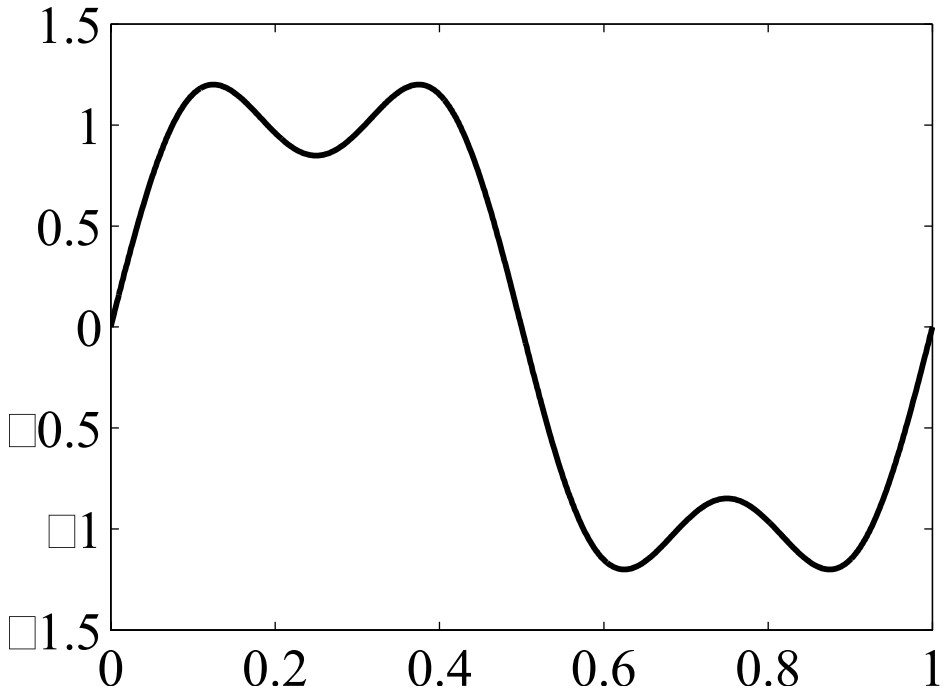


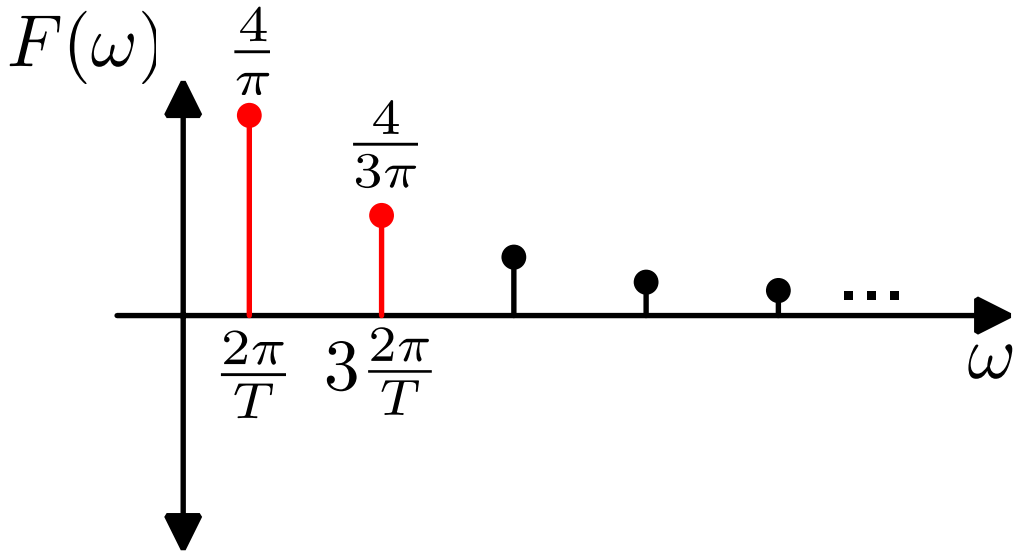


$$f(t) = \frac{4}{\pi}\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

Impedancia

- T = 1s:

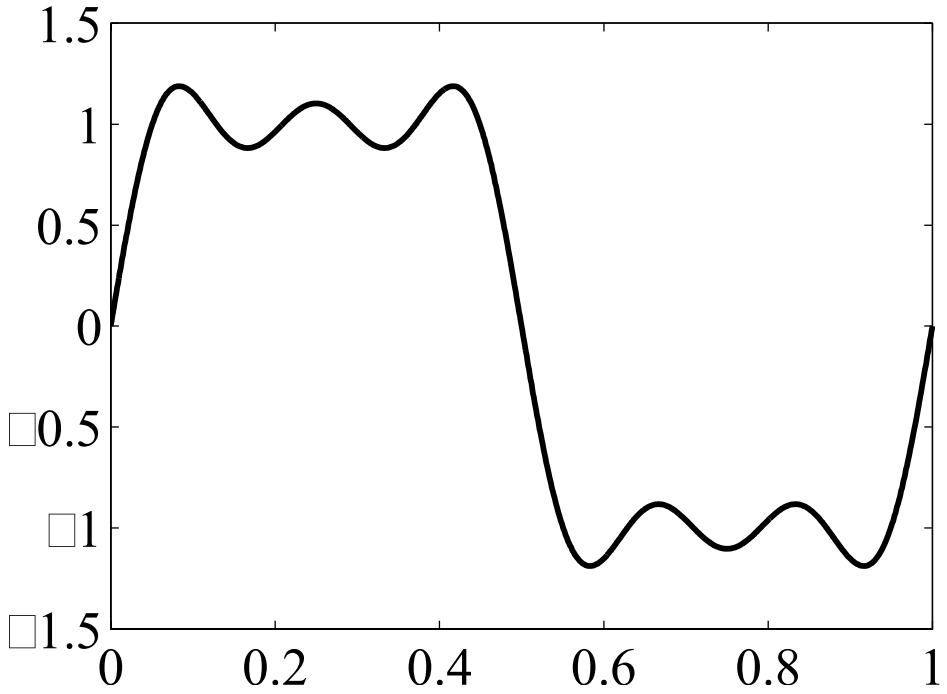


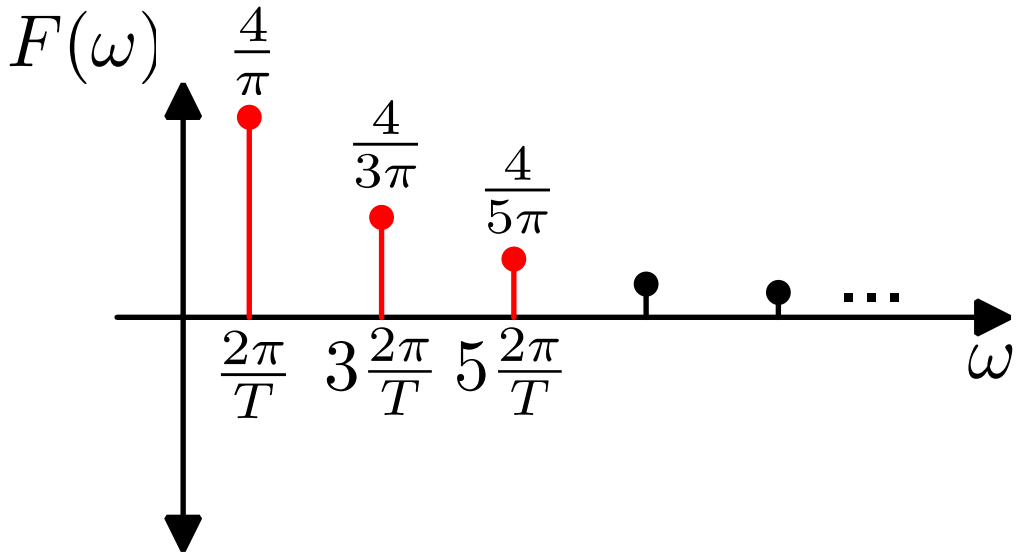


$$f(t) = \frac{4}{\pi}\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) + \frac{4}{3\pi}\sin\left(3\frac{2\pi}{T}t\right)$$

Impedancia

- T = 1s:

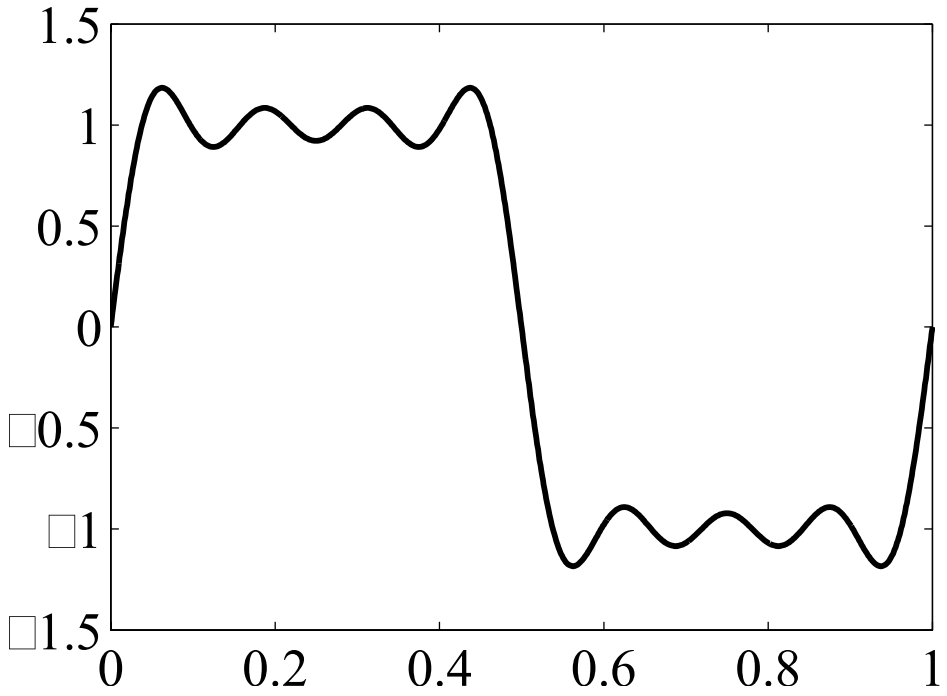


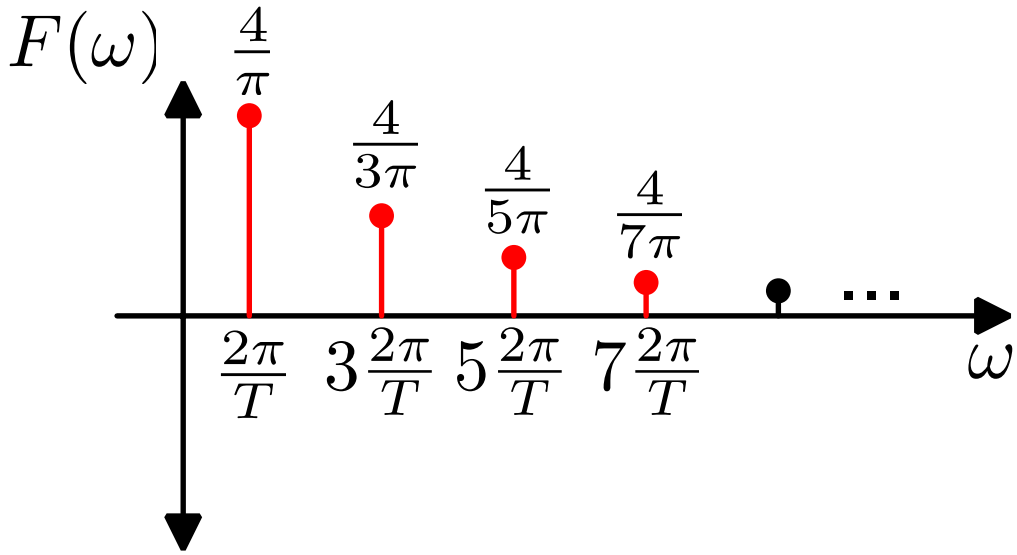


$$f(t) = \frac{4}{\pi}\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) + \frac{4}{3\pi}\sin\left(3\frac{2\pi}{T}t\right) + \frac{4}{5\pi}\sin\left(5\frac{2\pi}{T}t\right)$$

Impedancia

- T = 1s:

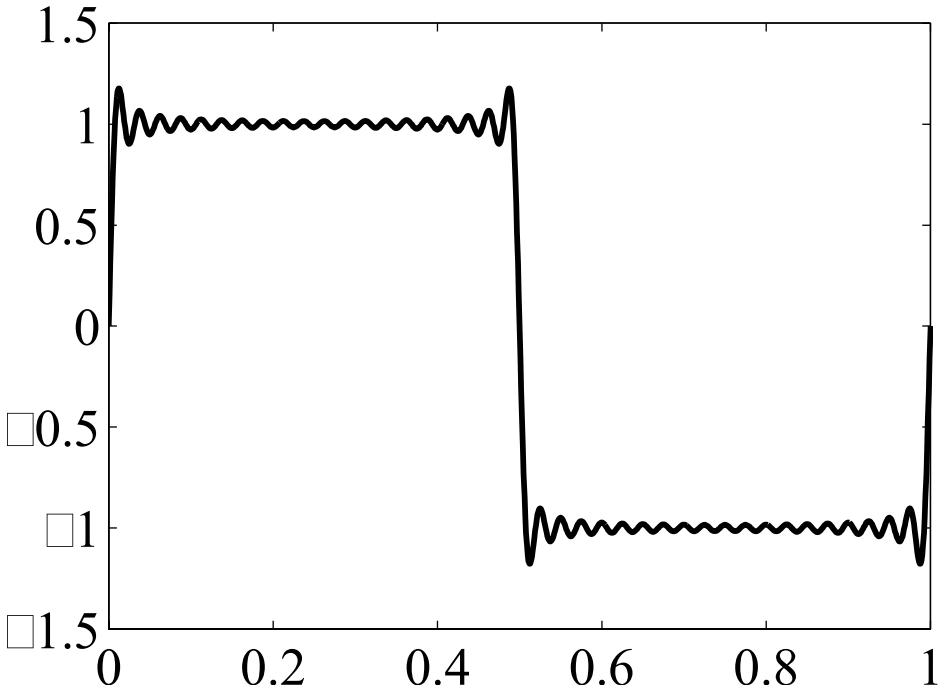


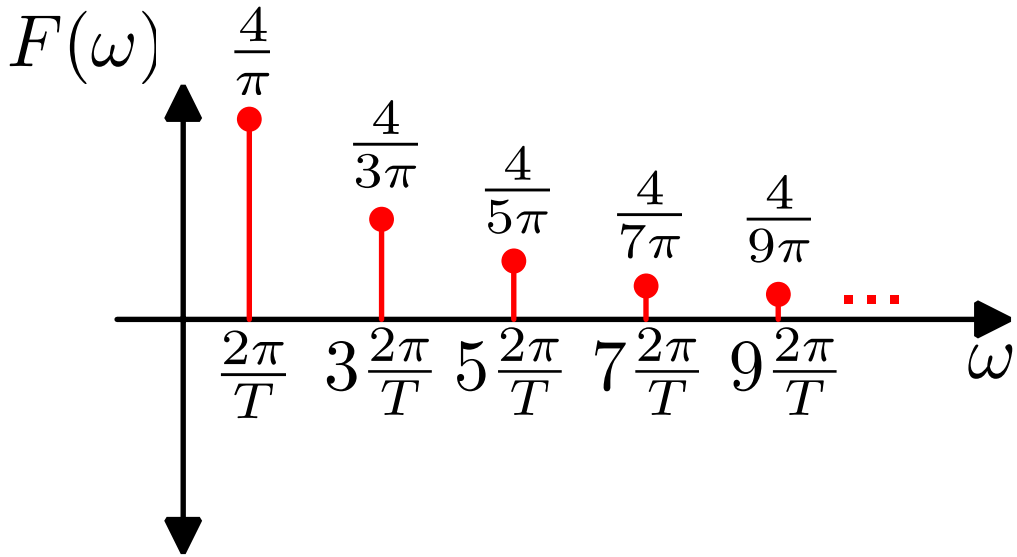


$$f(t) = \frac{4}{\pi}\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) + \frac{4}{3\pi}\sin\left(3\frac{2\pi}{T}t\right) + \frac{4}{5\pi}\sin\left(5\frac{2\pi}{T}t\right) + \frac{4}{7\pi}\sin\left(7\frac{2\pi}{T}t\right)$$

Impedancia

- T = 1s:





$$f(t) = \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{39} \frac{4}{n\pi} \sin\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)$$

Fin ej.

