Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Eléctrica
IEE2123 - Circuitos Eléctricos// 1-2016

Tarea 3

Circuitos 1º y 2º orden. Impedancias y fasores

Profesor: Dani Guzmán

1. Instrucciones

(a) Esta tarea puede ser entregada tanto en formato digital (PDF) como hecha a mano, según lo decida el alumno.

(b) Su desarrollo debe ser claro y debidamente explicado. Resultados «mágicos» o sin razón no otorgarán puntaje.

(c) En los problemas que se requiera graficar, el alumno es libre de utilizar cualquier software disponible (`matlab`, `scilab`, `octave`, `excel`, etc.). Es imperante que todos sus gráficos estén correctamente referenciados (o con título). Los ejes deben estar cada uno con la variable a representar y sus unidades. Obviamente los gráficos deben ser claros (que se puedan distinguir todas las formas de onda).

2. Problemas

Problema 1

Considere el siguiente circuito RC:

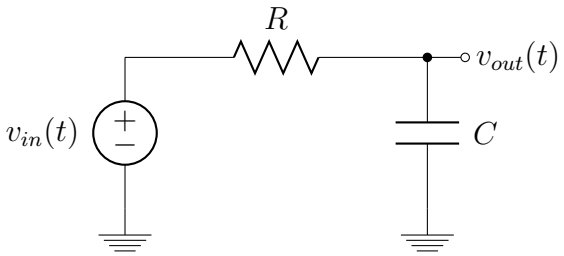


Figura 1: Circuito RC

(a) Determine la ecuación diferencial para encontrar el voltaje de salida $v_{out}(t)$.

(b) Suponga que $C = 100nF$ y $v_{in}(t) = u(t)$. Determine R de tal manera que $v_{out}(t)$ alcance el 80 % de su valor final en $t = 200\mu s$. Considere el capacitor inicialmente descargado.

(c) Suponga que cuelga del nodo de salida a tierra una resistencia R_1 (en paralelo a C). Explique cómo varía la constante de tiempo del circuito cuando $R_1 >> R$, $R_1 \approx R$ y $R_1 << R$.

Solución:

(a) Se tiene que la corriente que pasa por la resistencia R es la misma corriente que pasa por C. Haciendo la malla, se tiene:

$$i_C(t) \cdot R + v_{out}(t) = v_{in}(t) \tag{2.1}$$

$$RC \cdot \frac{d}{dt} v_{out}(t) + v_{out}(t) = v_{in}(t) \tag{2.2}$$

$$\frac{d}{dt} v_{out}(t) + \frac{v_{out}(t)}{RC} = \frac{v_{in}(t)}{RC} \tag{2.3}$$

(b) Frente a un escalón unitario de entrada, se tiene que la ecuación diferencial a resolver es:

$$\frac{d}{dt} v_{out}(t) + \frac{v_{out}(t)}{RC} = \frac{1}{RC} \tag{2.4}$$

para todo $t \geq 0$. La solución homogénea es de la forma:

$$v_{out}^h(t) = Ke^{-t/\tau} \tag{2.5}$$

en donde $\tau = RC$ es la constante de tiempo del circuito RC. La solución particular es de la forma $v_{out}^p(t) = A$ en donde A es una constante. Reemplazando en la EDO, se obtiene:

$$v_{out}^p(t) = 1 \tag{2.6}$$

por lo tanto la solución general es:

$$v_{out}(t) = 1 + Ke^{-t/\tau} \tag{2.7}$$

utilizando la condición inicial $v_{out}(0) = 0V$, se obtiene que $K = -1$, por lo tanto la forma de onda del voltaje de salida es:

$$v_{out}(t) = 1 - e^{-t/\tau} \tag{2.8}$$

Dado $C = 100nF$, se busca R, tal que $v_{out}(200\mu s) = 0.8$. Resolviendo la ecuación se obtiene:

$$R \approx 1.24k\Omega \tag{2.9}$$

(c) En este caso, se tiene que la ecuación diferencial para $v_{out}(t)$ está dada por:

$$(R \mid\mid R_1)C \cdot \frac{d}{dt} v_{out}(t) + v_{out}(t) = \frac{R_1}{R_1 + R} \cdot v_{in}(t) \tag{2.10}$$

Por lo tanto, la nueva constante de tiempo vale:

$$\tau = (R \parallel R_1)C \tag{2.11}$$

Analicemos para los 3 casos:

- Si es que $R_1 >> R$, entonces $(R \parallel R_1) \approx R$, por ende el resultado es el mismo que el calculado en (a).
- Si $R_1 \approx R$, entonces $(R \parallel R_1) \approx R/2$, por lo tanto la constante de tiempo disminuye a la mitad (se carga el doble más rápido), sin embargo notemos a la derecha que $v_{in}(t)$ está multiplicado por el divisor resisitivo entre R_1 y R, por lo tanto alcanza la mitad del valor final alcanzado en (a).
- Si $R_1 << R$, se tiene que la constante de tiempo está determinada principalmente por R_1, ya que $\tau \approx R_1 C$, sin embargo el divisor resistivo atenúa prácticamente toda la señal ya que:

$$\frac{R_1}{R_1 + R} \approx 0 \tag{2.12}$$

Otra forma de ver esto es que si R_1 es muy pequeño y se conecta en paralelo a C, se crea un camino de muy baja impedancia a tierra, bajando el voltaje cercanamente a $0V$.

Problema 2

Considere el mismo circuito del problema anterior. Suponga que $v_{in}(t)$ es una onda cuadrada de período T. Grafique $v_{in}(t)$ y $v_{out}(t)$ para $\tau_1 = T/4$, $\tau_2 = T/8$ y $\tau_3 = T/16$. Su gráfico debe estar normalizado en amplitud y normalizado en el tiempo con respecto a T.

Solución:

Para conseguir los gráficos, se simuló el siguiente esquemático en LTspice:

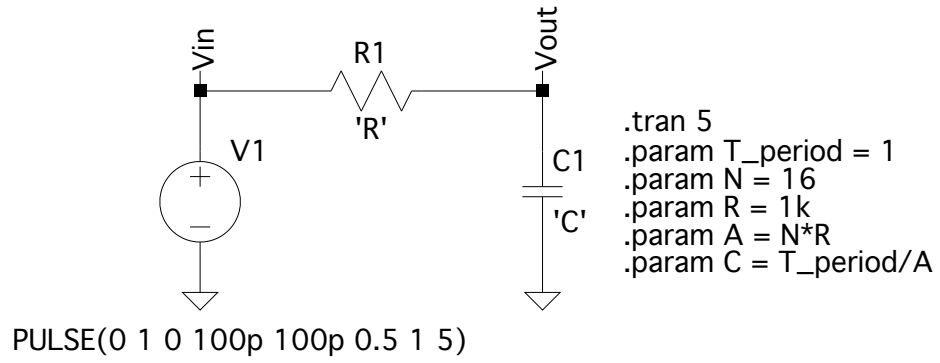
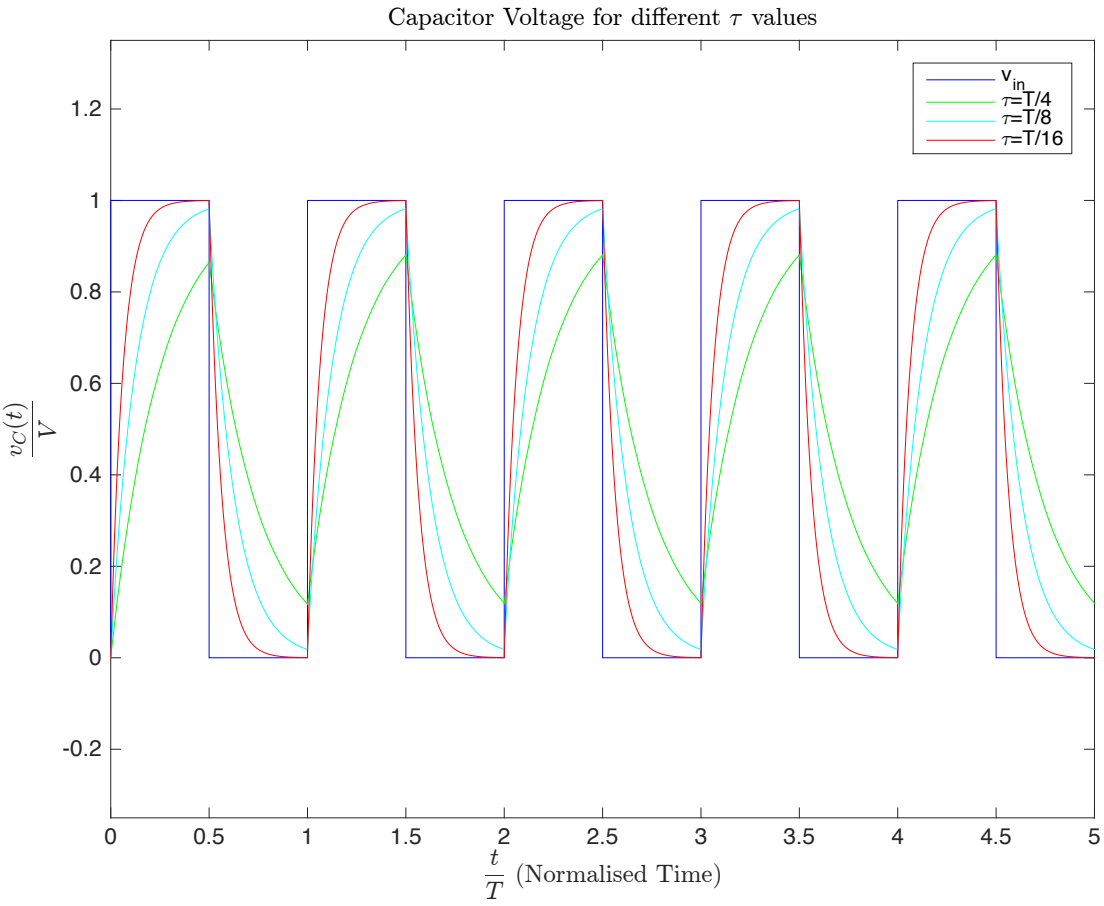