Impedancia

- Veamos qué ocurre en el dominio de la frecuencia al derivar f(t) con respecto a t:

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}\mathrm{d}\omega \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{j\omega t}\mathrm{d}\omega \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} j\omega F(\omega)e^{j\omega t}\mathrm{d}\omega
\end{aligned}
$$

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t) \longleftrightarrow j\omega F(\omega)
$$

Derivar f(t) c/r a t equivale a multiplicar por jω la representación en el dominio de la frecuencia de f(t)!

Impedancia

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(t) \longleftrightarrow j\omega F(\omega)$$

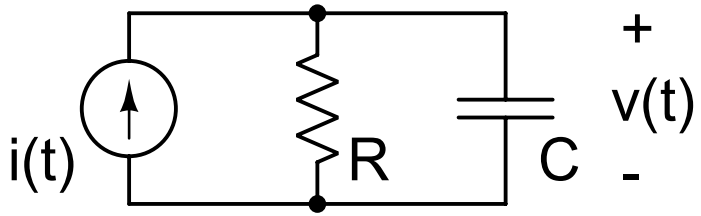
- Esto es exactamente lo mismo a lo que llegamos antes cuando dedujimos las expresiones de las impedancias del capacitor y el inductor!
  - Ahora sólo lo hicimos de una manera más formal.

$$i_C(t) = C\frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t} \quad \rightarrow \quad I_C = j\omega C V_C$$

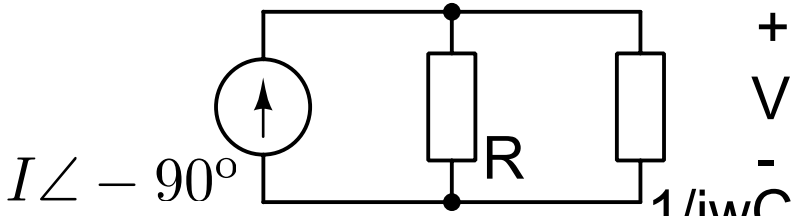
$$v_L(t) = L\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t} \quad \rightarrow \quad V_L = j\omega L I_L$$

Impedancia

- **Ejemplo**: Calcular v(t) en régimen permanente con i(t) = I•sin(ωt).



- Tenemos:



$$V = IZ_{eq}$$

$$V = -jI\left(R||\frac{1}{j\omega C}\right)$$

$$\rightarrow V = -\frac{IR}{1+(\omega RC)^2}(\omega RC + j)$$

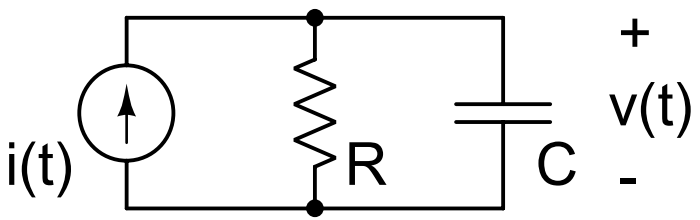
$$V = \frac{IR}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}\angle \tan^{-1}\left(\frac{1}{\omega RC}\right)$$

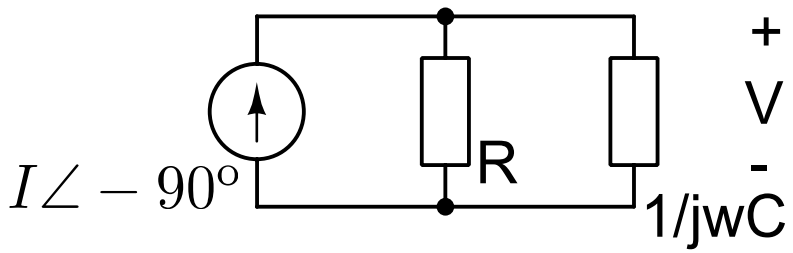
Impedancia

$$V = \frac{IR}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}} \angle \tan^{-1}\left(\frac{1}{\omega RC}\right)$$