Figura 2: Circuito RC simulado en LTspice

Se simuló para $N = 4, 8$ y 16 y luego se exportaron los datos de la simulación en archivos `.txt` y se graficaron en `MATLAB`, obteniendo:



Problema 3

Utilizando el mismo circuito del problema 1, con $R = 1k\Omega$ y $C = 1\mu F$, determine el voltaje de salida $v_{out}(t)$ para las siguientes señales de entrada:

(a) $v_{in}(t) = 5\sin(2\pi 160t)$

(b) $v_{in}(t) = 5\sin(2\pi 10^4 t)$

(c) $v_{in}(t) = 1 - e^{-t/(RC)}$

Grafique cada uno de sus resultados y analice qué pasa con la amplitud de $v_{out}(t)$ frente a una entrada sinusoidal a medida que aumenta la frecuencia de esta. Considere el capacitor inicialmente descargado.

Solución:

Recordemos que la ecuación diferencial para $v_{out}(t)$ dado $v_{in}(t)$ del circuito es:

$$\frac{d}{dt}v_{out}(t) + \frac{v_{out}(t)}{RC} = \frac{v_{in}(t)}{RC} \tag{2.13}$$

la solución homogénea está dada por:

$$v_{out}^h(t) = Ke^{-t/\tau} \tag{2.14}$$

con $\tau = RC = 0.001$ $[s]$. Para encontrar la solución particular a una entrada $v_{in}(t) = A\sin(\omega t)$, suponemos una solución sinusoidal de la forma $v_c(t) = \alpha\sin(\omega t) + \beta\cos(\omega t)$. Introduciendo esta solución en la ecuación diferencial tenemos:

$$\underbrace{\omega\alpha\cos(\omega t) - \omega\beta\sin(\omega t)}_{\frac{d}{dt}v_c(t)} + \underbrace{\frac{\alpha}{RC}\sin(\omega t) + \frac{\beta}{RC}\cos(\omega t)}_{\frac{v_c(t)}{RC}} = \frac{A}{RC}\sin(\omega t) \tag{2.15}$$

en donde obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\omega\alpha + \frac{\beta}{RC} = 0 \tag{2.16}$$

$$\frac{\alpha}{RC} - \omega\beta = \frac{A}{RC} \tag{2.17}$$

resolviendo el sistema se obtienen las siguientes soluciones:

$$\alpha = \frac{A}{1+\omega^2R^2C^2} \tag{2.18}$$

$$\beta = -\frac{\omega RC}{1+\omega^2R^2C^2}A \tag{2.19}$$

Por lo tanto, la solución particular está dada por:

$$\begin{aligned} v_c^p(t) &= \alpha\sin(\omega t) + \beta\cos(\omega t) \\ &= A\cdot\left(\frac{1}{1+\omega^2R^2C^2}\sin(\omega t) - \frac{\omega RC}{1+\omega^2R^2C^2}\cos(\omega t)\right) \end{aligned} \tag{2.20}$$

Recordando la identidad trigonométrica de combinación lineal de sinusoides, la cual es:

$$a\sin(\theta) + b\cos(\theta) = \sqrt{a^2+b^2}\sin\left(\theta + \arctan\frac{b}{a}\right) \tag{2.21}$$

utlizando la relación anterior en la solución particular:

$$v_c^p(t) = \frac{A}{\sqrt{1+\omega^2R^2C^2}}\sin(\omega t - \arctan(\omega RC)) \tag{2.22}$$

Ahora veamos las soluciones particulares para cada caso:

(a) En este caso $\omega = 2\pi\cdot 160$ y $A = 5$. La solución general está dada por:

$$v_c(t) = Ke^{-1000t} + 2.49\sin(2\pi\cdot 160t - 45.15^\circ) \tag{2.23}$$

reemplazando la condición inicial $v_c(0) = 0$, se obtiene $K = 1.76$, por lo tanto:

$$v_c(t) = 1.76e^{-1000t} + 2.49\sin(2\pi\cdot 160t - 45.15^\circ) \tag{2.24}$$

graficando la señal se obtiene:

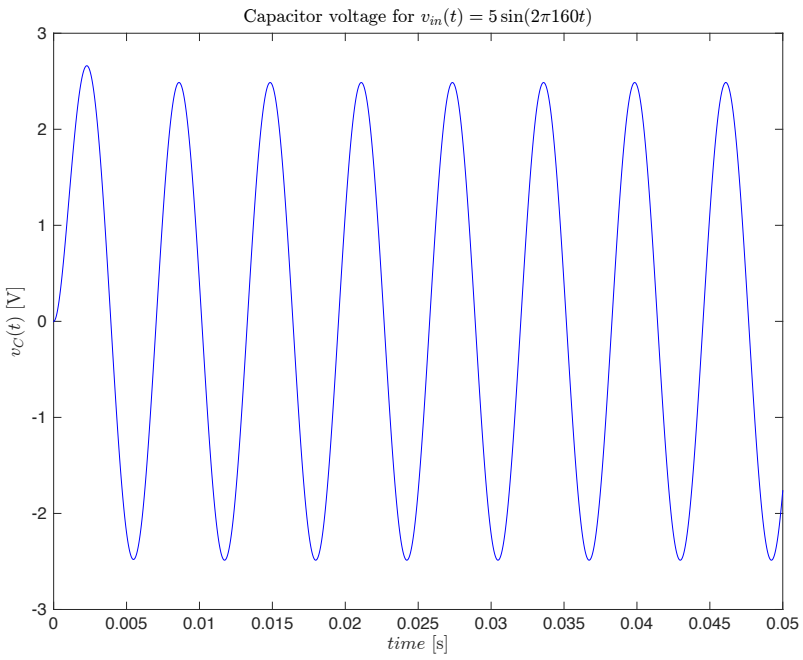


Figura 3: Voltaje en el capacitor para $v_{in} = 5\sin(2\pi 160t)$

(b) Procediendo de manera igual a la anterior, se obtiene para $v_{in}(t) = 5\sin(2\pi 10^4 t)$:

$$v_c(t) = 1.3 \cdot 10^{-3} \cdot \left[e^{-1000t} + \sin(2\pi 10^4 t - 89.1°)\right] \tag{2.25}$$

graficando:

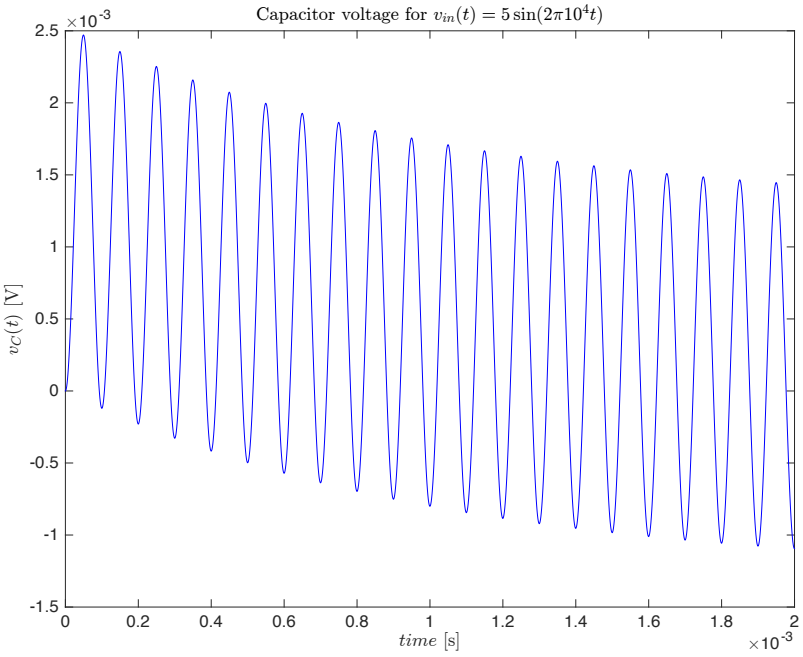


Figura 4: Voltaje en el capacitor para $v_{in} = 5\sin(2\pi 10^4 t)$

(c) Dada una señal de entrada de $v_{in}(t) = 1 - e^{-t/(RC)} = 1 - e^{-1000t}$, asumimos una solución particular de la forma:

$$v_c^p(t) = A + Bte^{-1000t} \tag{2.26}$$

(Se introduce t ya que la transformada de Laplace de v_{in} contiene el término $(s + 1000)$ el cual ya está contenido en el polinomio característico de la edo, por ende tiene multiplicidad 2). Ahora introduciendo esta expresión en la ecuación diferencial:

$$B \cdot \left[e^{-1000t} - 1000te^{-1000t}\right] + 1000A + 1000Bte^{-1000t} = 1000 - 1000e^{-1000t} \tag{2.27}$$

en donde se obtiene $A = 1$ y $B = -1$, por lo tanto:

$$v_c(t) = Ke^{-1000t} + \left(1 - te^{-1000t}\right) \tag{2.28}$$

aplicando la condición inicial $v_c(0) = 0$, se obtiene $K = -1$, por lo tanto:

$$v_c(t) = 1 - (1 + t) \cdot e^{-1000t} \tag{2.29}$$

graficando:

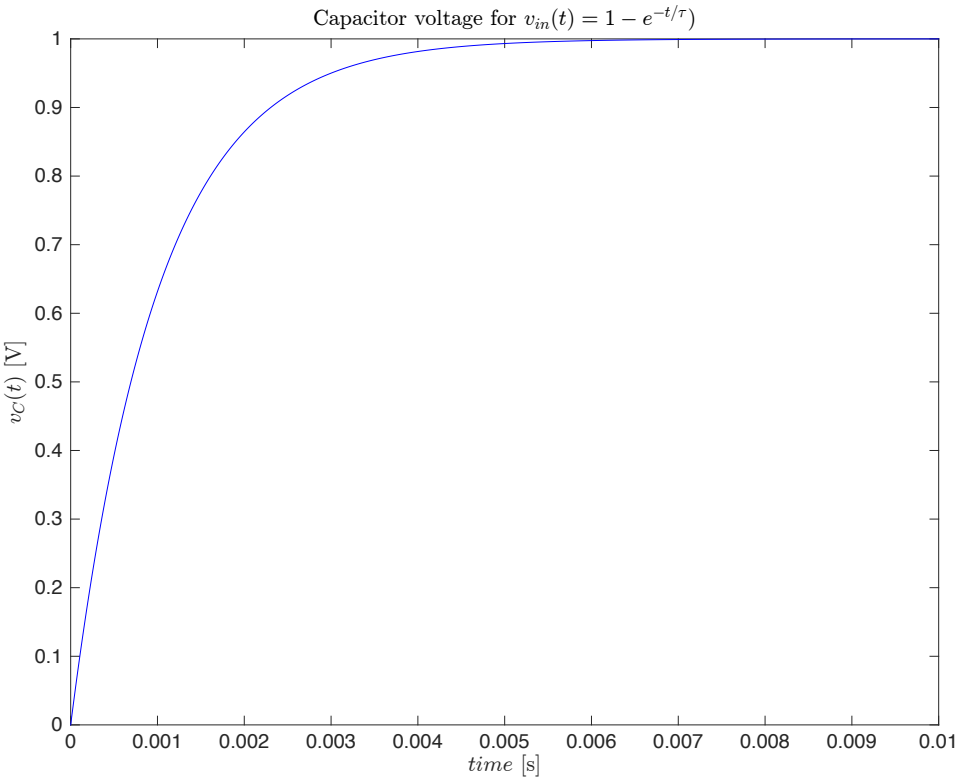


Figura 5: Voltaje en el capacitor para $v_{in} = 1 - e^{-t/\tau}$

Problema 4

Considere el circuito de la figura 6, con $V_1 = A \cdot u(t)$ e $I_1 = B \cdot u(t)$, donde $u(t)$ es la función escalón. El capacitor C_1 inicialmente se encuentra descargado. Determine el voltaje y corriente en el capacitor C_1 para todo $t \geq 0$.

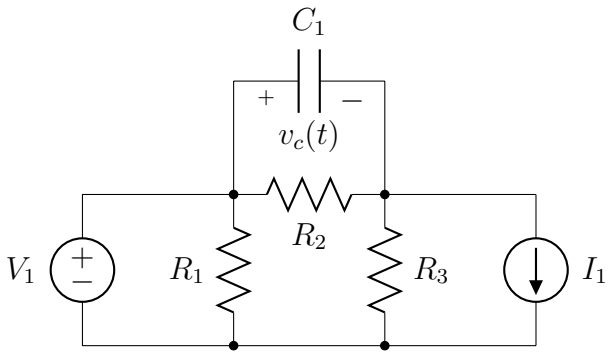


Figura 6: Circuito de primer orden

Solución:

Se reducirá el circuito a su equivalente Thévenin visto en el puerto donde está R_2. El circuito equivalente es:

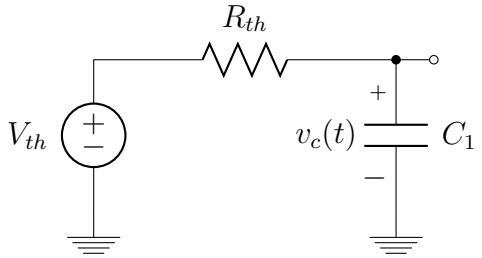


Figura 7: Circuito RC equivalente Thévenin

en donde:

$$R_{th} = (R_2 \mid\mid R_3) \tag{2.30}$$

$$V_{th} = \frac{R_2}{R_2 + R_3} \cdot V_1 + I_1 \cdot (R_2 \mid\mid R_3) \tag{2.31}$$

Por lo tanto la ecuación diferencia a resolver para $v_c(t)$ para todo $t \geq 0$ es:

$$\frac{d}{dt} v_c(t) + \frac{v_c(t)}{(R_2 \mid\mid R_3) C_1} = \frac{A}{R_3 C_1} + \frac{B}{C_1} \tag{2.32}$$

Por lo tanto, las soluciones homogénea y particular están dadas por:

$$v_c^h(t) = Ke^{-t/\tau} \tag{2.33}$$

$$v_c^p(t) = A \cdot \frac{R_2}{R_2 + R_3} + B \cdot (R_2 \mid\mid R_3) \tag{2.34}$$

con $\tau = R_{th}C_1 = (R_2 \mid\mid R_3)C_1$. Aplicando la condición inicial $v_c(0) = 0$, se obtiene que

$$K = -A \cdot \frac{R_2}{R_2 + R_3} + B \cdot (R_2 \mid\mid R_3) \tag{2.35}$$

Finalmente, el voltaje en el capacitor C_1 para todo $t \geq 0$ está dado por:

$$v_c(t) = \left[A \cdot \frac{R_2}{R_2 + R_3} + B \cdot (R_2 \mid\mid R_3) \right] \cdot (1 - e^{-t/\tau}) \tag{2.36}$$

y por ende la corriente en el capacitor está dada por:

$$i_c(t) = C_1 \cdot v_c'(t) = \left[\frac{A}{R_3} + B \right] \cdot e^{-t/\tau} \tag{2.37}$$

Problema 5

Considere el circuito de la figura 8. Encuentre el voltaje y la corriente en el capacitor, considerando que el voltaje de la fuente V_1 es $v_1(t) = 5e^{-0.01t}u(t)$, y la corriente de la fuente I_1 es $i_1(t) = 0.02u(t-5)$, donde $u(t)$ es la función escalón. Considere que en $t = 0$ el capacitor se encuentra descargado.

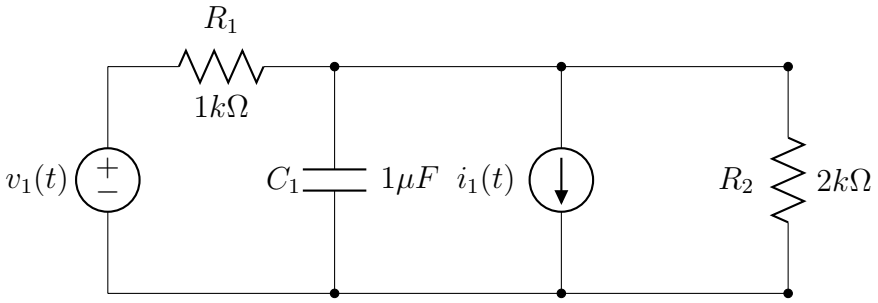
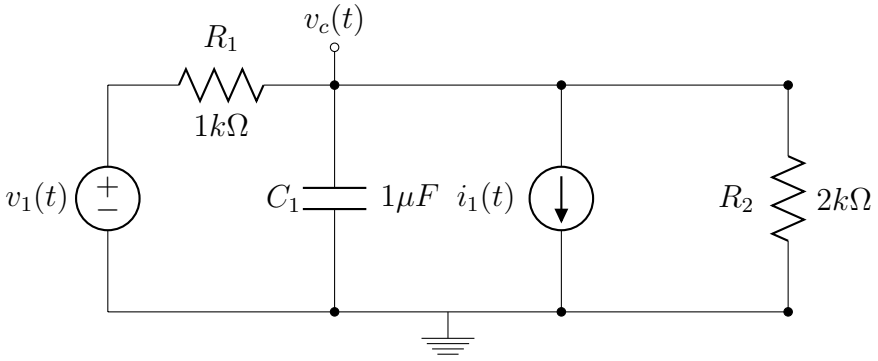