- Por lo tanto:

$$v(t) = \frac{IR}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}} \cos\left(\omega t + \tan^{-1}\left(\frac{1}{\omega RC}\right)\right)$$

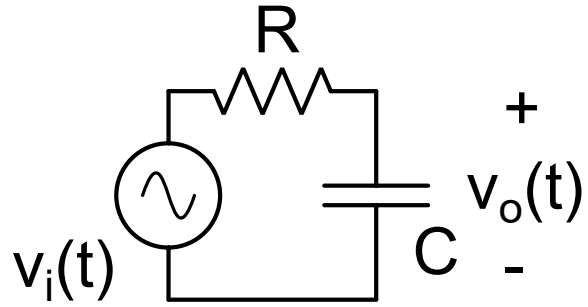




Fin ej.

Impedancia

- **Ejemplo**: Calcular $v_o(t)$ en función de $v_i(t)$ para distintas frecuencias de entrada.



- Por divisor de voltaje:

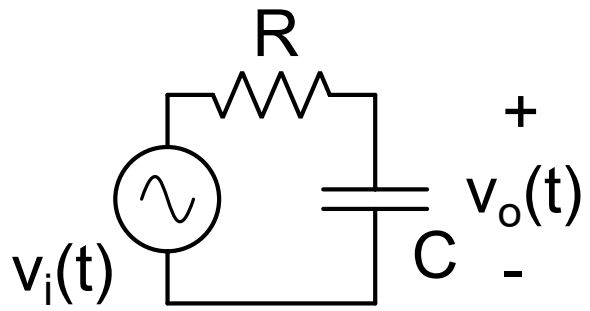
$$V_o = \frac{1}{1+j\omega RC} V_i$$

$$\rightarrow V_o = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}} \angle -\tan^{-1}(\omega RC) \cdot V_i$$

Impedancia

- Analicemos un poco más este resultado:

$$V_o = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}} \angle -\tan^{-1}(\omega RC) \cdot V_i$$



Para ω pequeño tiende a 1, mientras que para ω grande tiende a 0

→ Deja pasar bajas frecuencias y atenúa las altas frecuencias

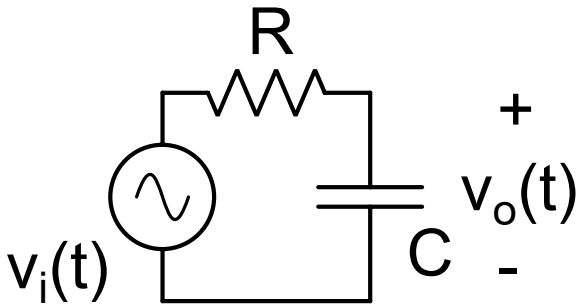
Para ω pequeño tiende a 0º, mientras que para ω grande tiende a -90º

- Esto tiene sentido desde varios puntos de vista:
  - ω = 0: el capacitor se comporta como circuito abierto (impedancia muy alta), por lo tanto no hay corriente y los voltajes de entrada y salida son iguales.
  - ω = ∞: el capacitor se comporta como corto circuito (impedancia muy baja) y la diferencia de potencial en sus bornes es despreciable.

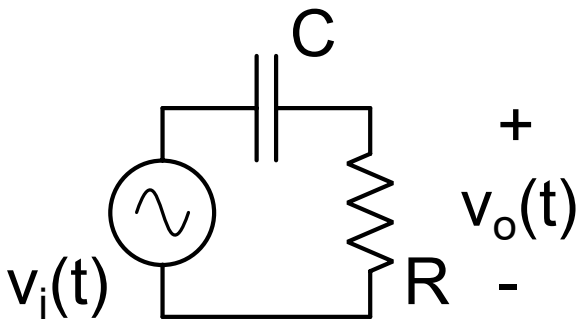
Impedancia

- Este circuito de hecho corresponde a un filtro pasivo pasa-bajos. Este filtro, así como otros tantos filtros simples, son fundamentales.
  - ¿Cómo se comportaría el circuito al intercambiar R por C?

$$V_o = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}} \angle -\tan^{-1}(\omega RC) \cdot V_i$$



$$V_o = ¿? \cdot V_i$$



Fin ej.