Figura 8: Circuito de primer orden

Solución:

Fijemos tierra en el nodo inferior (por conveniencia) y llamemos $v_c(t)$ al voltaje en el nodo superior del capacitor C_1, tal como muestra el siguiente circuito:



Utilizando Ley de nodos en este nodo se tiene:

$$\frac{v_1(t) - v_c(t)}{R_1} = C \cdot \frac{d}{dt}v_c(t) + i_1(t) + \frac{v_c(t)}{R_2} \tag{2.38}$$

Reordenando la ecuación diferencial, se obtiene:

$$\frac{d}{dt}v_c(t) + \frac{v_c(t)}{C_1} \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = \frac{v_1(t)}{R_1 C_1} - \frac{i_1(t)}{C_1} \tag{2.39}$$

ahora introduciendo los valores, obtenemos la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d}{dt}v_c(t) + 1500 \cdot v_c(t) = 5000 \cdot e^{-0.01t}u(t) - 20000 \cdot u(t-5) \tag{2.40}$$

1º forma de solución: primero separaremos el circuito en dos etapas

- $0s \leq t < 5s$: para este caso, se tiene que la ecuación diferencial a resolver es:

$$\frac{d}{dt}v_c(t) + 1500 \cdot v_c(t) = 5000 \cdot e^{-0.01t} \tag{2.41}$$

en donde las soluciones homogénea y particular tienen la siguiente forma:

$$v_c^h(t) = K \cdot e^{-1500t} \tag{2.42}$$

$$v_c^p(t) = A \cdot e^{-0.01t} \tag{2.43}$$

reemplazando la solución particular en la ecuación diferencial, se obtiene que:

$$A = \frac{500000}{149999} \tag{2.44}$$

finalmente utilizando la condición inicial $v_c(0) = v_c^h(0) + v_c^p(0) = K + A = 0$, entonces $K = -A$. Por lo tanto la solución general es:

$$v_c(t) = A \cdot \left(e^{-0.01t} - e^{-1500t}\right), \quad \forall t \in [0, 5) \tag{2.45}$$

y la corriente en el capacitor está dada por $i_c(t) = C \cdot \frac{d}{dt}v_c(t)$, por lo tanto:

$$i_c(t) = A \cdot 10^{-6} \cdot \left(1500e^{-1500t} - 0.01e^{-0.01t}\right) \tag{2.46}$$

- $t \geq 5s$: para este caso, se tiene que la ecuación diferencial a resolver es:

$$\frac{d}{dt}v_c(t) + 1500 \cdot v_c(t) = 5000 \cdot e^{-0.01t} - 20000 \tag{2.47}$$

en donde las soluciones homogénea y particular tienen la forma:

$$v_c^h(t) = K \cdot e^{-1500(t-5)} \tag{2.48}$$

$$v_c^p(t) = A \cdot e^{-0.01t} - B \tag{2.49}$$

reemplazando la solución particular en la ecuación diferencial se tiene que:

$$A = \frac{500000}{149999} \tag{2.50}$$

$$B = \frac{40}{3} \tag{2.51}$$

ahora evaluando en la condición inicial, obtenemos que:

$$K = (B - Ae^{-1500 \cdot 5}) \tag{2.52}$$

Por lo tanto la solución general es:

$$v_c(t) = (B - Ae^{-1500 \cdot 5}) \cdot e^{-1500(t-5)} + A \cdot e^{-0.01t} - B \tag{2.53}$$

$$= A \cdot (e^{-0.01t} - e^{-1500t}) - B \cdot (1 - e^{-1500(t-5)}) \tag{2.54}$$

y la corriente en el capacitor está dada por $i_c(t) = C \cdot \dfrac{d}{dt} v_c(t)$, por lo tanto:

$$i_c(t) = A \cdot 10^{-6} \cdot \left(1500e^{-1500t} - 0.01e^{-0.01t}\right) - 1.5B \cdot 10^{-3} \cdot e^{-1500(t-5)} \tag{2.55}$$

2º forma de solución: Laplace

Sea la transformada de Laplace $\mathcal{L}\{v_c(t)\} = V_c(s)$. Aplicando transformada de Laplace a la ecuación diferencial anterior obtenemos:

$$\left[sV_c(s) - \underbrace{\cancel{v_c(0)}}_{condición\ inicial} \right] + 1500V_c(s) = \frac{5000}{s + 0.01} - 20000 \cdot \frac{e^{-5s}}{s} \tag{2.56}$$

$$V_c(s) \cdot (s + 1500) = \frac{5000}{s + 0.01} - 20000 \cdot \frac{e^{-5s}}{s} \tag{2.57}$$

$$V_c(s) = \frac{5000}{(s + 0.01)(s + 1500)} - \frac{20000 \cdot e^{-5s}}{s(s + 1500)} \tag{2.58}$$

Descomponiendo en fracciones parciales la ecuación anterior, obtenemos:

$$V_c(s) = \frac{500000}{149999} \cdot \left(\frac{1}{s+0.01} - \frac{1}{s+1500} \right) - \frac{40}{3} \cdot \left(\frac{e^{-5s}}{s} - \frac{e^{-5s}}{s+1500} \right) \tag{2.59}$$

Tomando la transformada inversa, tenemos que el voltaje en el capacitor es:

$$v_c(t) = \frac{500000}{149999} \cdot \left(e^{-0.01t} - e^{-1500t} \right) u(t) - \frac{40}{3} \cdot \left(1 - e^{-1500(t-5)} \right) u(t-5) \tag{2.60}$$

Luego derivando el voltaje $v_c(t)$ en el capacitor y multiplicando por su capacitancia, obtenemos la corriente $i_c(t)$ en el capacitor:

$$\begin{aligned} i_c(t) &= 10^{-6} \cdot \frac{500000}{149999} \cdot \left(1500e^{-1500t} - 0.01e^{-0.01t} \right) u(t) + 10^{-6} \cdot \frac{500000}{149999} \cdot \left(e^{-0.01t} - e^{-1500t} \right) \delta(t) \\ &\quad - \frac{40 \cdot 1500 \cdot 10^{-6}}{3} e^{-1500(t-5)} u(t-5) - \frac{40 \cdot 10^{-6}}{3} \cdot \left(1 - e^{-1500(t-5)} \right) \delta(t-5) \end{aligned} \tag{2.61}$$

Problema 6

Considere el circuito de la figura 9. Los switch S_1 y S_2 llevan abiertos mucho tiempo. S_1 se cierra en $t_1 = 1s$ y S_2 se cierra en $t_2 = 2.5s$.

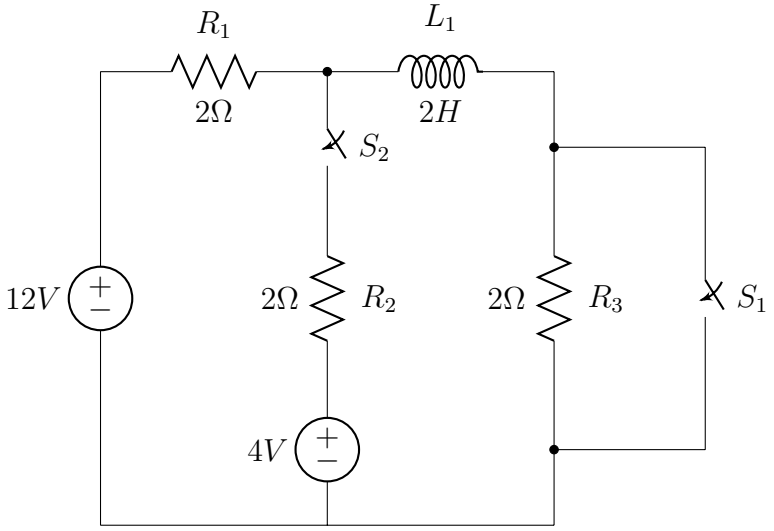


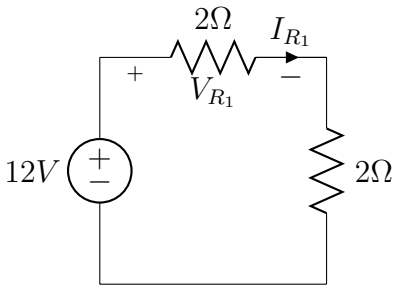
Figura 9: Circuito RL

(a) Encuentre el voltaje y la corriente en el inductor L_1 y en el resistor R_1 para todo t. Sea claro y consistente al definir los intervalos de tiempo, las polaridades de voltajes y las direcciones de corrientes.

(b) Grafique el voltaje y la corriente en el inductor L_1 y en el resistor R_1 para $0 < t < 5$.

Solución:

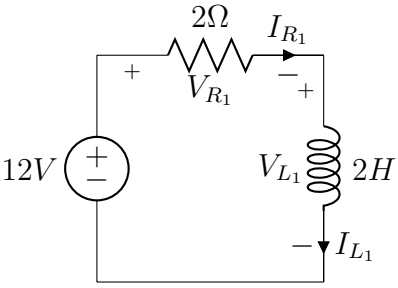
(a) Primero que todo, analizaremos en 3 intervalos de tiempo. Primero para $t < 1s$, en donde ambos interruptores llevan mucho tiempo abierto, por ende el circuito es el siguiente:



en donde vemos que el inductor se ve como un **cortocircuito**. Por lo tanto, para $t < 1s$ se tiene:

$$V_{R_1} = 6V \tag{2.62}$$
$$I_{R_1} = 3A \tag{2.63}$$
$$V_{L_1} = 0V \tag{2.64}$$
$$I_{L_1} = 3A \tag{2.65}$$

Ahora para $t \in [1, 2.5)$ se tiene que el interruptor S_1 se encuentra cerrado, por lo tanto el circuito equivalente es:



Utilizando Ley de mallas, se tiene que:

$$2I_{L_1}(t) + 2 \cdot \frac{d}{dt} I_{L_1}(t) = 12 \tag{2.66}$$

$$\frac{d}{dt} I_{L_1}(t) + I_{L_1}(t) = 6 \tag{2.67}$$

Resolviendo la ecuación diferencial obtenemos:

$$I_{L_1}(t) = K \cdot e^{-t} + 6 \tag{2.68}$$

Dada la condición inicial del período anterior, se tiene que:

$$I_{L_1}(0) = 3A, \quad \Rightarrow K = -3 \tag{2.69}$$

Por lo tanto la corriente en el resistor R_1 e inductor L_1 está dada por:

$$I_{R_1}(t) = I_{L_1}(t) = 3 \cdot \left(2 - e^{-(t-1)}\right) \tag{2.70}$$

para todo $t \in [1, 2.5)$ (nótese el desplazamiento temporal de $1s$ ya que la ecuación diferencial se resolvió considerando $t = 1s$ como estado inicial). Luego $\forall t \in [1, 2.5)$:

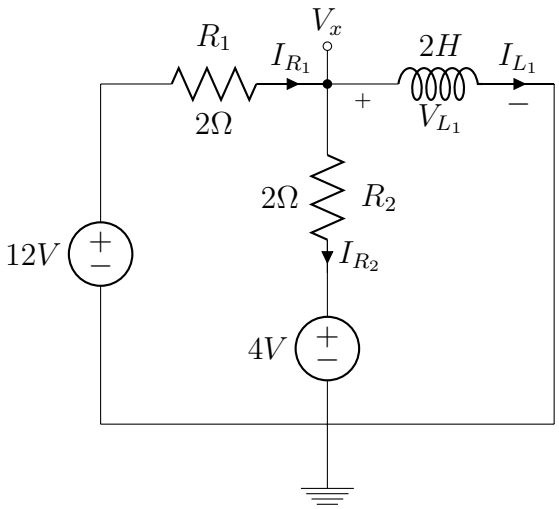
$$V_{R_1}(t) = 2 \cdot I_{R_1}(t) = 6 \cdot \left(2 - e^{-(t-1)}\right) \tag{2.71}$$

$$V_{L_1}(t) = 2 \cdot \frac{d}{dt} I_{L_1}(t) = 6e^{-(t-1)} \tag{2.72}$$

Luego la corriente en el inductor para $t = 2.5$ está dada por:

$$I_{L_1}(2.5) = 3 \cdot \left(2 - e^{-1.5}\right) A \approx 5.3306A \tag{2.73}$$

Finalmente para $t \geq 2.5s$, se tiene que el circuito equivalente es:



Notemos que se fijó tierra en el nodo inferior para tener una referencia. Ocupando Ley de nodos en el nodo V_x se tiene:

$$\frac{12 - V_x}{2} = \frac{V_x - 4}{2} + I_{L_1} \tag{2.74}$$

$$8 = V_x + I_{L_1} \tag{2.75}$$

Notando que $V_x = 2 \cdot \frac{d}{dt} I_{L_1}(t)$ y reemplazando en la ecuación anterior, obtenemos la ecuación diferencial:

$$\frac{d}{dt} I_{L_1}(t) + \frac{I_{L_1}(t)}{2} = 4 \tag{2.76}$$

Cuya solución es:

$$I_{L_1}(t) = Ke^{-(t-2.5)/2} + 8 \tag{2.77}$$

(se consideró el desplazamiento en el tiempo). Sea $\alpha = I_{L_1}(2.5) \approx 5.3306A$, entonces se tiene que $K = \alpha - 8$, por lo tanto para $t \geq 2.5s$ se tiene:

$$I_{L_1}(t) = (\alpha - 8) \cdot e^{-(t-2.5)/2} + 8 \tag{2.78}$$

Las demás ecuaciones son:

$$V_{L_1}(t) = 2 \cdot \frac{d}{dt} I_{L_1}(t) = (8 - \alpha) \cdot e^{-(t-2.5)/2} \tag{2.79}$$

$$I_{R_1}(t) = \frac{12 - V_{L_1}(t)}{2} = \frac{12 + (\alpha - 8) \cdot e^{-(t-2.5)/2}}{2} \tag{2.80}$$

$$V_{R_1}(t) = 2 \cdot I_{R_1}(t) = 12 + (\alpha - 8) \cdot e^{-(t-2.5)/2} \tag{2.81}$$

(b) Como se calculó en el inciso anterior, se tiene que la corriente y voltajes por R_1 y L_1 están dados por:

$$I_{R_1}(t) = \begin{cases} 3\ A & t < 1s \\ 3 \cdot \left(2 - e^{-(t-1)}\right)\ A & t \in [1s, 2.5s) \\ \dfrac{12 + (\alpha - 8) \cdot e^{-(t-2.5)/2}}{2}\ A & t \geq 2.5s \end{cases} \tag{2.82}$$

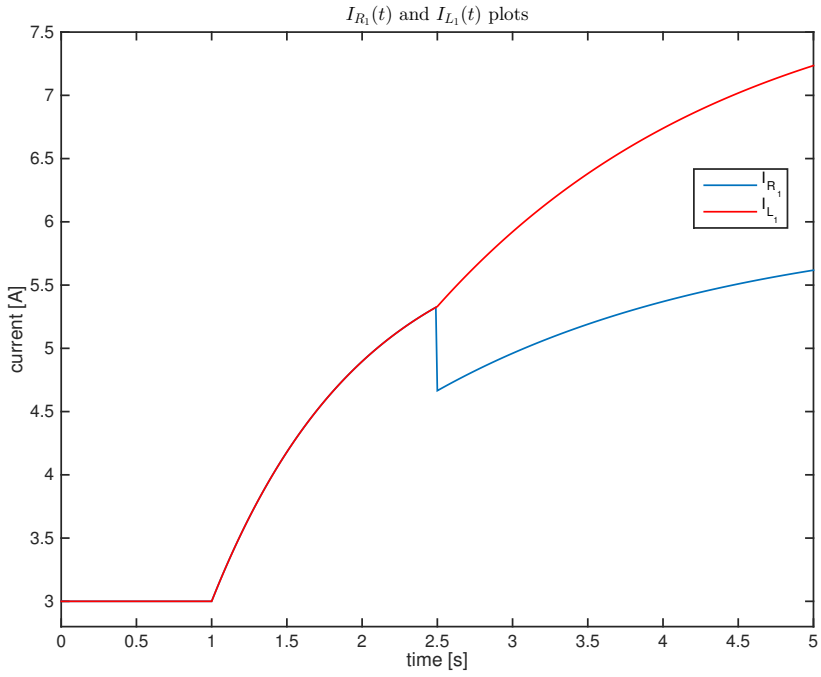
$$V_{R_1}(t) = \begin{cases} 6\ V & t < 1s \\ 6 \cdot \left(2 - e^{-(t-1)}\right)\ V & t \in [1s, 2.5s) \\ 12 - (8 - \alpha) \cdot e^{-(t-2.5)/2}\ V & t \geq 2.5s \end{cases} \tag{2.83}$$

$$I_{L_1}(t) = \begin{cases} 3\ A & t < 1s \\ 3 \cdot \left(2 - e^{-(t-1)}\right)\ A & t \in [1s, 2.5s) \\ (\alpha - 8) \cdot e^{-(t-2.5)/2} + 8\ A & t \geq 2.5s \end{cases} \tag{2.84}$$

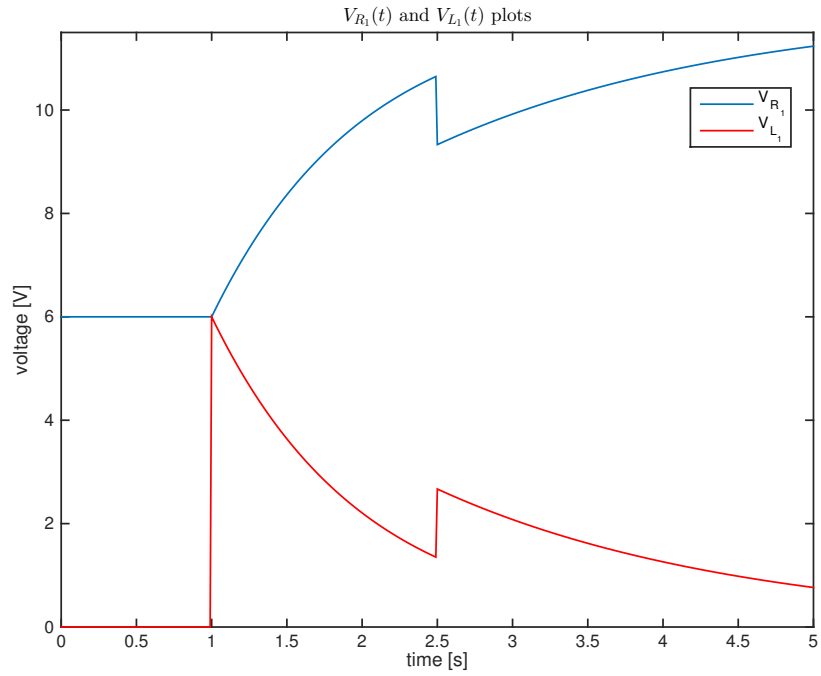
$$V_{L_1}(t) = \begin{cases} 0\ V & t < 1s \\ 6e^{-(t-1)}\ V & t \in [1s, 2.5s) \\ (8 - \alpha) \cdot e^{-(t-2.5)/2}\ V & t \geq 2.5s \end{cases} \tag{2.85}$$

Los gráficos son los siguientes:

- Gráfico de corrientes en R_1 y L_1:



- Gráfico de voltajes en R_1 y L_1:



Problema 7

El circuito de la figura 10 lleva conectado mucho tiempo al resistor R. En $t = 0$, el switch cambia de posición y se conecta al capacitor C. Considerando que el capacitor inicialmente se encuentra descargado, encuentre el voltaje del capacitor para todo $t \geq 0$.

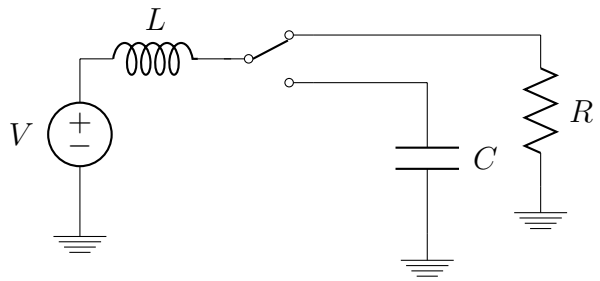


Figura 10: Circuito de segundo orden

Solución:

Sea $v_C(t)$ el voltaje en el capacitor. Para todo $t < 0$, el circuito ha estado infinito tiempo en ese estado, por lo tanto la corriente en el inductor justo antes de que cambie el switch es:

$$i_L(0^-) = \frac{V}{R} \tag{2.86}$$

Sea $i_C(t)$ la corriente en el capacitor C una vez que se cierra el swtich en $t = 0$, entonces se tiene que el voltaje en la bobina está dado por:

$$v_L(t) = L \cdot \frac{d}{dt} i_L(t) = L \cdot \frac{d}{dt} i_C(t) = LC \cdot \frac{d^2}{dt^2} v_C(t) \tag{2.87}$$

Por lo tanto, por ley de Kirchhoff (mallas) se tiene que para todo $t \geq 0$:

$$v_L(t) + v_C(t) = V \tag{2.88}$$

$$LC \cdot \frac{d^2}{dt^2} v_C(t) + v_C(t) = V \tag{2.89}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} v_C(t) + \frac{v_C(t)}{LC} = \frac{V}{LC} \tag{2.90}$$

Se tiene que un inductor se opone a los cambios de corriente, por ende en el transiente, se cumple que $i_L(0^-) = i_C(0^+) = C \cdot v_C'(0^+)$, por lo tanto las condiciones iniciales de la edo son:

$$v_C(0^+) = 0 \tag{2.91}$$
$$v_C'(0^+) = \frac{V}{RC} \tag{2.92}$$

Resolviendo la edo, se tiene que la solución homogénea y particular están dadas por:

$$v_C^h(t) = k_1 \cos(\omega_0 t) + k_2 \sin(\omega_0 t) \tag{2.93}$$

$$v_C^p(t) = V \tag{2.94}$$

$$v_C(t) = k_1 \cos(\omega_0 t) + k_2 \sin(\omega_0 t) + V \tag{2.95}$$

en donde $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. Aplicando las condiciones iniciales, se obtienen:

$$k_1 = -V \tag{2.96}$$

$$k_2 = \frac{V}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \tag{2.97}$$

por lo tanto la solución general para el voltaje en el capacitor para todo $t \geq 0$ es:

$$v_C(t) = -V \cos(\omega_0 t) + \frac{V}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \sin(\omega_0 t) + V \tag{2.98}$$

con $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$.

Problema 8

El circuito de la figura 11, ha estado conectado por mucho tiempo a V_1. En $t = 0$ el switch cambia de posición conectándose a V_2. Los valores del circuito son $V_1 = 12V$, $V_2 = 2V_1$, $R_1 = 10\Omega$, $R_2 = 2\Omega$, $L_1 = 2H$ y $C_1 = 250mF$.

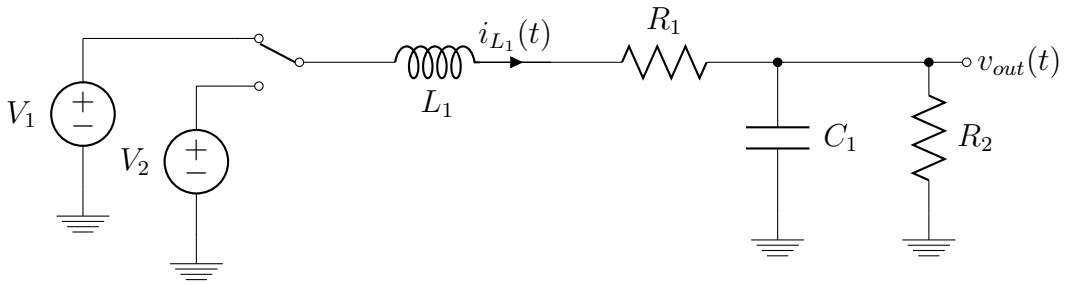


Figura 11: Circuito de segundo orden

(a) Determine el voltaje de salida $v_{out}(t)$ y la corriente en el inductor $i_{L_1}(t)$ para todo $t \geq 0$.

(b) Grafique $v_{out}(t)$ e $i_{L_1}(t)$ para todo $t \geq 0$.

Solución:

Notemos que para $t < 0$, como el circuito ha estado infinito tiempo en ese estado, se tiene que:

$$i_{L_1}(0^-) = 1A \tag{2.99}$$
$$v_{out}(0^-) = 2V \tag{2.100}$$

luego para $t \geq 0$, el circuito se conecta a $V_2 = 24V$. Sea $V_x(t)$ el nodo entre el inductor L_1 y el resistor R_1, entonces:

$$V_x(t) = v_{out}(t) + R_1 \cdot i_{L_1}(t) \tag{2.101}$$

la ecuación en el inductor está dada por:

$$V_2 - V_x(t) = L_1 \cdot i'_{L_1}(t) \tag{2.102}$$

usando Ley de Kirchhoff en la salida se tiene:

$$i_{L_1}(t) = \frac{v_{out}(t)}{R_2} + C_1 \cdot v'_{out}(t) \tag{2.103}$$

utilizando estas 3 expresiones, se llega a:

$$L_1C_1 \cdot v''_{out}(t) + \left(R_1C_1 + \frac{L_1}{R_2}\right) \cdot v'_{out}(t) + \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) v_{out}(t) = V_2 \tag{2.104}$$

reemplazando los valores se obtiene:

$$v''_{out}(t) + 7v'_{out}(t) + 12v_{out}(t) \;=\; 48 \tag{2.105}$$

Ahora tenemos que resolver la ecuación diferencial. Para la homogénea, tenemos el polinomio característico:

$$P(s) \;=\; s^2 + 7s + 12 = (s+3) \cdot (s+4) \tag{2.106}$$

Por lo tanto la solución homogénea es:

$$v^h_{out}(t) = k_1 \cdot e^{-3t} + k_2 \cdot e^{-4t} \tag{2.107}$$

y la solución particular, por simple inspección, es:

$$v^p_{out}(t) = 4 \tag{2.108}$$

Por lo tanto, la solución general es:

$$v_{out}(t) = k_1 \cdot e^{-3t} + k_2 \cdot e^{-4t} + 4 \tag{2.109}$$

sabemos que

$$i_{L_1}(t) \;=\; \frac{v_{out}(t)}{R_2} + C_1 \cdot v'_{out}(t) \tag{2.110}$$

derivando $v_{out}(t)$ y reemplazando valores, se obtiene:

$$i_{L_1}(t) \;=\; -\frac{k_1}{4} \cdot e^{-3t} - \frac{k_2}{2} \cdot e^{-4t} + 2 \tag{2.111}$$

Ahora, utilizando las condiciones iniciales, se llega el siguiente sistema de ecuaciones:

$$v_{out}(0^+) = k_1 + k_2 + 4 = 2 \tag{2.112}$$
$$i_{L_1}(0^+) = -\frac{k_1}{4} - \frac{k_2}{2} + 2 = 1 \tag{2.113}$$

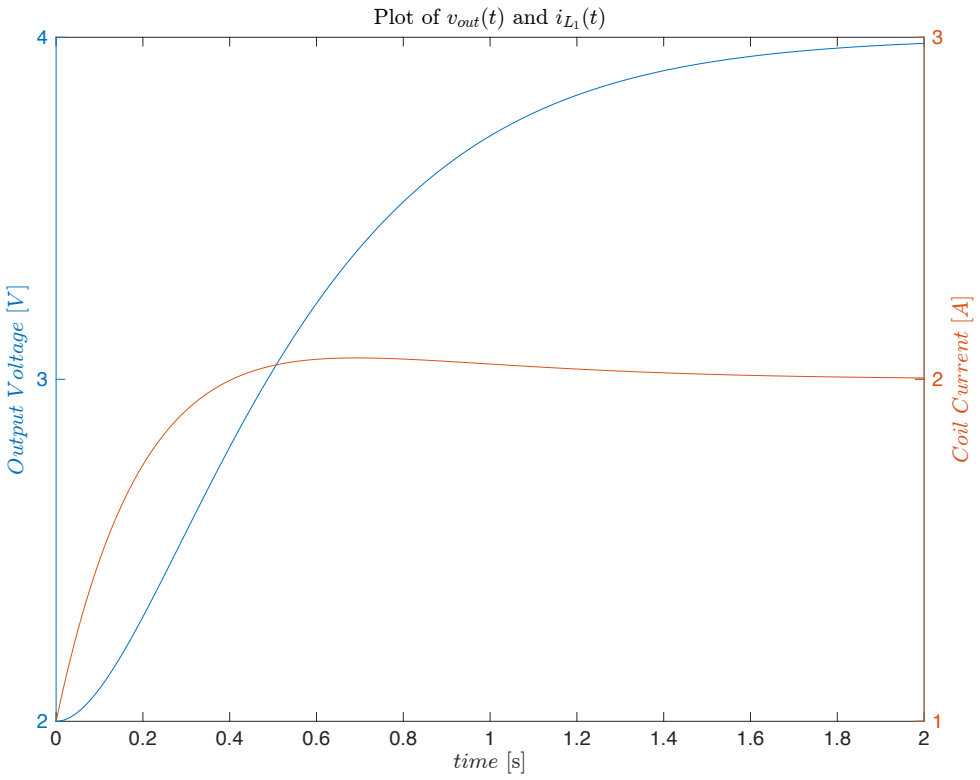
resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene:

$$k_1 = -8 \tag{2.114}$$
$$k_2 = 6 \tag{2.115}$$

Por lo tanto:

$$v_{out}(t) = -8e^{-3t} + 6e^{-4t} + 4 \tag{2.116}$$
$$i_{L_1}(t) = 2e^{-3t} - 3e^{-4t} + 2 \tag{2.117}$$

Graficando los resultados:



Problema 9

Considere el circuito de la figura 12, donde el voltaje de la fuente V_1 está definido como $v_1(t)$. Asuma que $v_c(0)$ e $i_L(0)$ son valores conocidos.

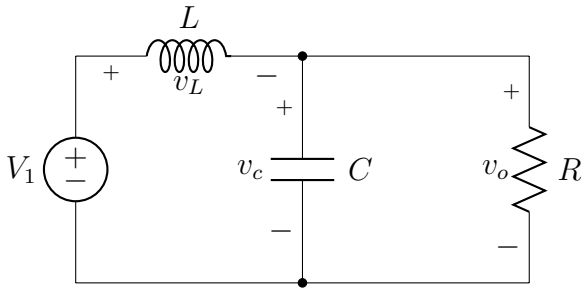


Figura 12: Circuito de segundo orden

(a) Plantee la ecuación diferencial que permite encontrar el voltaje $v_o(t)$.

(b) Encuentre la solución homogénea, incluyendo las condiciones iniciales.

(c) Suponga que $L = 1mH$ y $C = 10\mu F$. Encuentre el valor de R con el que se obtiene una respuesta críticamente amortiguada (R_C).

Solución:

(a) Utilizando ley de nodos en el nodo de salida, se tiene que:

$$i_L(t) = C\frac{d}{dt}v_o(t) + \frac{v_o(t)}{R} \tag{2.118}$$

derivando a ambos lados con respecto al tiempo y multiplicando por L obtenemos:

$$\underbrace{L\frac{d}{dt}i_L(t)}_{v_L(t)} = LC\frac{d^2}{dt^2}v_o(t) + \frac{L}{R}\frac{d}{dt}v_o(t) \tag{2.119}$$

Notemos que $v_L(t) = v_1(t) - v_o(t)$, por lo tanto, reordenando la ecuación anterior, obtenemos la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2}{dt^2}v_o(t) + \frac{1}{RC}\frac{d}{dt}v_o(t) + \frac{v_o(t)}{LC} = \frac{v_1(t)}{LC} \tag{2.120}$$

(b) Queremos resolver la ecuación diferencial homogénea:

$$\frac{d^2}{dt^2}v_o(t) + \frac{1}{RC}\frac{d}{dt}v_o(t) + \frac{v_o(t)}{LC} = 0 \tag{2.121}$$

Sean $\omega_c = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ y $\xi = \dfrac{\sqrt{LC}}{2RC}$, entonces, el polinomio característico de la ecuación diferencial es:

$$P(s) = s^2 + 2\xi\omega_c s + \omega_c^2 \tag{2.122}$$

cuyas raíces son:

$$s_1 = -\xi\omega_c + \omega_c\sqrt{\xi^2 - 1} \tag{2.123}$$

$$s_2 = -\xi\omega_c - \omega_c\sqrt{\xi^2 - 1} \tag{2.124}$$

Por lo tanto la solución homogénea está dada por:

$$v_o^h(t) = K_1 \cdot e^{(-\xi\omega_c + \omega_c\sqrt{\xi^2-1})t} + K_2 \cdot e^{(-\xi\omega_c - \omega_c\sqrt{\xi^2-1})t} \tag{2.125}$$

Notemos que:

$$i_L(t) = C \cdot v_o'(t) + v_o(t)/R \tag{2.126}$$

Por lo tanto las condiciones iniciales son:

$$v_o(0) = K \ (conocido) \tag{2.127}$$

$$v_o'(0) = \frac{i_L(0)}{C} + \frac{v_o(0)}{RC} \tag{2.128}$$

Como no se indica el valor de la excitación V_1, entonces no podemos encontrar la solución general para $v_o(t)$, es decir, las constantes K_1 y K_2 son desconocidas.

(c) Para obtener una respuesta críticamente amortiguada, es necesario que las raíces del polinomio característico sean iguales (repetidas) y reales. Es decir:

$$s^2 + 2\xi\omega_c s + \omega_c^2 = (s + \omega_c)^2 \tag{2.129}$$

esto implica que:

$$\xi = 1, \quad \Rightarrow \ \sqrt{LC} = 2R_cC \tag{2.130}$$

por lo tanto:

$$R_c = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{L}{C}} = 5\Omega \tag{2.131}$$

Problema 10

En la figura, se presenta un circuito RLC excitado con una fuente de corriente sinusoidal:

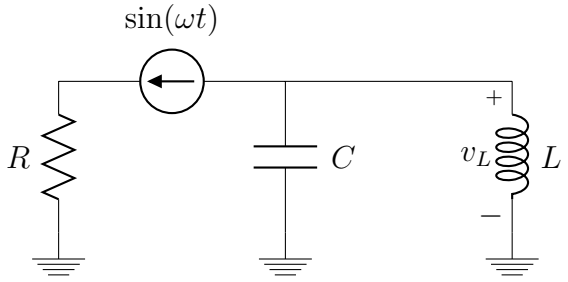


Figura 13: Circuito problema 10

Determine la parte real e imaginaria de v_L en función de la frecuencia ω (recuerde que se encuentra en régimen sinusoidal permanente).

Solución:

La fuente sinusoidal de corriente la podemos representar fasorialmente como $1\angle 90^\circ = j$. Por lo tanto se tiene que el voltaje en el inductor está dado por:

$$V_L(\omega) = -j \cdot (j\omega L \,||\, 1/(j\omega C)) \tag{2.132}$$

$$= -j \cdot \frac{j\omega L}{1-\omega^2 LC} \tag{2.133}$$

$$= \frac{\omega L}{\omega^2 LC - 1} \tag{2.134}$$

Notemos que para $\omega < 1/\sqrt{LC}$, el voltaje presenta un desfase de 180° con respecto a la fuente, por lo tanto:

$$V_L(\omega) = \begin{cases} \dfrac{\omega L}{\omega^2 LC - 1}\angle 0^\circ, & \text{si } \omega > 1/\sqrt{LC} \\ \dfrac{\omega L}{1-\omega^2 LC}\angle 180^\circ, & \text{si } \omega < 1/\sqrt{LC} \end{cases}$$

Problema 11

Considere el circuito de la figura 14:

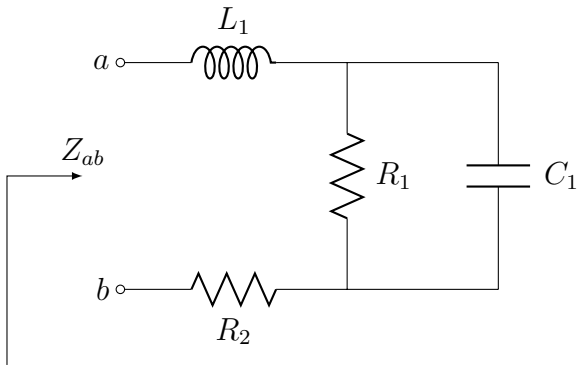


Figura 14: Circuito problema 11

En donde $L1 = 250mH$, $R_1 = 10k\Omega$, $C_1 = 100\mu F$ y $R_2 = 1k\Omega$.

(a) Determine la impedancia vista desde el puerto ab: Z_{ab}:

(b) Calcule la frecuencia a la cual Z_{ab} es puramente resistiva.

Solución:

(a) La impedancia vista desde el puerto ab está dada por:

$$Z_{ab} = sL_1 + \left(R_1 \,||\, \frac{1}{sC_1}\right) + R_2 \tag{2.135}$$

$$= sL_1 + \frac{R_1}{1 + sR_1C_1} + R_2 \tag{2.136}$$

$$= \frac{sL_1 + s^2L_1R_1C_1 + R_1 + R_2 + sR_1R_2C_1}{1 + sR_1C_1} \tag{2.137}$$

$$= \frac{(R_1 + R_2) + s \cdot (R_1R_2C_1 + L_1) + s^2L_1R_1C_1}{1 + sR_1C_1} \tag{2.138}$$

reemplazando valores se obtiene:

$$Z_{ab}(s) = \frac{11000 + 1000.2 \cdot s + 0.25 \cdot s^2}{1 + s} \;\Rightarrow\; Z_{ab}(\omega) = \frac{(11000 - 0.25\omega^2) + j1000.2\omega}{1 + j\omega} \tag{2.139}$$

(b) Reordenando la expresión anterior, se obtiene:

$$Z_{ab}(\omega) = \frac{11000 + 999.95 \cdot \omega^2}{1+\omega^2} - j\omega \cdot \frac{9999.8 - 0.25 \cdot \omega^2}{1+\omega^2} \tag{2.140}$$

Es evidente que para $\omega = 0$, se tiene que la impedancia es puramente real, dada por:

$$Z_{ab}(0) = R_1 + R_2 = 11k\Omega \tag{2.141}$$

Notemos que si $9999.8 - 0.25\omega^2 = 0$ entonces la impedancia también es puramente resistiva. Resolviendo la ecuación cuadrática se obtiene:

$$\omega_0 = 199.998\ [rad/s] \ \Rightarrow \ f_0 = 31.831\ [Hz] \tag{2.142}$$

con lo cual se obtiene aproximadamente:

$$Z_{ab}(\omega_0) \approx 1.0002k\Omega \tag{2.143}$$

Problema 12

Sea el circuito de la figura 15 un modelo de un simple amplificador, en donde g_m es una constante en unidades de Siemens $[S]$. Exprese los voltajes v_{gs} y v_{out} como fasores (recuerde régimen sinusoidal permanente).

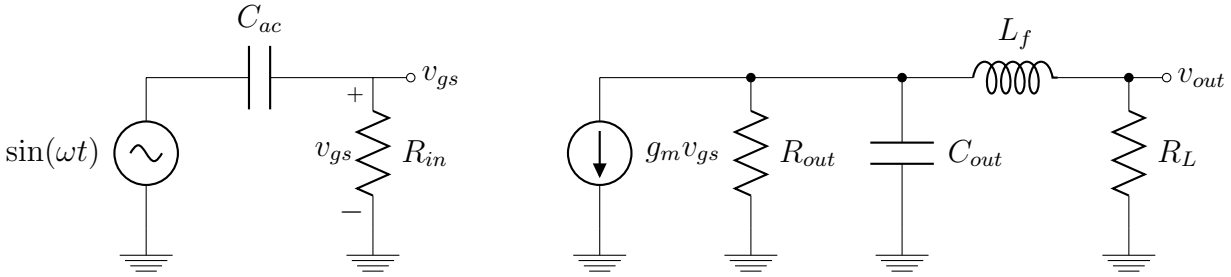


Figura 15: Circuito problema 12

Solución:

La fuente sinusoidal, la podemos representar como $1\angle 90^\circ = j$. Utilizando un divisor de tensión en la red RC de entrada, se tiene que:

$$V_{gs} = \frac{j\omega R_{in}C_{ac}}{1 + j\omega R_{in}C_{ac}} \cdot j \tag{2.144}$$

$$= \frac{\omega R_{in}C_{ac}}{\sqrt{1 + (\omega R_{in}C_{ac})^2}} \angle - \arctan(\omega R_{in}C_{ac}) \tag{2.145}$$

es decir, presenta un ángulo de desfase de $-\arctan(\omega R_{in} C_{ac})$ con respecto a los 90° de entrada.

Sea V_x el fasor de voltaje en el nodo a la izquierda de L_f, y sea $I_s = g_m V_{gs}$. Si apagamos la fuente $\sin(\omega t)$ y calculamos la impedancia del nodo V_x, llamémosla Z_x, entonces se tiene que $V_x = -I_s \cdot Z_x$. La impedancia Z_x está dada por:

$$Z_x = (R_L + sL_f) \,||\, \frac{1}{sC_{out}} \,||\, R_{out} \tag{2.146}$$

El resultado expresado en el dominio de la frecuencia es un resultado muy complicado algebraicamente, es por ello que se harán los cálculos de manera simbólica.

Por divisor de tensión, se tiene que:

$$V_{out} = \frac{R_L}{R_L + j\omega L_f} \cdot V_x \tag{2.147}$$

$$= -\frac{R_L}{R_L + j\omega L_f} \cdot I_s \cdot Z_x \tag{2.148}$$

$$= -g_m Z_x \frac{R_L}{R_L + j\omega L_f} \cdot V_{gs} \tag{2.149}$$

Notemos que $\dfrac{R_L}{R_L + j\omega L_f} = \dfrac{R_L}{\sqrt{R_L^2 + \omega^2 L_f^2}} \angle -\arctan(\omega L_f / R_L)$. Por lo tanto:

$$V_{out} = \left[g_m \frac{\omega R_{in} R_L C_{ac}}{\sqrt{(1 + \omega^2 R_{in}^2 C_{ac}^2)(R_L^2 + \omega^2 L_f^2)}} \angle \left(-\arctan(\omega R_{in} C_{ac}) - \arctan\left(\omega \frac{L_f}{R_L}\right)\right)\right] \cdot Z_x$$

Problema 13

Considerando el mismo circuito del problema anterior. Suponga que R_L es la carga del amplificador, entonces el amplificador tiene un equivalente de Thévenin (también Norton) visto desde el nodo de salida v_{out}. Determine el equivalente de Thévenin del circuito.

Solución:

Para el cálculo de Z_{th}, apagamos la fuente de entrada, y calculamos la impedancia de salida, la cual está dada por:

$$Z_{th} = sL_f + \left(R_{out} \,||\, \frac{1}{sC_{out}} \right) \tag{2.150}$$

llevando al dominio de la frecuencia se obtiene:

$$Z_{th} = \frac{R_{out}}{1+\omega^2 R_{out}^2 C_{out}^2} + j\frac{L_f - R_{out}^2 C_{out} + \omega^2 L_f R_{out}^2 C_{out}^2}{1+\omega^2 R_{out}^2 C_{out}^2} \quad (2.151)$$

$$= \frac{R_{out}}{1+\omega^2 R_{out}^2 C_{out}^2} + j\left(L_f - \frac{R_{out}^2 C_{out}}{1+\omega^2 R_{out}^2 C_{out}^2}\right) \quad (2.152)$$

el voltaje de circuito abierto está dado por:

$$V_{th} = -g_m \left(R_{out} \mid\mid \frac{1}{sC_{out}}\right) \cdot V_{gs} \quad (2.153)$$

Notemos que:

$$R_{out} \mid\mid \frac{1}{j\omega C_{out}} = \frac{R_{out} - j\omega R_{out}^2 C_{out}}{1+\omega^2 R_{out}^2 C_{out}^2} \quad (2.154)$$

y recordemos del problema anterior:

$$V_{gs} = \frac{j\omega R_{in} C_{ac}}{1+j\omega R_{in} C_{ac}} \cdot j = \frac{-\omega R_{in} C_{ac} + j\omega^2 R_{in}^2 C_{ac}^2}{1+\omega^2 R_{in}^2 C_{ac}^2} \quad (2.155)$$

Introduciendo las dos ecuaciones anteriores en V_{th}, se obtiene finalmente:

$$V_{th} = -g_m \frac{\omega R_{in} R_{out} C_{ac}}{(1+\omega^2 R_{in}^2 C_{ac}^2)(1+\omega^2 R_{out}^2 C_{out}^2)} \cdot \left[\left(\omega^2 R_{out} R_{in} C_{ac} C_{out} - 1\right) + j\omega\left(R_{in} C_{ac} + R_{out} C_{out}\right)\right]$$

3. Bonus

Para optar a más puntaje el alumno es libre de elegir cualquier circuito de la tarea y simularlo en `LTspice` haciendo una simulación *transiente* (`.tran`). Este bonus es solamente válido para esta tarea y la máxima nota posible es 7. Se recomienda incluir en su informe su esquemático simulado además del resultado de su simulación.